

Chương 2

Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

2.1 Phân loại và đưa về dạng chính tắc phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ cho phương trình tuyến tính cấp 2 sau đây:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \quad (2.1)$$

ở đây các hàm số $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ và $f(x)$ xác định trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử $a_{ij} = a_{ji}$. Đa thức đặc trưng của phương trình (2.1) là dạng toàn phương:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j. \quad (2.2)$$

Ta cố định điểm $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ và xét phương trình (2.1) trong lân cận của điểm x^0 này. Khi đó ma trận $(a_{ij}(x^0))_{i,j=1}^n$ là ma trận hằng số.

Dùng phép biến đổi tuyến tính không suy biến $y = Ax$, với $A = (\alpha_{sj})_{s,j=1}^n$ và $\det(\alpha_{sj})_{s,j=1}^n \neq 0$, khi đó ta có

$$y_s = \sum_{j=1}^n \alpha_{sj} x_j, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

Viết phương trình (2.1) dưới dạng biến số mới, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_s} \cdot \frac{\partial y_s}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_s} \cdot \alpha_{sj}; \quad j = 1, \dots, n; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_s} \alpha_{sj} \alpha_{li}. \quad (2.5)$$

Phương trình (2.1) trong biến mới tại điểm x^0 có dạng:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \sum_{l,s=1}^n \alpha_{sj} \alpha_{li} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_s} + \sum_{i=1}^n b_i(x^0) \cdot \sum_{s=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_s} \alpha_{si} + c(x^0) \cdot u = f(x). \quad (2.6)$$

Thay đổi thứ tự lấy tổng ta có

$$\sum_{s,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \cdot \alpha_{sj} \alpha_{li} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_s \partial y_l} = F(y_1, \dots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_1}) = 0. \quad (2.7)$$

Đa thức đặc trưng của phương trình (2.7) là

$$\sum_{s,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \cdot \alpha_{sj} \cdot \alpha_{li} \right) \eta_s \cdot \eta_l = \sum_{s,l=1}^n a_{sl}^*(x^0) \cdot \eta_s \cdot \eta_l. \quad (2.8)$$

Nếu bây giờ ta đặt

$$\zeta_j = \sum_{s=1}^n \alpha_{sj} \eta_s, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.9)$$

tức là $\zeta = A' \eta$, trong đó A' là ma trận chuyển vị của ma trận A . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \zeta_i \zeta_j &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \sum_{s,l}^n \alpha_{sj} \alpha_{li} \eta_s \eta_l \\ &= \sum_{s,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_{sj} \alpha_{li} \right) \eta_s \cdot \eta_l = \sum_{s,l=1}^n a_{sl}^* \cdot \eta_s \cdot \eta_l. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Như vậy, phép biến đổi (2.3) biến phương trình (2.1) tại điểm x^0 về phương trình (2.7), thì phép biến đổi bởi ma trận chuyển vị của (2.3), tức là phép biến đổi (2.9) biến đổi đa thức đặc trưng của (2.1) về đa thức đặc trưng của (2.7) và ngược lại.

Ta có các nhận xét sau:

a) Trong đại số người ta chứng minh được rằng tồn tại phép biến đổi tuyến tính thực, không suy biến (2.9) biến dạng toàn phương

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \zeta_i \zeta_j \quad \text{về dạng} \quad \sum_{l=1}^n a_l^* \eta_l^2, \quad \text{với } a_l^* = \pm 1 \text{ hoặc } 0. \quad (2.11)$$

Số các số hạng mang dấu dương, dấu âm hay bằng 0 bất biến đối với phép biến đổi không suy biến.

b) Số các số hạng mang dấu dương, dấu âm hay bằng 0 đúng bằng số nghiệm dương, âm hay không của phương trình $|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi } i = j \\ 0 & \text{khi } i \neq j. \end{cases} \quad (2.12)$$

c) Với phép biến đổi (2.9) đưa đa thức đặc trưng của phương trình (2.1) về dạng (2.11), thì phép biến đổi bởi ma trận chuyển vị của (2.9), tức là (2.3) sẽ biến phương trình (2.1) về dạng

$$\sum_{l=1}^n a_l^* \frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} = F \left(y_1, \dots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n} \right) \quad (2.13)$$

trong đó

$$a_l^* = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Đây là dạng chính tắc của phương trình (2.1) tại điểm x^0 .

Định nghĩa 2.1.1. a) Phương trình (2.1) tại điểm x^0 được gọi là *eliptic* nếu tất cả các hệ số a_l^* trong (2.13) khác không và mang cùng một dấu, tức là hoặc $a_l^* = 1$ hoặc $a_l^* = -1$, $\forall l = \overline{1, n}$.

b) Phương trình (2.1) tại điểm x^0 được gọi là *hyperbolic* nếu tất cả các $a_l^* \neq 0$ và trong đó có một số hạng mang dấu trái với $(n-1)$ số hạng còn lại của a_l^* .

c) Phương trình (2.1) tại điểm x^0 được gọi là *parabolic* nếu có số hạng $a_{i_0}^*$ nào đó bằng 0, tất cả a_l^* còn lại khác không và mang cùng một dấu và hệ số của số hạng $\frac{\partial u}{\partial y_{i_0}}$ khác không.

d) Phương trình phi tuyến cấp hai

$$\Phi \left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0$$

với ẩn hàm $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tại điểm $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ được gọi là *eliptic*, *hyperbolic* hay *parabolic* nếu phương trình

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

(ở đây $A_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\}}$) là *eliptic*, *hyperbolic* hay *parabolic* tại điểm $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Bài tập

Bài 1. Phân loại các phương trình sau:

- 1) $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2y = 0$
- 2) $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0$
- 3) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u - xy^2 = 0$
- 4) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_z = 0$
- 5) $2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0$
- 6) $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x + 3xu = 0$
- 7) $u_{xx} + u_{yz} + u_{xz} - 3x^2u_y + y \sin xu + xe^{-y} = 0$
- 8) $5u_{xx} + u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 8u_{xz} - 4u_{yz} - u + yz^2 \sin x = 0$
- 9) $y^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$ m là số nguyên không âm
- 10) $xu_{xx} + yu_{yy} - u = 0$

Bài 2. Phân loại và đưa về dạng chính tắc các phương trình sau

- 1) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$
- 2) $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$
- 3) $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$
- 4) $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$
- 5) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + (e^{2y} - e^{x+y})u_y = 0$
- 6) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$
- 7) $u_{xx} - 7u_{xy} + 12u_{yy} + u_x - 2u_y = 0$
- 8) $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - x^2y = 0$
- 9) $u_{xx} - 2 \cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_x = 0$
- 10) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x + 3u_y = 0$
- 11) $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0$
- 12) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 5u_x + u_y + 12u = 0$
- 13) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u = 0$

2.2 Phương trình loại eliptic

2.2.1 Phương trình Laplace và hàm điều hòa

Giả sử miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ta xét phương trình Laplace trong miền Ω .

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2.15)$$

Định nghĩa 2.2.1. Nghiệm liên tục của phương trình Laplace được gọi là hàm điều hòa. Nói một cách khác, hàm u được gọi là hàm điều hòa trong miền Ω nếu u liên tục trong Ω và có các đạo hàm $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ thỏa mãn phương trình (2.15)

Các bài toán biên

Giả sử biên của miền Ω là $\partial\Omega$. Trên biên $\partial\Omega$ cho một hàm liên tục $\varphi(x')$, $x' \in \partial\Omega$.

a) Bài toán biên thứ nhất (bài toán Dirichlê)

Tìm hàm điều hòa trong miền Ω và nhận giá trị trên biên $\partial\Omega$ là hàm $\varphi(x')$. Nói một cách khác là tìm hàm $u(x)$ liên tục trong $\overline{\Omega}$, giá trị biên là $\varphi(x')$ và thỏa mãn phương trình (2.15).

Ta có thể viết ngắn gọn bằng kí hiệu:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x'), x' \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

b) Bài toán biên thứ hai (bài toán Nôiman)

Tìm nghiệm liên tục của phương trình (2.15) và đạo hàm theo hướng pháp tuyến $\frac{\partial u}{\partial n}$ nhận giá trị biên là $\psi(x')$, $x' \in \partial\Omega$; tức là:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \psi(x'), x' \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

c) Bài toán biên thứ ba (bài toán hỗn hợp)

Tìm hàm u thỏa mãn phương trình (2.15) trong miền Ω và điều kiện biên hỗn hợp $(pu + q\frac{\partial u}{\partial n})|_{\partial\Omega} = \Phi(x')$ tức là :

$$\left. \begin{aligned} &\Delta u = 0, x \in \Omega \\ &(pu + q\frac{\partial u}{\partial n})|_{\partial\Omega} = \Phi(x'), x' \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Nghiệm cơ bản của phương trình laplace

Hàm số sau sẽ gọi là nghiệm cơ bản của phương trình Laplace trong miền $\mathbb{R}^n \setminus x^0$:

$$\varepsilon(x - x^0) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n(n-2)} \cdot \frac{1}{|x - x^0|^{n-2}}, & \text{nếu } n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - x^0|}, & \text{nếu } n = 2 \end{cases} \quad (2.19)$$

trong đó ω_n là diện tích mặt cầu đơn vị $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus x^0$ là toàn không gian trừ điểm x^0 .

Nhận xét 2.2.2. Chúng ta dễ dàng thử được $\Delta \varepsilon(x - x^0) = 0$. Sau đây ta sẽ biểu diễn nghiệm của phương trình Laplace qua nghiệm cơ bản.

Hàm Green Giả sử hàm số $\omega(x, x^0) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ và giả sử $\Delta \omega = 0$, $\omega(x, x^0)|_{\partial\Omega} = -\varepsilon(x - x^0)|_{\partial\Omega}$.

Khi đó, ta gọi hàm số sau là hàm Green : $G(x, x^0) = \varepsilon(x - x^0) + \omega(x, x^0)$. Ta sẽ có $\Delta G(x, x^0) = 0$ và $G|_{\partial\Omega} = 0$.

Bổ đề 2.2.3. Giả sử $\varphi(x)$ liên tục trong lân cận $x^0 \in \Omega$, và giả sử $S_{x^0}^\delta$ là mặt cầu tâm x^0 , bán kính φ đủ nhỏ. Khi đó:

$$a) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{x^0}^\delta} \frac{\varepsilon(s - x^0)}{\partial \vec{n}} \varphi(s) ds = \varphi(x^0) \quad (2.20)$$

ở đây $\vec{n}$ là pháp tuyến trong của $S_{x^0}^\delta$.

$$b) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{x^0}^\delta} \varepsilon(s - x^0) \varphi(s) ds = 0. \quad (2.21)$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh trong trường hợp $n > 2$, trường hợp $n = 2$ làm tương tự.

i) Vì trên $S_{x^0}^r$, $|s - x^0| = r$, nên

$$\frac{\partial \varepsilon(s - x^0)}{\partial n} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1}{r^{n-1}}$$

Theo định lí giá trị trung bình của tích phân, ta có :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{x^0}^\delta} \frac{\partial \varepsilon(s - x^0)}{\partial \vec{n}} \cdot \varphi(s) ds &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{x^0}^\delta} \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1}{\delta^{n-1}} \varphi(s) ds \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\omega_n \cdot \delta^{n-1}} \cdot \varphi(\xi) \cdot \omega_n \cdot \delta^{n-1} \right], \end{aligned}$$

ξ là một điểm nào đó thuộc $S_{x^0}^\delta$. Khi $\delta \rightarrow 0$ thì $\xi \rightarrow 0$, do $\varphi(x)$ liên tục tại x^0 , nên giới hạn ở trên bằng $\varphi(x^0)$ khi $\delta \rightarrow 0$. Phần i) của Bổ đề 2.2.3 được chứng minh.

ii) Trên $S_{x^0}^\delta$ hàm $\varepsilon(s - x^0) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \cdot \frac{1}{r^{n-2}}$, chứng minh tương tự như phần i). $\square$

Bổ đề 2.2.4. Giả sử $\varphi(x)$ liên tục trong lân cận $x^0 \in \Omega$, khi đó :

$$i) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{x^0}^\delta} \frac{\partial G(s, x^0)}{\partial \vec{n}} \cdot \varphi(s) ds = \varphi(x^0)$$

ở đây $\vec{n}$ là pháp tuyến trong của $S_{x^0}^\delta$.

$$ii) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{x^0}^\delta} G(s, x^0) \varphi(s) ds = 0.$$

Chứng minh Bổ đề 2.2.4 tương tự như Bổ đề 2.2.3.

Định lí 2.2.5. (Định lí biểu diễn hàm điều hòa) Giả sử $\Omega \subset R^n, \partial\Omega \in C^1, \varphi \in C(\partial\Omega), u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Khi đó, nghiệm của bài toán biên thứ nhất (nếu có) sẽ có dạng :

$$u(x^0) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(s, x^0)}{\partial \vec{n}} \varphi(s) ds \quad (2.22)$$

ở đó $x^0 \in \Omega, \vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của $\partial\Omega$.

Chứng minh. Ta kí hiệu $V_{x^0}^\delta$ là hình cầu tâm x^0 , bán kính δ (với $\delta > 0$). Ta xét miền $\Omega^\delta = \Omega \setminus (\overline{V_{x^0}^\delta})$. Giả sử $u(x)$ là nghiệm của bài toán biên thứ nhất, tức là $\Delta u = 0$ và $u|_{\partial\Omega} = \varphi(x'), x' \in \partial\Omega$. Trong miền Ω^δ ta áp dụng công thức Green đối với hai hàm số $u(x)$ và $G(x, x^0)$:

$$\iint_{\Omega^\delta} [u \Delta G - G \Delta u] dx = \int_{\partial\Omega^\delta} \left[u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] ds$$

ở đây $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của $\partial\Omega^\delta$.

Vì $\Delta u = 0, \Delta G = 0$ nên vế trái của đẳng thức tích phân trên bằng không. Còn $\partial\Omega^\delta = \partial\Omega \cup S_{x^0}^\delta$.

Pháp tuyến ngoài của $\partial\Omega^\delta$ trên $S_{x^0}^\delta$. Vậy ta có :

$$0 = \int_{\partial\Omega^\delta} \left[u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] ds = \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] ds + \int_{S_{x^0}^\delta} \left[u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] ds$$

Trên $\partial\Omega$ hàm $G = 0, u|_{\partial\Omega} = \varphi(x'), x' \in \partial\Omega$.

Vậy ta có :

$$- \int_{S_{x^0}^\delta} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \varphi(s) ds = \int_{S_{x^0}^\delta} \left[u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] ds$$

Khi chuyển qua giới hạn ($\delta \rightarrow 0$), ứng dụng Bổ đề 2.2.4 ta có :

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \varphi(s) ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{x^0}^\delta} \left[u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right] ds = u(x^0).$$

□

2.2.2 Bài toán Dirichlê đối với hình tròn

Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, cho hình tròn tâm O bán kính đơn vị. Ta xét bài toán Dirichlê trong hình tròn

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{S_o^1} = f(s) \end{cases} \quad (2.23)$$

trong đó S_o^1 là biên của hình tròn đơn vị.

Giả sử hàm $f(s)$ liên tục trên S_o^1 . Kí hiệu s là độ dài cung của đường tròn tính từ một điểm cố định nào đó và giả sử $f(0) = f(2\pi), f \in C^2(S_o^1)$.

Ta sẽ giải bài toán này bằng phương pháp Fourier (phương pháp tách biến). Phương trình Laplace trong tọa độ cực có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.24)$$

Ta sẽ tìm nghiệm (2.24) dưới dạng:

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \neq 0 \quad (2.25)$$

Thay (2.25) vào (2.24) và tách biến, ta có

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Như vậy đối với hàm Φ ta có bài toán:

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi). \end{cases} \quad (2.27)$$

Để giải bài toán này ta xét giá trị của λ :

a) Nếu $\lambda = 0$, khi đó $\Phi = a\varphi + b$ và $\Phi(0) = b = a.2\pi + b = \Phi(2\pi)$. Từ đó suy ra $a = 0$. Vậy $\Phi(\varphi) = b$.

b) Nếu $\lambda < 0$ thì $\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\varphi}$. Vì $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ nên $C_1 = C_2 = 0$. Suy ra $\Phi \equiv 0$. Đây là nghiệm tầm thường.

c) Nếu $\lambda > 0$ thì $\Phi(\varphi) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$. Vì $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ nên $C_1 = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}2\pi)$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) = 1 \\ \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Vậy $\sqrt{\lambda}2\pi = 2n\pi$ hay $\lambda = n^2$. Do đó $\Phi_n = a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)$. Từ đó và từ (2.26) ta có:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0. \quad (2.29)$$

Phương trình này có 2 nghiệm độc lập tuyến tính $R = \rho^n$ và $R = \rho^{-n}$, nhưng vì nghiệm thứ hai tại gốc tọa độ, nên nghiệm liên tục trong hình tròn đơn vị dạng (2.25) là các hàm:

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)). \quad (2.30)$$

Trong trường hợp $\lambda = 0$ nghiệm $u_0(\rho, \varphi) = \text{const}$, ta kí hiệu nó là $\frac{a_0}{2}$. Ta thấy với a_n, b_n tùy ý, bị chặn, thì chuỗi

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \quad (2.31)$$

hội tụ tại tất cả những điểm trong của hình tròn đơn vị, vì rằng khi $\rho < 1$ chuỗi này có thể được làm trội bởi chuỗi:

$$M(1 + \rho_1 + \rho_1^2 + \cdots + \rho_1^n + \cdots) \quad (2.32)$$

ở đây $\rho < \rho_1 < 1$.

Ta có thể biểu diễn chuỗi (2.32) dưới dạng tọa độ của x và y nhờ công thức: $(x + iy)^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$;

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}[(a_n - ib_n)(x + iy)^n]. \quad (2.33)$$

Chuỗi (2.33) và các chuỗi nhận được bằng cách đạo hàm từng số hạng của chuỗi (2.33) theo x và y một số lần tùy ý, sẽ hội tụ đều với $0 \leq \rho < \rho_1 < 1$. Vì rằng các chuỗi này được làm trội bởi chuỗi (2.32) và các chuỗi nhận được từ (2.32) bằng cách vi phân theo ρ_1 . Từ đó suy ra rằng $u(x, y)$ thỏa mãn phương trình Laplace, vì mỗi số hạng của chuỗi (2.33) là một hàm điều hòa.

khi đặt $\rho = 1$ và $u(1, \varphi) = f(\varphi)$, từ (2.31) ta nhận được

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)). \quad (2.34)$$

Đẳng thức trên sẽ đúng với giả thiết đã cho đối với hàm $f(\varphi)$ và nếu a_0, a_n, b_n là các hệ số Fourier đối với hàm $f(\varphi)$:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \cos(n\varphi) d\varphi \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \sin(n\varphi) d\varphi. \end{cases} \quad (2.35)$$

Để chuỗi (2.31) với các hệ số được xác định bởi công thức (2.35) cho nghiệm của bài toán Dirichlê, còn cần phải chứng minh tính liên tục của hàm này trong hình tròn $\rho \leq 1$.

Tính liên tục của hàm $u(\rho, \varphi)$.

a) Hàm $f(s)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục. Khi $\rho \leq 1$, chuỗi (2.31) có thể làm trội bởi

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \quad (2.36)$$

Từ (2.35) lấy tích phân từng phần, ta có:

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} f'(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi + \frac{1}{n\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f''(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi - \frac{1}{n^2\pi} f'(\varphi) \cos(n\varphi) \Big|_0^{2\pi}. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (2.37)$$

Tương tự đối với b_n ta có:

$$b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (2.38)$$

Do vậy, chuỗi làm trội (2.36) hội tụ. Theo dấu hiệu Vaystraxơ, chuỗi (2.31) hội tụ đều, do đó nó liên tục khi $\rho \leq 1$.

b) Bây giờ ta xét trường hợp hàm $f(s)$ chỉ liên tục trên đường tròn $\rho = 1$. Khi đó ta xây dựng dãy hàm $f_m(s)$ khả vi liên tục hai lần, hội tụ đều về hàm $f(s)$ liên tục trên đường tròn $\rho = 1$. Giả sử u_m là nghiệm của bài toán Dirichlê tương ứng với hàm $f_m(s)$. Theo phần a) thì hàm u_m sẽ liên tục trong miền $\bar{\Omega}$. Theo Định lý 2.2.8, dãy hàm u_m sẽ hội tụ đều tới hàm điều hòa $u(x, y)$ trong Ω . Hiển nhiên, khi $\rho = 1$, $u(x, y)$ trùng với $f(s)$.

Ta chứng minh rằng khi $\rho < 1$ hàm $u(x, y)$ được thiết lập bởi chuỗi (2.31) với các hệ số xác định theo công thức (2.35).

Thật vậy với m đủ lớn và với mọi n , ta có

$$|a_n - a_n^*| \leq \varepsilon, \quad |b_n - b_n^{(m)}| \leq \varepsilon$$

ở đây $\varepsilon > 0$, tùy ý, do f_m hội tụ đều tới $f(s)$ trên hình tròn $\rho = 1$. Từ đó

$$\begin{aligned} &\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \right| = \\ &= \left| \frac{a_0 - a_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n ((a_n - a_n^{(m)}) \cos(n\varphi) + (b_n - b_n^{(m)}) \sin(n\varphi)) \right| \\ &\leq 2\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 2\varepsilon \frac{1}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Như vậy là hàm $u(x, y)$ được thiết lập bởi chuỗi (2.31) và là nghiệm của bài toán Dirichlê tương ứng với hàm biên $f(s)$.

2.2.3 Hàm Green đối với hình cầu, công thức poisson

Hàm Green trong nửa không gian

Giả sử $x^0 \in R^n, x^{0*}$ là điểm đối xứng với x^0 qua siêu phẳng R^{n-1} . Khi đó hàm Green trong nửa không gian là :

$$G(x, x^0) = \varepsilon(x, x^0) - \varepsilon(x - x^{0*}). \quad (2.39)$$

Dễ dàng kiểm tra hàm $G(x, x^0)$ là hàm Green trong nửa không gian : $\Delta G = 0$ và $G|_{R^{n-1}} = 0$.

Hàm Green đối với hình cầu Giả sử cho hình cầu tâm O bán kính $R > 0$, giả sử điểm x^0 thuộc hình cầu đó.

Ta gọi x^{0*} là điểm đối xứng với x^0 qua mặt cầu. Điểm x chạy trên mặt cầu. Kí hiệu $\rho = \overline{Ox^0}, \rho^* = \overline{Ox^{0*}}, r = \overline{x_0x}, r^* = \overline{x^{0*}x}$. Ta xét hai tam giác Ox^0x và Oxx^{0*} . Ta có góc $\widehat{x^0Ox}$ chung; $\rho\rho^* = R^2$ (do x^0 và x^{0*} đối xứng qua mặt cầu), tức là $\frac{R}{\rho} = \frac{\rho^*}{R}$ hay $\frac{\overline{Ox}}{\overline{Ox^0}} = \frac{\overline{Ox^{0*}}}{\overline{Ox}}$.

Vậy $\triangle Ox^0x \sim \triangle Oxx^{0*}$, do đó ta có

$$\frac{r^*}{r} = \frac{R}{\rho} = \frac{\rho^*}{R} \quad (2.40)$$

Khi $n > 2$, hàm Green đối với hình cầu sẽ có dạng

$$G(x, x^0) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left[\frac{1}{|x - x^0|^{n-2}} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2} \frac{1}{|x - x^{0*}|^{n-2}} \right] \quad (2.41)$$

$$\text{Khi } n = 2 : G(x, x^0) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{|x - x^0|} - \ln \frac{R}{\rho |x - x^{0*}|} \right] \quad (2.42)$$

Công thức Poatxông Ở mục 2.2.1 ta đã có công thức biểu diễn nghiệm của bài toán Dirichlê trong hình cầu V_o^R Tâm O, bán kính R.

$$u(x^0) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(s, x^0)}{\partial \vec{n}} \varphi(s) ds \quad (2.43)$$

ở đây $\partial\Omega$ là mặt cầu S_o^R tâm O, bán kính R.

Bây giờ ta xét cụ thể hơn $\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}|_{S_o^R}$

Xét trường hợp $n > 2$.

Vì trên $S_o^R : |x - x^0| = r, |x - x^{0*}| = r^*$, nên từ 2.42 ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_o^R} &= \frac{1}{\omega_n(n-2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left[\frac{1}{r^{n-2}} - \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} \cdot \frac{1}{r^{*n-2}} \right] = \\ &= \frac{-1}{\omega_n} \left[\frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{r}{\partial \vec{n}} - \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} \cdot \frac{1}{r^{*n-1}} \cdot \frac{\partial r^*}{\partial \vec{n}} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Mặt khác ta có

$$\frac{\partial r}{\partial \vec{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} \cos(\vec{x}_i, \vec{r}) \quad (2.45)$$

Nhưng $r = |x - x_0| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}$ nên

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_i^0}{r} = \cos(\vec{x}_i, \vec{r}) \quad (2.46)$$

Từ (2.45) và (2.46) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \vec{n}} &= \sum_{i=1}^n \cos(\vec{x}_i, \vec{r}) \cdot \cos(\vec{x}_i, \vec{n}) = \\ &= \cos(\vec{r}, \vec{n}) = \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.47)$$

ở đây ta kí hiệu góc $(\vec{r}, \vec{n})$ là α .

Tương tự với kí hiệu góc $(\vec{r}^*, \vec{n}) = \alpha^*$, ta có:

$$\frac{\partial r^*}{\partial \vec{n}} = \cos \alpha^* \quad (2.48)$$

Vậy, từ (2.44), (2.47) và (2.48) ta có :

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_o^R} = \frac{-1}{\omega_n} \left[\frac{1}{r^{n-1}} \cdot \cos \alpha - \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} \cdot \frac{1}{r^{*n-1}} \cdot \cos \alpha^* \right] \quad (2.49)$$

Ta xét $\triangle Oxx^0$ và $\triangle Oxx^{0*}$. Theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr} \quad \cos \alpha^* = \frac{R^2 + r^{*2} - \rho^{*2}}{2Rr^*}. \quad (2.50)$$

Từ đó ta có :

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \big|_{S_o^R} = \frac{-1}{\omega_n} \left[\frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr} - \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} \cdot \frac{1}{r^{*n-1}} \cdot \frac{R^2 + r^{*2} - \rho^{*2}}{2Rr^*} \right] \quad (2.51)$$

Từ quan hệ (2.40) ta có : $r^* = \frac{Rr}{\rho}, \rho^* = \frac{R^2}{\rho}$. Từ đó ta có :

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \big|_{S_o^R} = \frac{-1}{\omega_n} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^n} \quad (2.52)$$

hoặc

$$= \frac{-1}{\omega_n R^{n-1}} \cdot \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{r^n} \quad (2.53)$$

Vậy nghiệm của bài toán Dirrichlê trong hình cầu có dạng :

$$u(x^0) = - \int_{S_o^R} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \varphi(s) ds = \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R} \int_{S_o^R} \frac{\varphi(s) ds}{r^n} \quad (2.54)$$

hoặc

$$u(x^0) = \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{|S_o^R|} \int_{S_o^R} \frac{\varphi(s) ds}{r^n} \quad (2.55)$$

Công thức (2.54)(hoặc (2.55)) được gọi là công thức Poatxông. Còn hàm số sau được gọi là nhân Poatxông :

$$P(x^0, x) = \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R r^n} \quad (2.56)$$

Vậy công thức (2.54) còn được viết

$$u(x^0) = \int_{S_o^R} P(x^0, s) \varphi(s) ds. \quad (2.57)$$

Tính chất của nhân Poatông

$$P(x^0, x) > 0, \forall x^0 \in V_0^R, \forall x \in S_0^R. \quad (2.58)$$

$$\int_{S_o^R} P(x^0, s) ds = 1. \quad (2.59)$$

$$\Delta_{x^0} P(x^0, x) = 0. \quad (2.60)$$

Chứng minh. i) Hiển nhiên vì $x^0 \in V_o^R$ nên $R > \rho$.

ii) Ta thấy bài toán Dirichlê sau đây trong V_o^R :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{S_o^R} = 1 \end{cases} \text{ có nghiệm } u \equiv 1. \text{ Theo công thức (2.55) ta có } \forall x^0 \in V_o^R :$$

$$u(x^0) = 1 = \int_{S_o^R} P(x^0, s) \varphi(s) ds = \int_{S_o^R} P(x^0, s) ds.$$

iii) Trước hết ta chứng minh tính đối xứng của hàm Green trong miền Ω cho trước; tức là $\forall x^1, x^2 \in \Omega$ ta có $G(x^1, x^2) = G(x^2, x^1)$. vì x^1, x^2 là các điểm trong của Ω nên $\exists \delta > 0$ đủ nhỏ để $V_{x^1}^\delta \subset \Omega$ và $V_{x^2}^\delta \subset \Omega$.

Ta xét $\Omega^{\delta\delta} = \Omega \setminus (\overline{V_{x^1}^\delta} \cup \overline{V_{x^2}^\delta})$.

Áp dụng công thức Green đối với hai hàm $G(x^1, x)$ và $G(x^2, x)$ trong miền $\Omega^{\delta\delta}$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^{\delta\delta}} [G(x^1, x) \Delta G(x^2, x) - G(x^2, x) \Delta G(x^1, x)] dx = \\ = \int_{\partial\Omega^{\delta\delta}} \left[G(x^1, s) \frac{\partial G(x^2, s)}{\partial \vec{n}} - G(x^2, s) \frac{\partial G(x^1, s)}{\partial \vec{n}} \right] ds. \end{aligned}$$

Vì trong $\Omega^{\delta\delta}$ các hàm $G(x^1, x), G(x^2, x)$ điều hòa nên ta có vế trái của đẳng thức trên bằng không. Còn vế phải tách thành 3 tích phân, vì $\partial\Omega^{\delta\delta} = \partial\Omega \cup S_{x^1}^\delta \cup S_{x^2}^\delta$.

Sau đó sử dụng bổ đề 2.2.4 ta có kết quả :

$$G(x^1, x^2) = G(x^2, x^1).$$

Bây giờ ta chứng minh tính chất iii). Ta có :

$$\Delta_{x^0} P(x^0, x) = \Delta_{x^0} \left(-\frac{\partial G(x^0, x)}{\partial \vec{n}} \right) = -\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Delta_{x^0} G(x^0, x) = -\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \Delta_{x^0} G(x, x^0) = 0.$$

Tính chất iii) được chứng minh. $\square$

Hàm được biểu diễn bằng công thức Poatxông là nghiệm của bài toán Dirichlê trong hình cầu V_o^R .

Thật vậy, $\forall x^0 \in V_o^R$ ta có :

$$u(x^0) = \int_{S_o^R} P(x^0, s) \varphi(s) ds.$$

Tác động toán tử Laplace vào hai vế theo biến x^0 , ta có :

$$\Delta_{x^0} u(x^0) = \Delta_{x^0} \int_{S_o^R} P(x^0, s) \varphi(s) ds = \int_{S_o^R} \Delta_{x^0} P(x^0, s) \varphi(s) ds$$

Theo tính chất iii) của nhân Poatxông ta có :

$$\Delta_{x^0} u(x^0) = 0$$

Bây giờ ta cần chứng minh rằng $\forall x' \in S_o^R$ ta có :

$$\lim_{x^0 \rightarrow x'} u(x^0) = \varphi(x').$$

Thật vậy, theo tính chất ii) của nhân Poatxông ta có :

$$\varphi(x') = \int_{S_o^R} P(x^0, s) \varphi(x') ds$$

Vậy:

$$u(x^0) - \varphi(x') = \int_{S_o^R} P(x^0, s) [\varphi(s) - \varphi(x')] ds$$

Cho $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, vì hàm $\varphi(s)$ liên tục nên $\exists \delta > 0$ sao cho $|s - x'| < \delta \Rightarrow |\varphi(s) - \varphi(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vì vậy ta tách tích phân trên thành hai tích phân :

$$\begin{aligned} |u(x^0) - \varphi(x')| &\leq \int_{S_o^R \setminus V_{x'}^\delta} P(x^0, s) |\varphi(s) - \varphi(x')| ds + \\ &\quad + \int_{S_o^R \cap V_{x'}^\delta} P(x^0, s) |\varphi(s) - \varphi(x')| ds. \end{aligned}$$

Tích phân thứ 2 ở vế phải của bất đẳng thức được đánh giá như sau:

$$\int_{S_o^R \cap V_{x'}^\delta} P(x^0, s) |\varphi(s) - \varphi(x')| ds < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.61)$$

Còn tích phân thứ nhất được đánh giá :

$$\begin{aligned} \int_{S_o^R \setminus V_x^\delta} P(x^0, s) |\varphi(s) - \varphi(x')| ds &\leq \\ &\leq \frac{R^{n-2}}{|S_o^R|} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{\delta^n} \cdot \int_{S_o^R} |\varphi(s) - \varphi(x')| ds < \frac{2MR^{n-2}}{\delta^n} (R^2 - \rho^2) \end{aligned}$$

Vì $\varphi(s)$ liên tục nên bị chặn, giả sử :

$$|\varphi(s)| < M.$$

Khi $x^0 \rightarrow x'$ ta có $R^2 - \rho^2 \rightarrow 0$, tức là : $\exists \delta_1 > 0$ sao cho
 $|x^0 - x'| < \delta_1$ ta có :

$$|R^2 - \rho^2| < \frac{\varepsilon \cdot \delta^n}{2MR^{n-2}}$$

Từ đó ta có :

$$\int_{S_o^R \setminus V_x^\delta} P(x^0, s) |\varphi(s) - \varphi(x')| ds < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.62)$$

Từ (2.61) và (2.62) suy ra

$$|u(x^0) - \varphi(x')| < \varepsilon \text{ chỉ cần } |x^0 - x'| < \delta.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x^0 \rightarrow x'} u(x^0) = \varphi(x').$$

Hệ quả

Hàm $u(x)$ điều hòa trong hình cầu thì giá trị tại tâm hình cầu bằng giá trị trung bình của nó trên mặt cầu, tức là :

$$u(x^0) = \frac{1}{|S_o^R|} \int_{S_o^R} u(s^*) ds^*$$

Với $|S_{x^0}^R|$ là diện tích mặt cầu $S_{x^0}^R$.

Chứng minh được suy ra từ công thức Poatxông.

2.2.4 Các tính chất của hàm điều hòa

Nguyên lí cực trị

Định lí 2.2.6. Cho Ω là miền bị chặn trong R^n . Nếu hàm điều hòa trong miền Ω , liên tục trong miền $\overline{\Omega}$, đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất tại một điểm trong của miền Ω , thì hàm đó phải là hằng số.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh cho trường hợp đạt giá trị lớn nhất, trường hợp đạt giá trị nhỏ nhất sẽ được làm tương tự.

Giả sử $x^0 \in \Omega$ sao cho $u(x^0) = \max_{x \in \Omega} u(x)$.

Vì $x^0 \in \Omega$ nên tồn tại $r > 0$ để $V_{x^0}^r \subset \Omega$.

a) Ta sẽ chứng minh $\forall x \in S_{x^0}^r : u(x) = u(x^0)$.

Thật vậy, giả sử $u(x) \neq u(x^0)$ khi đó $\exists x^1 \in S_{x^0}^r$ để $u(x^1) < u(x^0)$.

Vì $u(x)$ liên tục trên Ω nên tồn tại lân cận $\sigma(x^1)$ của x^1 để

$\forall x \in \sigma(x^1)$ ta có $u(x) < u(x^0)$. Ta kí hiệu $\overline{\sigma} = \sigma(x^1) \cap S_{x^0}^r$.

Theo hệ quả của công thức Poatxông ta có :

$$\begin{aligned} u(x^0) &= \frac{1}{|S_{x^0}^r|} \int_{S_{x^0}^r} u(s) ds = \frac{1}{|S_{x^0}^r|} \left[\int_{S_{x^0}^r \setminus \overline{\sigma}} u(s) ds + \int_{\overline{\sigma}} u(s) ds \right] < \\ &< \frac{1}{|S_{x^0}^r|} \left[\int_{S_{x^0}^r \setminus \overline{\sigma}} u(x^0) ds + \int_{\overline{\sigma}} u(x^0) ds \right] = u(x^0). \end{aligned}$$

Điều đó vô lí. Vậy $u(x) = u(x^0), \forall x \in S_{x^0}^r$. Với mọi $r' \in (0, r)$, lặp lại lí luận trên ta có $u(x) = u(x^0), \forall x \in S_{x^0}^{r'}$. Vậy suy ra $u(x) = u(x^0), \forall x \in \overline{V_{x^0}^r}$.

b) Bây giờ ta sẽ chứng minh $\forall x \in \Omega$ thì $u(x) = u(x^0)$.

Thật vậy, $\forall x^* \in \Omega$, ta nối x^0 và x^* bởi đường gấp khúc l nằm trọn trong Ω . Ta gọi $\delta = \text{dist}(l, \partial\Omega)(*)$. Các hình cầu tâm nằm trên l , bán kính $r_1 = \frac{\delta}{2}$ sẽ nằm trọn trong Ω .

Theo chứng minh phần a) ta có :

$$u(x) = u(x^0), \forall x \in \overline{V_{x^0}^{r_1}}.$$

Gọi $x^1 = S_{x^0}^{r_1} \cap l_{x^0 x^*}$, ta có $u(x^1) = u(x^0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$.

Theo a) ta có $u(x) = u(x^1), \forall x \in \overline{V_{x^1}^{r_1}}$.

Gọi $x^2 = S_{x^1}^{r_1} \cap l_{x^1 x^*}$, ta có $u(x^2) = u(x^1) = u(x^0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$.

Theo a) ta có $u(x) = u(x^2), \forall x \in \overline{V_{x^2}^{r_1}}$

Bằng quy nạp, sau n bước ta sẽ có $x^* \in V_{x^n}^{r_1}$ và $\forall x \in V_{x^n}^{r_1}$:
 $u(x) = u(x^n) = u(x^{n-1}) = \dots = u(x^0)$.

Vậy $u(x^*) = u(x^0)$, vì x^* bất kì thuộc Ω , nên ta có $u(x) = u(x^0), \forall x \in \Omega$.

□

Nhận xét 2.2.7. . Đối với hàm liên tục trên $\overline{\Omega}$ và thỏa mãn : giá trị tại tâm hình cầu bằng giá trị trung bình của hàm đó trên mặt cầu, thì nguyên lí cực trị còn đúng.

Hệ quả a) Hàm điều hòa trong miền bị chặn Ω , liên tục trên $\overline{\Omega}$, nếu khác hằng số thì sẽ nhận giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên biên $\partial\Omega$. Khi đó ta có : $\min_{x \in \partial\Omega} u(x) \leq u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

Hệ quả này dễ dàng suy ra từ nguyên lí cực trị.

b) Nghiệm của bài toán Dirichlê sau đây là duy nhất :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x'), x' \in \partial\Omega \end{cases}$$

Thật vậy, giả sử có 2 hàm u_1, u_2 là nghiệm của bài toán. Khi đó, hàm $v = u_1 - u_2$ sẽ là hàm điều hòa và nhận giá trị biên đồng nhất bằng không, theo nguyên lí cực trị thì $v = 0$ hay $u_1 = u_2$.

c) Nghiệm của bài toán Dirichlê phụ thuộc liên tục vào giá trị biên.

Thật vậy, giả sử rằng u_1 và u_2 là nghiệm của bài toán Dirichlê trong miền Ω nào đó với các giá trị biên φ_1 và φ_2 tương ứng sao cho khắp nơi trên biên $\partial\Omega$, $|\varphi_1 - \varphi_2| < \varepsilon$. Khi đó giá trị biên của hàm điều hòa $u_1 - u_2$ hiển nhiên là $\varphi_1 - \varphi_2$ thỏa mãn điều kiện :

$$-\varepsilon < \varphi_1 - \varphi_2 < \varepsilon.$$

Từ nguyên lí cực trị suy ra khắp nơi trong Ω

$$-\varepsilon < u_1 - u_2 < \varepsilon. \square$$

Định lí 2.2.8. (Về dãy hội tụ đều các hàm điều hòa) Nếu dãy hàm $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ điều hòa trong miền Ω và liên tục trên $\bar{\Omega}$, hội tụ đều trên biên $\partial\Omega$, thì nó hội tụ đều trong miền Ω . Khi đó hàm giới hạn sẽ điều hòa trong Ω .

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh dãy $u_k(x)$ hội tụ đều trong Ω tới hàm $u(x)$ nào đó. Sau đó ta sẽ chứng minh $u(x)$ điều hòa trong Ω .

Giả sử dãy $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ nhận dãy các giá trị biên tương ứng $\varphi_k(x')$, $x' \in \partial\Omega$. Theo giả thiết dãy φ_k hội tụ đều trên biên $\partial\Omega$. Theo tiêu chuẩn Côsi đối với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $N > 0$, sao cho với mọi $n, m > N$, khắp nơi trên $\partial\Omega$ ta có : $|\varphi_n - \varphi_m| < \varepsilon$. Nhưng theo nguyên lí cực trị trên biên của hàm điều hòa, ta suy ra $|u_n - u_m| < \varepsilon$ khắp nơi trong Ω . Trên cơ sở tiêu chuẩn Côsi ta kết luận rằng dãy $\{u_k\}$ hội tụ đều trong $\bar{\Omega}$ tới một hàm $u(x)$ nào đó.

Bây giờ ta còn phải chứng minh $u(x)$ điều hòa trong Ω . Theo định lí về biểu diễn hàm điều hòa (bài 1 ch.II), đối với mỗi k và với mọi $x^0 \in \Omega$, ta có :

$$u_k(x^0) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x^0, x') \varphi_k(x') dx'.$$

Do $\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x^0, x')$ liên tục trên $\partial\Omega$, khi chuyển qua giới hạn với $k \rightarrow \infty$, ta có :

$$u(x^0) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x^0, x')}{\partial \vec{n}} \varphi_k(x') dx'.$$

Từ đây dễ dàng suy ra $u(x)$ điều hòa trong Ω . □

Định lí 2.2.9. Nếu hàm $u(x)$ điều hòa trong miền bị chặn Ω , khả vi liên tục trên $\bar{\Omega}$ thì $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = 0$.

Chứng minh. Chọn $v \equiv 1$ và sử dụng công thức Green đối với hai hàm u, v trong Ω :

$$\iint_{\Omega} [u\Delta v - v\Delta u] dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) ds,$$

vì $\Delta u \equiv 0, \Delta v \equiv 0$ nên về phải bằng không, còn về trái thì do $\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} = 0$, nên ta có : $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} ds = 0$. $\square$

Định lí 2.2.10. Nếu hàm điều hòa $u(x)$ không đổi dấu dương (hoặc âm) trong toàn không gian sẽ là hằng số.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh cho trường hợp $u(x) > 0$ còn trường hợp $u(x) < 0$ thì ta chỉ cần đặt $v = -u(x)$ và áp dụng trường hợp trên.

Giả sử $x^0, x \in R^n$. Khi đó tồn tại $R > 0$ sao cho hình cầu tâm x^0 , bán kính R , kí hiệu là $V_{x^0}^R$ chứa điểm x .

Ta đặt $\rho = \text{dist}(x^0, x)$ (dist là khoảng cách từ x^0 đến x),
 $r = \text{dist}(x, x')$, $x' \in S_{x^0}^R$.

Trong tam giác x^0xx' , ta có :

$$0 < R - \rho \leq r \leq R + \rho.$$

Từ đó ta suy ra :

$$\frac{1}{R + \rho} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{R - \rho}$$

hay:

$$\frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{|S|} \cdot \frac{u(x')}{(R + \rho)^n} \leq \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{|S|} \cdot \frac{u(x')}{r^n} \leq \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{|S|} \cdot \frac{u(x')}{(R - \rho)^n}$$

ở đây $|S|$ là diện tích mặt cầu $S_{x^0}^R$. Từ đó sau khi rút gọn và lấy tích phân trên $S_{x^0}^R$, ta có :

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{R + \rho}\right)^{n-2} \cdot \frac{(R - \rho)}{|S|(R + \rho)} \int_{S_{x^0}^R} u(x') dx' &\leq \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{|S|} \int_{S_{x^0}^R} \frac{u(x')}{r^n} dx' \\ &\leq \left(\frac{R}{R - \rho}\right)^{n-2} \cdot \frac{R + \rho}{R - \rho} \cdot \frac{1}{|S|} \int_{S_{x^0}^R} u(x') dx'. \end{aligned}$$

Theo hệ quả của công thức Poatxông ở 2.16, ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(\frac{R}{R + \rho}\right)^{n-2} \cdot \frac{R - \rho}{R + \rho} \cdot u(x^0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R - \rho}\right)^{n-2} \cdot \frac{R + \rho}{R - \rho} \cdot u(x^0) \quad (2.63)$$

Chuyển qua giới hạn bất đẳng thức trên, khi cho $R \rightarrow \infty$, ta có : $u(x) = u(x^0)$.

Vì x là bất kì nên định lí được chứng minh. $\square$

Sau đây ta sẽ giới thiệu một số định lí mà không chứng minh.

Định lí 2.2.11. (Về dãy đơn điệu các hàm điều hòa) Nếu dãy các hàm điều hòa trong miền Ω , $u_n(x)$ hội tụ tại một điểm trong x^0 của Ω và với n bất kì :

$$u_{n+1}(x) \geq u_n(x), \forall x \in \Omega$$

thì dãy $u_n(x)$ khắp nơi trong miền Ω hội tụ tới hàm điều hòa $u(x)$ nào đó. Khi đó trong miền con đóng bị chặn bất kì của Ω , sự hội tụ sẽ là đều.

Định lí 2.2.12. Nếu hàm $u(x)$ điều hòa trong miền Ω thì giải tích trong miền đó.

Định lí 2.2.13. (Về đánh giá đạo hàm của các hàm điều hòa) Giả sử cho một họ các hàm điều hòa bị chặn đều trong miền Ω . Khi đó trong bất kì miền con $\Omega' \subset \Omega$ các đạo hàm của tất cả các hàm của họ bị chặn đều.

Định lí 2.2.14. Về tính compact của họ các hàm điều hòa bị chặn đều) Từ một họ vô hạn các hàm điều hòa bị chặn đều trong miền Ω , có thể trích ra một dãy con vô hạn hội tụ đều trong miền con bị chặn bất kì $\Omega' \subset \Omega$.

Sự khẳng định này suy ra từ định lí Acxela, vì theo định lí 2.2.13 họ các hàm này liên tục đồng bậc trong Ω' .

Định lí 2.2.15. (định lí Liuvin) Hàm $u(x, y)$ điều hòa trong toàn bộ mặt phẳng không thể có cận trên hay cận dưới nếu nó khác hằng số.

Từ các định lí 2.2.11 đến 2.2.15 độc giả có thể tham khảo trong cuốn sách của Pêtrôpxki (Petrovski).

Bài tập

Bài 1. Ký hiệu

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

$$\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad \overline{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Tìm hàm $u \in C(\overline{\Omega})$ thỏa mãn

a)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = x \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 3x^3 + 2x^2y + 5y^3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 3 - 4y^2 - 4xy^2 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} \Delta u = x, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} \Delta u = 2x, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = x - x^3 + 2xy^2 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} \Delta u = 12(x^2 + y^2), & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = xy \end{cases}$$

Bài 2. Ký hiệu

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\},$$

$$\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}, \quad \overline{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Tìm hàm $u \in C(\overline{\Omega})$ thỏa mãn

a)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 3 - 4y^2 - 4xy^2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 3x^3 + 2x^2y + 5y^3 \end{cases}$$

Bài 3. Ký hiệu

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2x < 0\},$$

$$\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2x = 0\}, \quad \overline{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2x \leq 0\}.$$

Tìm hàm $u \in C(\overline{\Omega})$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 4x^3 + 6x - 1 \end{cases}$$

2.3 Phương trình hypecbôlic

2.3.1 Bài toán hỗn hợp

Xét phương trình dao động nhỏ, ngang của sợi dây

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.64)$$

với điều kiện biên

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (2.65)$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \quad (2.66)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (2.67)$$

trong đó φ và ψ là hai hàm cho trước. Các điều kiện (2.66) và (2.67) phải phù hợp với điều kiện (2.65) trong đoạn $[0, l]$.

Nếu một đầu của sợi dây chuyển động theo một quy luật thì điều kiện biên có dạng

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \quad (2.68)$$

trong đó $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ được cho trước.

Điều kiện biên cũng có thể có hình thức khác. Chẳng hạn một đầu sợi dây cố định, cho $x = 0$ và đầu kia tự do thì

$$u(0, t) = 0 \quad (2.69)$$

và đầu tự do căng thẳng đàn hồi:

$$T(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$$

hay

$$u_x(l, t) = 0. \quad (2.70)$$

Nếu tại $x = 0$ sợi dây dao động với một quy luật nhất định $\mu(t)$, trong khi tại $x = l$ tác động một lực $\bar{v}(t)$ thì:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \nu(t) \quad , \quad \nu(t) = \frac{\bar{v}}{k}$$

Một dạng khác của điều kiện biên là

$$u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \theta(t)] \quad (2.71)$$

Do đó, chúng ta có các loại điều kiện biên sau

+ Điều kiện biên loại I: $u(0, t) = \mu(t)$

+ Điều kiện biên loại II: $u_x(0, t) = \nu(t)$

+ Điều kiện biên loại III: $u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$.

Nếu khoảng thời gian nhỏ thì điều kiện biên không ảnh hưởng nhiều đến sự dao động của dây. Vì vậy, chúng ta có thể xem bài toán như trường hợp giới hạn cho bài toán giá trị ban đầu trong miền không bị chặn.

Tìm nghiệm của phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (2.72)$$

với tỷ số dẫn nở ban đầu

$$u(x, t) |_{t=0} = \varphi(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad (2.73)$$

và vận tốc ban đầu

$$u_t(x, t) |_{t=0} = \psi(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.74)$$

Đây là bài toán Cauchy của phương trình hyperbolic.

Nếu chúng ta muốn nghiên cứu dáng điệu gần một đầu của một sợi dây với một giả định, ảnh hưởng của điều kiện biên là nhỏ thì ta có

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0 \quad (2.75)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (2.76)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \infty. \quad (2.77)$$

Đối với một quá trình chuyển động cụ thể, chúng ta phải tìm điều kiện biên thích hợp với nó.

Định lí 2.3.1. (Tính duy nhất nghiệm của bài toán hỗn hợp) *Phương trình vi phân đạo hàm riêng*

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (2.78)$$

có không quá một nghiệm thỏa mãn điều kiện giá trị biên và các điều kiện ban đầu

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}u(0, t) &= \mu_1(t), \\u(l, t) &= \mu_2(t).\end{aligned}$$

Ở đây chúng ta giả sử rằng hàm $u(x, t)$ và đạo hàm cấp một, cấp hai của nó liên tục trong khoảng $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ và $\rho(x) > 0$, $k(x) > 0$ là liên tục, cho trước.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó:

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

thỏa mãn phương trình đồng nhất

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.80)$$

và điều kiện thuần nhất

$$\begin{cases} v(x, 0) = 0, \\ v_t(x, 0) = 0, \\ v(0, t) = 0, \\ v(l, t) = 0. \end{cases} \quad (2.81)$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng với điều kiện (2.81) thì $v(x, t)$ đồng nhất bằng 0. Thật vậy, xét hàm

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l (k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2) dx. \quad (2.82)$$

Hàm $E(t)$ có ý nghĩa vật lý, nó là tổng năng lượng của sợi dây tại thời điểm t . Vì $v(x, t)$ là hàm khả vi liên tục hai lần nên ta có thể lấy vi phân hàm $E(t)$ và thu được

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}) dx. \quad (2.83)$$

Từ $v(0, t) = 0$, $v(l, t) = 0$ suy ra $v_t(0, t) = 0$ và $v_t(l, t) = 0$. Do đó, ta có

$$\int_0^l kv_x v_{xt} dx = kv_x v_t \Big|_0^l - \int_0^l v_t (kv_x)_x dx = - \int_0^l v_t (kv_x)_x dx. \quad (2.84)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [\rho v_t v_{tt} - v_t (kv_x)_x] dx = \int_0^l [\rho v_{tt} - (kv_x)_x] v_t dx = 0.$$

Nghĩa là, $E(t) = \text{const}$. Hơn nữa, từ $v(x, 0) = 0$, $v_t(x, 0) = 0$ ta có

$$E(t) = \text{const} = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2] |_{t=0} dx = 0 \quad (2.85)$$

Mặt khác, hàm $\rho(x)$ và $k(x)$ dương. Từ (2.83) và (2.85), ta có

$$v_x(x, t) \equiv 0, \quad v_t(x, t) \equiv 0.$$

Do đó $v(x, t) = \text{const} = v(x, 0) \equiv 0$.

Kết quả này vẫn đúng đối với điều kiện biên loại II, trong đó:

$$u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(l, t) = \mu_2(t)$$

bởi vì $v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0$.

Chúng minh cho trường hợp bài toán giá trị biên loại III

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = \mu_1(0, t), \quad h_1 \geq 0,$$

$$u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = \mu_2(0, t), \quad h_2 \geq 0$$

có sự khác biệt. Trong trường hợp này

$$v_x(0, t) - h_1 v(0, t) = 0,$$

$$v_x(l, t) + h_2 v(l, t) = 0,$$

và kết hợp (2.84) ta có

$$kv_x v_t |_0^l = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} [h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)].$$

Lấy tích phân $\frac{dE}{dt}$ từ 0 đến t ta được

$$\begin{aligned} E(t) - E(0) &= \int_0^t \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x] dx dt \\ &\quad - \frac{k}{2} (h_2 [v^2(l, t) - v^2(l, 0)] + h_1 [v^2(0, t) - v^2(0, 0)]) . \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l (kv_x^2 + \rho v_t^2) |_{t=0} dx = 0$$

và $v(0, l) = v(0, 0) = 0$. Do đó $E(t) = -\frac{k}{2} (h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)) \leq 0$.

Mặt khác $E(t) \geq 0$ suy ra $E(t) \equiv 0$. Từ đó suy ra $v(x, t) \equiv 0$. □

Tiếp theo, chúng ta sẽ giải bài toán thuần nhất

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.86)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.87)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.88)$$

Chúng ta tìm nghiệm của bài toán (2.89)-(2.88) thông qua tổng hợp những nghiệm đặc biệt với hệ số thích hợp. Với mục đích này chúng ta xét bài toán bổ trợ: Tìm một nghiệm không tầm thường của bài toán:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.89)$$

thỏa mãn điều kiện biên thuần nhất:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (2.90)$$

và có dạng

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.91)$$

trong đó X chỉ phụ thuộc vào x và T chỉ phụ thuộc vào t .

Thế (2.91) vào (2.89) ta được

$$X''T = \frac{1}{a^2}T''X \quad (2.92)$$

Chia hai vế của phương trình (2.92) cho XT ta được:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (2.93)$$

Hàm $u(x, t)$ được xác định bởi (2.91) là một nghiệm của bài toán (2.89) nếu (2.92) hoặc (2.93) được thỏa mãn.

Vế phải của (2.93) chỉ phụ thuộc vào t , trong khi đó vế phải chỉ phụ thuộc vào x nên phương trình (2.93) phải bằng hằng số, giả sử bằng $-\lambda$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (2.94)$$

ở đây, chúng ta đặt dấu trừ trước λ để thuận tiện cho việc tính toán.

Từ (2.94) chúng ta có được hai phương trình khác biệt đối với X và T .

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.95)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (2.96)$$

Từ điều kiện giá trị biên (2.90), ta có

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad (2.97)$$

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0. \quad (2.98)$$

Suy ra

$$X(0) = X(l) = 0 \quad (2.99)$$

vì nếu (2.99) không được thỏa mãn thì $T(t) \equiv 0$ và $u(x, t) \equiv 0$ là nghiệm tầm thường của bài toán. Do đó, ta có được bài toán giá trị riêng: Tìm λ sao cho tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (2.100)$$

và tìm những nghiệm tương ứng với những giá trị λ , λ (nghiệm không tầm thường) được gọi là giá trị riêng và tương ứng những nghiệm của λ được gọi là vectơ riêng. Sau đây, chúng ta có ba trường hợp:

1. Nếu $\lambda < 0$ bài toán có nghiệm tầm thường. Nghiệm tổng quát của (2.100) có dạng

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}. \quad (2.101)$$

Nghiệm này phải thỏa mãn điều kiện biên

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad (2.102)$$

$$X(l) = C_1 e^{l\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-l\sqrt{-\lambda}} = 0. \quad (2.103)$$

Do đó $C_1 = -C_2$ và $C_1 (e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}}) = 0$. Vì $\lambda < 0$ nên $\sqrt{-\lambda}$ là dương, suy ra $e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}} \neq 0$. Do đó $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ và $X(x) \equiv 0$.

2. Nếu $\lambda = 0$ thì nghiệm tổng quát có dạng

$$X(x) = ax + b. \quad (2.104)$$

Từ điều kiện biên ta có

$$X(0) = [ax + b]_{x=0} = b = 0 \quad (2.105)$$

$$X(l) = al = 0. \quad (2.106)$$

Do đó $a = 0$, $b = 0$ và $X(x) \equiv 0$.

3. Nếu $\lambda > 0$, nghiệm tổng quát có dạng:

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda}x + D_2 \sin \sqrt{\lambda}x. \quad (2.107)$$

Từ điều kiện biên ta có

$$X(0) = D_1 = 0, \quad (2.108)$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \quad (2.109)$$

Vì $X(x)$ là nghiệm không tầm thường nên $D_2 \neq 0$. Do đó:

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \quad (2.110)$$

hay $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Vì vậy, nghiệm không tầm thường là

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.111)$$

Tương ứng với những giá trị riêng ta có hàm riêng

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.112)$$

Vì thế, với những giá trị λ mà

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2.113)$$

tồn tại nghiệm không tầm thường

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.114)$$

Nghiệm của phương trình (2.96) tương ứng là

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \quad (2.115)$$

trong đó A_n và B_n được xác định. Rõ ràng, hàm

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.116)$$

là nghiệm đặc biệt của (2.89) thỏa mãn điều kiện biên (2.90). Vì (2.89) là tuyến tính, thuần nhất nên ta xét hàm $u(x, t)$ có dạng

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.117)$$

Từ điều kiện ban đầu có

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.118)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.119)$$

Nếu φ và ψ là hai hàm khả vi liên tục thì

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \quad (2.120)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (2.121)$$

Từ (2.118), (2.119), (2.120), (2.121) ta có

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n. \quad (2.122)$$

Do đó, $u(x, t)$ được xác định bởi (2.117) là hoàn toàn xác định.

Trước tiên, ta chứng minh tính liên tục của hàm

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.123)$$

khi $|u_n(x, t)| \leq |A_n| + |B_n|$.

Nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \quad (2.124)$$

hội tụ thì chuỗi (2.123) hội tụ đều và $u(x, t)$ liên tục. Tương tự để chứng minh tính liên tục của $u_t(x, t)$ ta chứng minh chuỗi

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l} \left(-A_n \sin \frac{\pi n}{l} at + B_n \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.125)$$

hội tụ đều hoặc chuỗi sau hội tụ

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|).$$

Chúng ta sẽ chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = - \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Tương ứng các chuỗi sau hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|) \quad (2.126)$$

khi $A_n = \varphi_n$, $B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n$ trong đó

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Ta sẽ hoàn thành chứng minh nếu ta chứng minh được các chuỗi sau hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k = 0, 1, 2) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k = -1, 0, 1) \quad (2.127)$$

Kết quả sau từ lý thuyết chuỗi Fourier.

Cho F là hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$, mở rộng F để F là chuỗi Fourier

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Nếu $F(x)$ là hàm lẻ thì $a_n = 0$ và

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

với

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Nếu $F(x)$ chỉ xác định trong $(0, l)$ thì ta mở rộng để $F(x)$ xác định trong $(-l, l)$. Ta biết rằng, nếu $F \in C^k$ và $F^{(k)}$ liên tục thì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|)$$

hội tụ.

Từ những kết quả trên chúng ta rút ra kết luận:

1. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|$ ($k = 0, 1, 2$) hội tụ khi $\varphi \in C^2$, $\varphi^{(3)}$ liên tục từng khúc và

$$\varphi(0) = \varphi(l), \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \quad (2.128)$$

2. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|$ ($k = -1, 0, 1$) hội tụ khi ψ khả vi liên tục, có đạo hàm cấp hai liên tục từng khúc và

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (2.129)$$

Với những điều kiện này, $u(x, t)$ được xác định bởi (2.117) là một nghiệm của bài toán (2.89)-(2.90) và nghiệm này là duy nhất.

Tiếp theo, ta xét phương trình hyperbolic không thuần nhất

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.130)$$

với điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.131)$$

và điều kiện giá trị biên thuần nhất

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.132)$$

Ta sẽ tìm nghiệm của bài toán (2.130)-(2.132) có dạng

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.133)$$

trong đó $u_n(t)$ sẽ được xác định sau. Với mục đích này, ta khai triển f, φ, ψ theo chuỗi Fourier

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (2.134)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Thế (2.133) vào (2.130), ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \left(-a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right) = 0.$$

Do đó

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (2.135)$$

Mặt khác

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Suy ra

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad \dot{u}_n(0) = \psi_n. \quad (2.136)$$

Do đó, ta có thể tìm $u_n(t)$ có dạng

$$u_n(t) = u_n^{(I)}(t) + u_n^{(II)}(t),$$

trong đó

$$u_n^{(I)}(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \left(\frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \right) f_n(\tau) d\tau \quad (2.137)$$

$$u_n^{(II)}(t) = \varphi_n \cos \left(\frac{\pi n}{l} a t \right) + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} a t \right). \quad (2.138)$$

Ta có

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \left(\frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau) d\tau$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} a t + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} a t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.139)$$

$$:= u^{(I)}(x, t) + u^{(II)}(x, t). \quad (2.140)$$

Thế (2.134) vào $f_n(t)$, chúng ta biểu diễn $u^{(I)}(t)$ dưới dạng

$$\begin{aligned} u^{(I)}(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &:= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (2.141)$$

trong đó

$$G(x, \xi, t - \tau) := \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (2.142)$$

Xét bài toán

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.4.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (2.143)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0. \quad (2.144)$$

Để tìm nghiệm của bài toán này chúng ta sẽ tìm một hàm U khả vi sao cho

$$U(0, t) = \mu_1(t), \quad U(l, t) = \mu_2(t) \quad (2.145)$$

và tìm một phương trình dạng (2.4.1) mà $U(x, t)$ là nghiệm. Dễ thấy

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \quad (2.146)$$

thỏa mãn (2.145) và phương trình

$$\begin{aligned} U_{tt} &= a^2 U_{xx} + \ddot{\mu}_1(t) + \frac{x}{l} [\ddot{\mu}_2(t) - \ddot{\mu}_1(t)] \\ &= a^2 U_{xx} + \bar{f}(x, t). \end{aligned} \quad (2.147)$$

Xét bài toán

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx} + f - \bar{f}, \\ v(x, 0) &= \varphi(x) - U(x, 0), \\ v_t(x, 0) &= \psi(x) - U_t(x, 0) \\ v(0, t) &= 0, \quad v(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Rõ ràng, ta có thể tìm $v(x, t)$ có dạng (2.3.10) và

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t). \quad (2.149)$$

Cho các hàm $\varphi(x), k(x), q(x)$ dương. Xét bài toán

$$L[u] := \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.150)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.151)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l. \quad (2.152)$$

Ta sử dụng phương pháp Fourier để giải bài toán này. Cụ thể là tìm một nghiệm không tầm thường của (2.5.1) thỏa mãn điều kiện biên

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

và có dạng

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Tương tự như bài toán (2.1.1) ta có

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX}{dx} \right] - qX + \lambda \rho X = 0$$

và

$$T'' + \lambda T = 0.$$

Ta có bài toán giá trị riêng: Bài toán giá trị biên

$$L[X] + \lambda \rho X = 0, \quad 0 < x < l, \quad (2.153)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (2.154)$$

có một nghiệm không tầm thường, λ được gọi là giá trị riêng và tương ứng với các giá trị riêng là nghiệm không tầm thường của (2.153)-(2.154) được gọi là hàm riêng.

Tính chất của bài toán (2.153)-(2.154):

1. Tồn tại đếm được những giá trị riêng $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ và tương ứng với những giá trị riêng là các nghiệm không tầm thường (hàm riêng) $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$
2. Cho $q \geq 0$ thì mọi λ_n đều dương.
3. Các hàm riêng là phần bù trực giao trong $[0, l]$ với $\rho(x)$ nghĩa là:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad , \quad m \neq n \quad (2.155)$$

4. Hàm $F(x)$ bất kì xác định trong $[0, l]$, khả vi, liên tục và thỏa mãn điều kiện biên $F(0) = F(l) = 0$ có thể khai triển thành chuỗi hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối của $X_n(x)$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x), \quad F_n = \frac{1}{N_n} \int_0^l F(x) X_n(x) \rho(x) dx,$$

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx. \quad (2.156)$$

Ta chỉ chứng minh tính chất 2 và 3 (tính chất 1 và 4 có trong lý thuyết phương trình vi tích phân). Trước tiên, chúng ta có công thức Green. Cho u và v là các hàm xác định trong $[a, b]$, $u, v \in C^2(a, b)$ và $u, v \in C^1[a, b]$. Khi đó

$$\begin{aligned} uL[v] - vL[u] &= u(kv')' - v(ku')' \\ &= [k(uv' - vu')]'. \end{aligned}$$

Lấy tích phân từ a đến b ta được

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u]) = k(uv' - vu') \Big|_a^b.$$

Chứng minh tính chất 3. Cho $X_m(x)$, $X_n(x)$ là hai vectơ riêng và λ_m , λ_n là hai giá trị riêng tương ứng. Từ điều kiện biên (2.154) ta có:

$$\int_0^l (X_m L[X_n] - X_n L[X_m]) dx = 0.$$

Kết hợp (2.153) ta được

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0.$$

Vì $\lambda_n \neq \lambda_m$ nên

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0. \quad (2.157)$$

Ta sẽ chứng minh với mỗi giá trị riêng chỉ có một hàm riêng tương ứng. Để chứng minh điều này, ta sử dụng kết quả nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thông thường xác định duy nhất.

Thật vậy: Giả sử $\overline{X}$ và $\overline{\overline{X}}$ là hai hàm riêng tương ứng với giá trị riêng λ . Vì $\overline{X}(0) = \overline{\overline{X}}(0) = 0$ nên $\overline{X}'(0) \neq 0$ và $\overline{\overline{X}}'(0) \neq 0$. Đặt:

$$X^*(x) := \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}(x).$$

Hàm $X^*(x)$ thỏa mãn phương trình (2.153) và

$$X^*(0) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}(0) = 0,$$

$$X^{*'}(0) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}'(0) = \overline{X}'(0).$$

Do đó $X^*(x) = \overline{X}(x)$ và

$$X^*(x) = \overline{X}(x) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}(x) = A \overline{\overline{X}}(x).$$

Ta đã biết, nếu $X_n(x)$ là hàm riêng ứng với giá trị riêng λ_n thì $A_n X_n(x)$ (A_n là hằng số không đổi) cũng là hàm riêng. Vì vậy, những hàm riêng này chỉ khác nhau bởi một yếu tố là hằng số, giá trị của yếu tố này không quan trọng nên

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = 1.$$

Nếu vectơ riêng $\widehat{X}_n(x)$ không chuẩn hóa thì chúng ta chuẩn hóa nó bởi:

$$X_n(x) = \frac{\widehat{X}_n(x)}{\sqrt{\int_0^l \widehat{X}_n^2(x) \rho(x) dx}}.$$

Theo cách này chúng ta sẽ tìm được một hệ trực giao các hàm riêng $X_n(x)$ của bài toán (2.153)-(2.154)

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq n, \\ 1 & \text{nếu } m = n. \end{cases}$$

Chứng minh tính chất 2: Giả sử $X_n(x)$ là các vectơ riêng chuẩn hóa ứng với giá trị riêng λ_n :

$$L[X_n] = -\lambda_n \rho(x) X_n(x).$$

Nhân hai vế phương trình với $X_n(x)$ và lấy tích phân từ 0 đến l ta được

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = - \int_0^l X_n(x) L[X_n] dx.$$

Vì $\int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = 1$ nên

$$\lambda_n = - \int_0^l X_n \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX_n}{dx} \right] dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx.$$

Lấy tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -X_n k X_n' \Big|_0^l + \int_0^l k(x) [X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx \\ &= \int_0^l k(x) [X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx. \end{aligned}$$

Vì $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $X_n \in C^2(0, l)$, $X_n'(x)$ không đồng nhất bằng 0 nên $\lambda_n > 0$. Cho hàm $F(x)$ xác định trong $(0, l)$, ta khai triển $F(x)$ như sau

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x) \\ F_n &= \frac{\int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x) dx}{\int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

F_n là hệ số Fourier của hàm F trong hệ $\{X_1, X_2, \dots\}$. Tương tự như phương pháp trong (2.1.1) chúng ta chứng minh rằng

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) X_n(x)$$

trong đó

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}$$

ở đây, φ_n và ψ_n là hệ số Fourier tương ứng của φ và ψ . Phương pháp này được xây dựng bởi Steklov.

2.3.2 Bài toán Cauchy

Xét bài toán

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (2.158)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.159)$$

Trước tiên, ta biến đổi phương trình (2.158) về dạng chính tắc.
Phương trình đặc trưng

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \quad (2.160)$$

hay

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0. \quad (2.161)$$

Nghiệm của nó có dạng

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2. \quad (2.162)$$

Thực hiện phép đổi biến

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at. \quad (2.163)$$

Ta có

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \quad (2.164)$$

$$u_t = a(u_\xi - u_\eta), \quad u_{tt} = (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})a^2. \quad (2.165)$$

Phương trình (2.158) trở thành

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (2.166)$$

Rõ ràng mỗi nghiệm của phương trình 2.166 có dạng:

$$u_\eta(\xi, \eta) = f^*(\eta), \quad (2.167)$$

trong đó $f^*(\eta)$ là hàm tùy ý chỉ có biến η .

Lấy tích phân ta được

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (2.168)$$

trong đó f_1 phụ thuộc ξ , f_2 phụ thuộc η .

Ngược lại, nếu f_1 và f_2 là hai hàm khả vi, tùy ý thì hàm $u(\xi, \eta)$ xác định bởi (1.3.4) là một nghiệm của (2.166). Do đó

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (2.169)$$

là một nghiệm tổng quát của (2.166).

Giả sử tồn tại một nghiệm của bài toán Cauchy (2.158), (2.159) thì nghiệm đó được xác định bởi (2.169). Hàm f_1 và f_2 được xác định bởi

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \quad (2.170)$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \quad (2.171)$$

Từ (2.171) ta có

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + c, \quad (2.172)$$

trong đó x_0 và c là hằng số. Kết hợp (2.170) ta được

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{c}{2} \\ f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{c}{2}. \end{cases} \quad (2.173)$$

Do đó

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2} \left(\int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right) \quad (2.174)$$

hay

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (2.175)$$

Công thức (2.175) được gọi là công thức D'Alembert. Rõ ràng, nếu $\varphi \in C^2$ và $\psi \in C^1$ thì $u(x, t)$ được xác định bởi công thức (2.175) là một nghiệm của bài toán (2.158) - (2.159). Như vậy, phương pháp của D'Alembert không những chỉ ra tính duy nhất nghiệm mà còn chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán.

Bài tập

Bài 1. Sử dụng công thức D'Alembert cho nghiệm $u(x, t)$ của bài toán Cauchy

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

để chứng minh:

- a) Nếu $\varphi(x), \psi(x)$ là những hàm lẻ thì $u(0, t) = 0$,
- b) Nếu $\varphi(x), \psi(x)$ là những hàm chẵn thì $u_x(0, t) = 0$.

Bài 2. Tìm nghiệm của các bài toán Cauchy sau

a)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 2x, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 3x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 5x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 3x^2, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + x^2, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 3x^2, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Bài 3. Tìm nghiệm của các bài toán hỗn hợp sau

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = -2 \sin x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

2.4 Phương trình loại parabol

Các khái niệm cơ bản

Ta xét phương trình parabolic

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.176)$$

có dạng đơn giản

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (2.177)$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}. \quad (2.178)$$

Giả sử rằng ta xét quy trình của chúng trên đoạn $[0, l]$. Ta có các điều kiện biên như sau

a) Ở hai đầu mút $x = 0$ hoặc $x = l$, nhiệt độ được cho bởi $u(0, t) = \mu(t)$ $u(l, t) = \mu_l(t)$, với $\mu(t)$, $\mu_l(t)$ là các hàm được xác định trên $[t_0, T]$.

b) Ở hai đầu mút $x = 0$ hoặc $x = l$, lấy đạo hàm của hàm $u(x, t)$ theo biến x ta được

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \nu(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \mu(t). \quad (2.179)$$

c) Cuối cùng, ta có mối quan hệ giữa nghiệm và đạo hàm của nó như sau

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)]. \quad (2.180)$$

Điều này tương ứng với định luật Newton về sự truyền nhiệt của vật thể với môi trường bên ngoài, ở đây nhiệt độ $\theta(t)$ của nó đã được cho. Tại $x = 0$, chúng ta có thêm điều kiện

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda[u(0, t) - \theta(t)]. \quad (2.181)$$

d) Nếu đoạn $[0, l]$ rất dài và khoảng thời gian $[t_0, T]$ rất nhỏ thì ta bỏ qua điều kiện biên bằng cách xét phương trình parabolic trong miền xác định $\infty < x < \infty$, $t \geq t_0$ với điều kiện ban đầu

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad \infty < x < \infty, \quad (2.182)$$

ở đây $\varphi(x)$ là một hàm đã cho.

e) Tương tự, nếu nhiệt độ ở một đầu mút của đoạn đã được xác định và đầu kia ở rất xa thì ta có thể xét phương trình parabolic trong miền xác định $0 \leq x < \infty$, $t \geq t_0$ thoả mãn những điều kiện

$$u(x, t) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (2.183)$$

$$u(x, 0) = \mu(t), \quad t \geq t_0, \quad (2.184)$$

ở đây, φ và μ là những hàm được cho.

f) Chúng ta cũng có những điều kiện biên phi tuyến. Chẳng hạn như

$$k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma[u^4(0, t) - \theta^4(0, t)]. \quad (2.185)$$

Điều kiện này được gọi là định luật Stefan- Boltzmann.

Định nghĩa 2.4.1. Một hàm $u(x, t)$ được gọi là nghiệm của bài toán giá trị biên thứ nhất cho phương trình parabolic, nếu

i) Nó được xác định và liên tục trong hình chữ nhật đóng $0 \leq x \leq l, t_0 \leq t \leq T$.

ii) Nó thoả mãn phương trình parabolic trong miền $0 < x < l, t_0 < t < T$.

iii) Nó thoả mãn điều kiện ban đầu và điều kiện biên

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad (2.186)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad (2.187)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t), \quad (2.188)$$

Với $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ là các hàm liên tục và $\varphi(0) = \mu_1(t_0)[= u(0, t_0)]$, $\varphi(l) = \mu_2(t_0)[= u(l, t_0)]$.

Định nghĩa 2.4.2. Nếu điều kiện iii) trong Định nghĩa 2.4.1 được thay thế bằng

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad (2.189)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mu_1(t), \quad (2.190)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \mu_2(t), \quad (2.191)$$

thì chúng ta có bài toán giá trị biên thứ hai.

Định nghĩa 2.4.3. Nếu điều kiện iii) trong Định nghĩa 2.4.1 được thay thế bằng

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad (2.192)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda[u(0, t) - \theta_1(t)], \quad (2.193)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta_2(t)], \quad (2.194)$$

thì chúng ta có bài toán giá trị biên thứ ba.

Nguyên lí cực đại

Trong phần này, ta sẽ xét phương trình với hệ số không đổi

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v \quad (2.195)$$

Nếu ta thực hiện phép biến đổi $v = e^{\mu x \pm \lambda t} u$, $\mu = -\frac{\beta}{2a^2}$, $\lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$ thì ta có phương trình

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2.196)$$

Vì vậy, ta chỉ cần xét phương trình 2.196.

Định lí 2.4.4. (Nguyên lí cực đại) *Cho hàm $u(x, t)$ xác định và liên tục trong hình chữ nhật đóng $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$ và thoả mãn phương trình (2.196) trong miền mở $0 < t < T$, $0 < x < l$. Khi đó, hàm $u(x, t)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại $t = 0$, hoặc tại $x = 0$ hoặc tại $x = l$.*

Chứng minh. Gọi M là giá trị cực đại của $u(x, t)$ khi $t = 0$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = l$. Giả sử rằng hàm $u(x, t)$ đạt cực đại của nó tại điểm (x_0, t_0) nào đó với $0 < x_0 < l$; $0 < t_0 \leq T$

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.197)$$

Vì $0 < x_0 < l$ và $u(x, t)$ đạt cực đại tại (x_0, t_0) nên ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0. \quad (2.198)$$

Hơn nữa, vì hàm $u(x_0, t)$ đạt được cực đại của nó tại $t_0 \in (0, T]$ nên

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0 \quad (2.199)$$

(Thật vậy, $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = 0$ nếu $t_0 < T$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0$ nếu $t_0 = T$). Ta sẽ tìm một điểm khác $(x_1, t_1) \in (0, l) \times (0, T]$ sao cho

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_1) > 0.$$

Xét hàm

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \quad (2.200)$$

với k là một hằng số. Ta có $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$ và $k(t_0 - t) \leq kT$. Chọn $k > 0$ sao cho $kT < \frac{\varepsilon}{2}$ hay $k < \frac{\varepsilon}{2T}$. Ta thấy rằng cực đại của hàm $v(x, t)$

tại $t = 0$ ($0 \leq x \leq l$), hoặc tại $x = 0$ ($0 \leq t < T$), hoặc tại $x = l$ ($0 \leq t < T$) không vượt quá $M + \frac{\varepsilon}{2}$. Điều đó có nghĩa là

$$v(x, t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2} \text{ với } t=0 \text{ hoặc } x=0 \text{ hoặc } x=l \quad (2.201)$$

vì số hạng đầu trong vế phải của (2.200) không lớn hơn M và số hạng thứ hai không lớn hơn $\frac{\varepsilon}{2}$. Vì hàm $v(x, t)$ liên tục trong hình chữ nhật đóng $[0, l] \times [0, T]$ nên tồn tại một điểm $(x_1, t_1) \in [0, l] \times [0, T]$ sao cho $v(x, t)$ đạt cực đại tại điểm đó

$$v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Từ (2.201) ta thấy rằng với $0 < x_1 < l$ và $0 < t_1 \leq T$

$$v_{xx}(x_1, t_1) = u_{xx}(x_1, t_1) \leq 0 \text{ và } v_t(x_1, t_1) = u_t(x_1, t_1) - k \geq 0.$$

Bất đẳng thức này cho ta thấy rằng $u_t(x_1, t_1) \geq k > 0$. Vì vậy, hàm $u(x, t)$ không thỏa mãn phương trình (2.196) trong một lân cận nào đó của điểm (x_1, t_1) . Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy, phần đầu của nguyên lí cực đại đã được chứng minh. Để chứng minh phần thứ hai ta xét hàm $u_1 = -u$ thỏa mãn (2.196) và tất cả các điều kiện khác của phần thứ nhất trong nguyên lí cực đại. $\square$

Một số ứng dụng của nguyên lí cực đại

Định lí 2.4.5. (về tính duy nhất nghiệm trong miền bị chặn) Cho $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$ là các hàm liên tục xác định trong $0 \leq x \leq l$; $0 \leq t \leq T$ thỏa mãn phương trình

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (2.202)$$

và thỏa mãn các điều kiện ban đầu cùng điều kiện biên

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_1(0, t) &= u_2(0, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u_1(l, t) &= u_2(l, t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Khi đó, $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

Chứng minh. Đặt $v(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Vì u_1 và u_2 liên tục trong $[0, l] \times [0, T]$ nên hàm v cũng liên tục trong $[0, l] \times [0, T]$. Ngoài ra, hàm v thỏa mãn phương trình $v_t = a^2 v_{xx}$ với $0 < x < l$, $t > 0$. Vì vậy, v thỏa mãn những điều kiện biên của nguyên lí cực đại, điều đó chứng tỏ v đạt được cực đại tại $t = 0$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = l$. Vì $v(x, 0) = 0$, $v(0, t) = 0$ và $v(l, t) = 0$ nên $v(x, t) \equiv 0$. Do đó, $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. $\square$

Nhận xét 2.4.6. (Sự so sánh các nghiệm) Cho $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$ là hai nghiệm của phương trình truyền nhiệt với $u_1(x, 0) \leq u_2(x, 0)$, $u_1(0, t) \leq u_2(0, t)$, $u_1(l, t) \leq u_2(l, t)$. Khi đó $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$ với $(x, t) \in [0, l] \times [0, T]$.

Thật vậy, hàm $v = u_2 - u_1$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt và $v(x, 0) \geq 0$, $v(0, t) \geq 0$, $v(l, t) \geq 0$. Từ nguyên lí cực đại ta có $v(x, t) \geq 0$ với $0 < x < l$, $0 < t \leq T$.

Cho $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$ là hai nghiệm của phương trình truyền nhiệt thỏa mãn bất đẳng thức $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$ với $t = 0$, $x = 0$, hoặc $x = l$. Khi đó $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon \forall (x, t) \in [0, l] \times [0, T]$.

Định lí 2.4.7. (về tính duy nhất nghiệm trong miền không bị chặn) Giả sử $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$ là hai nghiệm liên tục và bị chặn bởi M ($|u_1(x, t)| < M$, $|u_2(x, t)| < M$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$) của phương trình

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \quad (2.203)$$

thỏa mãn $u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$, $-\infty < x < \infty$ thì

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0.$$

Chứng minh. Đặt $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Hàm $v(x, t)$ liên tục trên $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, thỏa mãn phương trình truyền nhiệt và bị chặn bởi $2M$

$$|v(x, t)| \leq |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| < 2M, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0.$$

Hơn nữa, $v(x, 0) = 0$, $-\infty < x < \infty$. Chúng ta sẽ ứng dụng nguyên lí cực đại để chứng minh rằng $v(x, t) = 0$, $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$. Thật vậy, lấy L là một số dương bất kỳ. Đặt

$$V(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (2.204)$$

Khi đó, hàm $V(x, t)$ liên tục trên $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, thỏa mãn phương trình truyền nhiệt (2.203). Hơn nữa, $V(x, 0) \geq |v(x, 0)| = 0$, $V(\pm L, t) \geq 2M \geq v(\pm L, t)$.

Ứng dụng nguyên lí cực đại trong miền $|x| \leq L$, ta có

$$-\frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \leq v(x, t) \leq \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right).$$

Giữ (x, t) cố định và cho L tiến tới $+\infty$, ta được $v(x, t) = 0$ với mọi $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Vì vậy, $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$. $\square$

2.4.1 Bài toán hỗn hợp

Trong phần này ta sẽ ứng dụng phương pháp Fourier vào các phương trình sau

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.205)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.206)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.207)$$

Tìm nghiệm của bài toán

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T \quad (2.208)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.209)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.210)$$

Để làm được điều này chúng ta sẽ đi tìm nghiệm không tầm thường của phương trình

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

thỏa mãn các điều kiện biên

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (2.211)$$

Hơn nữa nghiệm này còn có thể viết dưới dạng

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.212)$$

với $X(x)$ là hàm chỉ phụ thuộc vào x và $T(t)$ chỉ phụ thuộc vào t . Thay (2.212) vào (2.209) và sau đó chia hai vế cho $a^2 XT$ ta được

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \quad (2.213)$$

với λ là hằng số (vì $\frac{T'}{T}$ chỉ phụ thuộc vào t và $\frac{X''}{X}$ chỉ phụ thuộc vào x).

Do đó, ta xét các phương trình sau

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (2.214)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0 \quad (2.215)$$

Theo (2.211) ta có

$$X(0) = X(l) = 0 \quad (2.216)$$

Vì vậy ta thu được bài toán giá trị riêng cho $X(x)$ như sau

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \quad (2.217)$$

Các giá trị riêng của phương trình này là

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3... \quad (2.218)$$

Và hàm riêng tương ứng là

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.219)$$

Với những giá trị λ_n nghiệm của (2.215) có dạng

$$T_n(t) = c_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (2.220)$$

với c_n là các hằng số. Ta thấy rằng công thức

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = c_n e^{-a^2 \lambda_n t} X_n(x) \quad (2.221)$$

là nghiệm của (4.4.4), thỏa mãn các điều kiện biên thuần nhất (2.241). Xét chuỗi hình thức sau

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right). \quad (2.222)$$

Nếu $u(x, t)$ cũng thỏa mãn điều kiện ban đầu thì

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right). \quad (2.223)$$

Vì vậy, c_n là hệ số Fourier của $\varphi(x)$, tức là

$$c_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \left(\frac{\pi n}{l} \xi \right) d\xi. \quad (2.224)$$

Chuỗi (2.222) bây giờ được xác định hoàn toàn. Chúng ta sẽ tìm những điều kiện đảm bảo chuỗi hội tụ và hơn nữa có thể lấy vi phân chuỗi (2.222) từng số hạng 2 lần theo biến x và một lần theo biến t . Ta sẽ chứng minh rằng các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

với $t \geq \bar{t} > 0$ ($\bar{t}$ cố định) hội tụ đều. Với điều này, ta chú ý rằng

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| = \left| -c_n \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 n^2 e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \right| < |c_n| \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 n^2 e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t}.$$

Cho φ bị chặn bởi M

$$|\varphi(x)| < M.$$

Khi đó

$$|c_n| = \left| \frac{2}{l} \right| \left| \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right| < 2M.$$

Do đó,

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 \bar{t}}, \quad t \geq \bar{t},$$

và

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 \bar{t}}, \quad t \geq \bar{t}.$$

Một cách tổng quát, ta có

$$\left| \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^k \partial x^l} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+1} n^{2l+1} a^{2k} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 \bar{t}}, \quad t \geq \bar{t}.$$

Xét chuỗi hàm trội

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

với

$$\alpha_n = A n^q e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 \bar{t}}. \quad (2.225)$$

Chuỗi vừa xét là chuỗi hội tụ bởi vì theo tiêu chuẩn D'Alembert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^q \frac{e^{-(\frac{\pi}{l})^2 a^2 (n^2 + 2n + 1) \bar{t}}}{e^{-(\frac{\pi}{l})^2 a^2 n^2 \bar{t}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q e^{-(\frac{\pi}{l})^2 a^2 (2n+1) \bar{t}} = 0. \end{aligned}$$

Vì vậy, chuỗi (2.222) với $t \geq \bar{t} > 0$ là khả vi vô hạn. Vì $\bar{t} > 0$ bé tùy ý nên chúng ta có thể nói rằng $u(x, t)$ với $t > 0$ là khả vi vô hạn, hơn nữa, rõ ràng với $t > 0$ nó thỏa mãn phương trình (2.229).

2.1.1 Định lí. Nếu φ là hàm khả vi từng khúc và $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, thì chuỗi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad (2.226)$$

là một hàm liên tục với $t \geq 0$.

Từ (2.226) ta có

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right) e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \\
&= \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \right) \varphi(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Ta có thể thay đổi thứ tự của phép lấy tổng và phép lấy tích phân với $t > 0$, vì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right)$$

với $t > 0$ hội tụ đều. Đặt

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right). \quad (2.227)$$

Hàm $u(x, t)$ có thể được viết dưới dạng

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.228)$$

Hàm $G(x, \xi, t)$ được gọi là hàm Green.

Ta xét bài toán giá trị biên thứ nhất trong lớp các hàm liên tục trong hình chữ nhật đóng $[0, l] \times [0, T]$.

Định lí 2.4.8. Cho φ là một hàm liên tục xác định trên $[0, l]$ và $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ thì nghiệm liên tục trên $[0, l] \times [0, t]$ của phương trình

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, \ t > 0) \quad (2.229)$$

thỏa mãn điều kiện

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \ t \in [0, T] \quad (2.230)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \ x \in [0, l] \quad (2.231)$$

là duy nhất và có thể được biểu diễn bởi

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.232)$$

Chứng minh. Xét chuỗi các hàm liên tục, khả vi từng khúc $\varphi_n(x)$, ($\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0$), hội tụ đều đến $\varphi(x)$. Với mỗi $\varphi_n(x)$, ta xác định $u_n(x, t)$ bởi (4.4.24). Khi đó, do $\varphi_n(x)$ liên tục và khả vi từng khúc, dãy hàm $\{u_n(x, t)\}$ hội tụ đều đến $u(x, t)$. Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, tồn tại $n(\varepsilon)$ sao cho

$$|\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x)| < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq l)$$

$\forall n_1, n_2 \geq n(\varepsilon)$ vì φ_n hội tụ đều tới $\varphi(x)$. Theo nguyên lí cực đại thì

$$|u_{n_1}(x, t) - u_{n_2}(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T)$$

với $n_1, n_2 \geq n(\varepsilon)$. Điều này có nghĩa là dãy hàm $\{u_n(x, t)\}$ hội tụ đều đến $u(x, t)$. Vì $u_n(x, t)$ liên tục nên $u(x, t)$ cũng liên tục. Lấy bất kì $(x, t) \in [0, l] \times [0, T]$ ta có:

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

Vì vậy, hàm $u(x, t)$ liên tục và thoả mãn điều kiện (2.241). Hơn nữa, hàm $u(x, t)$ cũng thoả mãn (2.4.4). Cuối cùng tính duy nhất nghiệm được suy ra trực tiếp từ nguyên lí cực đại. $\square$

Định lí 2.4.9. Cho φ là hàm liên tục từng khúc. Một hàm $u(x, t)$ xác định bởi (2.232) là nghiệm của phương trình (2.229), thoả mãn điều kiện (2.4.4) và liên tục nếu φ liên tục.

Chứng minh. Trước tiên, đặt φ xác định bởi

$$\varphi(x) = cx. \quad (2.233)$$

Xét dãy

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x < l(1 - \frac{1}{n}), \\ c(n-1)(l-x), & l(1 - \frac{1}{n}) \leq x \leq l, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Vì hàm $\varphi_n(x)$ liên tục và $\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0$ nên hàm $u_n(x, t)$ được xác định bởi (2.232) với φ được thay bởi φ_n là các nghiệm của (2.229) mà thoả mãn. Hơn nữa,

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x).$$

Vì $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ ($0 \leq x \leq l$) nên theo nguyên lí cực đại, ta có

$$u_n(x, t) \leq u_{n+1}(x, t).$$

Hàm $U_0(x) = cx$ là nghiệm liên tục của phương trình truyền nhiệt. Nguyên lí cực đại cho ta

$$u_n(x, t) \leq U_0(x),$$

vì điều này đúng với $t = 0$, $x = 0$ và $x = l$. Dãy $\{u_n(x, t)\}$ là ...và bị chặn trên bởi hàm bị chặn $U_0(x)$. Vậy nó hội tụ. Ta có

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi \\ &= \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi \\ &\leq U_0(x), \end{aligned}$$

vì ta có thể lấy giới hạn dưới dấu tích phân. Do đó $u(0, t) = u(l, t) = 0$ và $u(x, t)$ thỏa (2.229) với $t > 0$. Tiếp theo ta thấy rằng nó còn liên tục với $t = 0$, và $0 \leq x < l$. Cho $x_0 < l$. Ta chọn n sao cho $x_0 < l(1 - \frac{1}{n})$. Trong trường hợp này $\varphi_n(x_0) = U_0(x_0)$. Chú ý rằng $u_n(x, t) \leq u(x, t) \leq U_0(x)$ và $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u_n(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_0} U_0(x) = \varphi(x_0)$. Ta kết luận rằng tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u_n(x, t) = \varphi(x_0).$$

Điều này, kéo theo $u(x, t)$ liên tục tại $(x_0, 0)$. Hàm này bị chặn bởi $U_0(x)$. Vì vậy, định lí được chứng minh với $\varphi(x) = cx$.

Thay x bởi $l - x$, ta thấy rằng định lí cũng được chứng minh với $\varphi(x) = b(l - x)$. Vì vậy, định lí luôn đúng với các hàm có dạng $\varphi(x) = B + A(x)$. Hơn nữa, định lí cũng đúng với mọi hàm liên tục $\varphi(x)$ không thỏa mãn điều kiện $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Thật vậy, mỗi hàm đều có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\varphi(x) = [\varphi(0) + \frac{x}{l}(\varphi(l) - \varphi(0))] + \psi(x),$$

ở đây $\psi(x)$ là một hàm liên tục và triệt tiêu ở hai đầu mút $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Từ định lí chồng chất ta thấy rằng định lí được chứng minh.

Cho φ là một hàm liên tục theo từng biến, ta sẽ chứng minh rằng hàm $u(x, t)$ định nghĩa bởi (2.232) là nghiệm của (2.229) và thỏa mãn (2.241).

Giả sử rằng φ liên tục tại điểm x_0 . Ta sẽ chứng minh rằng với mọi ε dương tồn tại $\delta(\varepsilon)$ sao cho nếu $|x - x_0| < \varepsilon$, $t < \delta(\varepsilon)$ thì $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Vì φ liên tục tại x_0 nên tồn tại $\eta(\varepsilon)$ sao cho $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ với $|x - x_0| < \eta(\varepsilon)$. Từ đó suy ra $\varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ với

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon). \quad (2.234)$$

Đặt $\overline{\varphi}(x)$ và $\underline{\varphi}(x)$ là các hàm khả vi liên tục sao cho

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x) &= \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với } |x - x_0| < \eta(\varepsilon), \\ \overline{\varphi}(x) &\geq \varphi(x) \quad \text{với } |x - x_0| > \eta(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.235)$$

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}(x) &= \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với } |x - x_0| < \eta(\varepsilon), \\ \underline{\varphi}(x) &\leq \varphi(x) \quad \text{với } |x - x_0| > \eta(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.236)$$

Từ (2.234) ta có

$$\underline{\varphi}(x) \leq \varphi(x) \leq \overline{\varphi}(x) \quad (2.237)$$

Xét các hàm

$$\overline{u}(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \overline{\varphi}(\xi) d\xi, \quad \underline{u}(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \underline{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Vì $\overline{\varphi}(x)$ và $\underline{\varphi}(x)$ liên tục nên $\overline{u}(x, t)$ và $\underline{u}(x, t)$ liên tục tại x_0 . Suy ra tồn tại $\delta(\varepsilon)$ sao cho $|\overline{u}(x, t) - \overline{\varphi}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, và $|\underline{u}(x, t) - \underline{\varphi}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ với $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $t < \delta(\varepsilon)$. Nghĩa là

$$\overline{u}(x, t) \leq \overline{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon \quad \text{và} \quad \underline{u}(x, t) \geq \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon$$

với $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $t < \delta(\varepsilon)$. Vì hàm $G(x, \xi, t)$ không âm nên theo bất đẳng thức (2.237) ta có

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \overline{u}(x, t). \quad (2.238)$$

Do đó $\varphi(x_0) - \varepsilon \leq u(x, t) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon$ với $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $t < \delta(\varepsilon)$ hay $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ với $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $t < \delta(\varepsilon)$. Hơn nữa, từ (2.235) ta suy ra $u(x, t)$ bị chặn. $\square$

Xét phương trình truyền nhiệt không thuần nhất

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.239)$$

với điều kiện đầu

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.240)$$

và các điều kiện biên

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (2.241)$$

Ta sẽ tìm nghiệm của bài toán dưới dạng

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right). \quad (2.242)$$

Để xác định $u(x, t)$, ta phải tìm $u_n(t)$. Với mục đích này, ta biểu diễn $f(x, t)$ dưới hình thức

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right),$$

với

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \left(\frac{\pi n}{l} \xi \right) d\xi. \quad (2.243)$$

Thế (2.242) và (2.243) vào (2.250) ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \left(\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - f_n(t) \right) = 0.$$

Suy ra

$$\dot{u}_n(t) = -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) + f_n(t). \quad (2.244)$$

Mặt khác

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) = 0$$

do đó

$$u_n(0) = 0. \quad (2.245)$$

Giải (2.244) với điều kiện đầu (2.245) ta được

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (2.246)$$

Do đó

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right). \quad (2.247)$$

Thay (2.243) vào (2.247) ta có thể viết

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 (t-\tau)} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \sin \left(\frac{\pi n}{l} \xi \right) \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (2.248)$$

với

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 (t-\tau)} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \sin \left(\frac{\pi n}{l} \xi \right) \quad (2.249)$$

là hàm Green được định nghĩa ở (2.227).

Tìm nghiệm của bài toán

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.250)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.251)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.252)$$

Để giải bài toán này, ta biến đổi nó thành bài toán biên thuần nhất. Thật vậy, xét hàm

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} (\mu_2(t) - \mu_1(t)). \quad (2.253)$$

Hàm U thỏa mãn các điều kiện biên $U(0, t) = \mu_1(t)$, $U(l, t) = \mu_2(t)$ và phương trình $U_t = a^2 U_{xx} + f_1(x, t)$ với $f_1(x, t) = U_t(x, t) - a^2 U_{xx}(x, t)$. Rõ ràng hàm $v(x, t) = u(x, t) - U(x, t)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} + \bar{f}, \\ v(0, t) &= v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) &= \varphi(x) - U(x, 0). \end{aligned}$$

Nghiệm v có thể được tìm bằng phương pháp Fourier.

Ta đã biết hàm Green

$$G_l(x, \xi, t) := \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \sin \left(\frac{\pi n}{l} \xi \right) \quad (2.254)$$

cho bài toán trong miền hữu hạn $(0, l)$. Ở đây, ta sử dụng chỉ số l để ám chỉ miền $(0, l)$. Ta muốn phát triển lý thuyết khi miền được khuếch đại trên toàn tập $\mathbb{R}$. Để làm được như vậy, ta viết (2.254) dưới hình thức khác sao cho hai đầu mút của đoạn là $-\frac{l}{2}$ và $\frac{l}{2}$.

Đặt $x' = x - \frac{l}{2}$, $\xi' = \xi - \frac{l}{2}$. Khi đó, x' và ξ' nằm trong khoảng $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ và hàm Green có dạng

$$G_l(x', \xi', t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} \left(x' + \frac{l}{2}\right) \sin \frac{\pi n}{l} \left(\xi' + \frac{l}{2}\right). \quad (2.255)$$

Ta viết lại (2.255) nhờ lập luận sau

Nếu n là số chẵn thì $n = 2m$. Khi đó

$$\sin \frac{2\pi m}{l} \left(x' + \frac{l}{2}\right) \sin \frac{2\pi m}{l} \left(\xi' + \frac{l}{2}\right) = \sin \left(\frac{2\pi m}{l} x'\right) \sin \left(\frac{2\pi m}{l} \xi'\right).$$

Hơn nữa nếu n là số lẻ thì $n = 2m + 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} & \sin \frac{(2m+1)\pi}{l} \left(x' + \frac{l}{2}\right) \sin \frac{(2m+1)\pi}{l} \left(\xi' + \frac{l}{2}\right) \\ &= \cos \frac{(2m+1)\pi}{l} x' \cos \frac{(2m+1)\pi}{l} \xi'. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} G_l(x', \xi', t) &= \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x'\right) \sin \left(\frac{\pi n}{l} \xi'\right) \\ &+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \cos \left(\frac{\pi n}{l} x'\right) \cos \left(\frac{\pi n}{l} \xi'\right). \end{aligned} \quad (2.256)$$

Ký hiệu $\sum''$ là tổng với n chẵn và $\sum'$ là tổng với n lẻ. Chúng ta sẽ xét giới hạn của $G_l(x', \xi', t)$ khi $l \rightarrow \infty$. Ta có

$$\frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin(\lambda_n x') \sin(\lambda_n \xi') = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(\lambda_n) \Delta \lambda \quad (2.257)$$

với $f_1(\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin(\lambda x') \sin(\lambda \xi')$, $\Delta \lambda = \frac{2\pi}{l}$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$. Tổng (2.257) là tổng tích phân của hàm $f_1(\lambda)$ trong khoảng $0 \leq \lambda < \infty$. Cho $l \rightarrow \infty$, $\Delta \lambda \rightarrow 0$ ta

được

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(\lambda_n) \Delta\lambda &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin(\lambda x') \sin(\lambda \xi') d\lambda.\end{aligned}\quad (2.258)$$

Chú ý 2.4.10. Ở đây chúng ta sử dụng kết quả: cho một hàm liên tục trong $[0, \infty)$, nếu tổng tích phân

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i^*) (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \quad (\lambda_i - \lambda_{i-1} = \Delta\lambda, \lambda_{i-1} \leq \lambda_i^* \leq \lambda_i)$$

hội tụ với bất kì λ_i^* thì luôn tồn tại tích phân

$$\int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda.$$

Tương tự,

$$\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos(\lambda_n x') \cos(\lambda_n \xi') = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_2(\lambda_n) \Delta\lambda, \quad (2.259)$$

với

$$f_2(\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos(\lambda x') \cos(\lambda \xi'), \quad \Delta\lambda = \frac{2\pi}{l}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Khi $\Delta\lambda \rightarrow 0$, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_2(\lambda_n) \Delta\lambda &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos(\lambda x') \cos(\lambda \xi') d\lambda.\end{aligned}\quad (2.260)$$

Cuối cùng, ta có

$$\begin{aligned}
G(x, \xi, t) &= \lim_{l \rightarrow \infty} G_l(x, \xi, t) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin(\lambda x) \sin(\lambda \xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos(\lambda x) \cos(\lambda \xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(x - \xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Hàm Green trong miền không bị chặn $(-\infty, \infty)$ có dạng

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda. \quad (2.261)$$

Bây giờ ta tính tích phân

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \alpha} \cos(\lambda \beta) d\lambda \quad (\alpha > 0). \quad (2.262)$$

với α và β là các tham số. Để tính tích phân này ta cố định α và xem I là hàm của β . Rõ ràng rằng

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\beta} &= - \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \alpha} \lambda \sin(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \sin(\lambda \beta) \frac{1}{2\alpha} e^{-\lambda^2 \alpha} \Big|_0^{\infty} - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \alpha} \cos(\lambda \beta) d\lambda \\
&= -\frac{\beta}{2\alpha} I(\beta).
\end{aligned}$$

Vì vậy $\frac{I'(\beta)}{I(\beta)} = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Do đó $I(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$. Mặt khác,

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \alpha} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Vì vậy

$$I(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \alpha} \cos(\lambda \beta) d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \quad (2.263)$$

Áp dụng công thức (2.263) vào (2.261), ta có

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (2.264)$$

Hàm $G(x, \xi, t)$ xác định bởi công thức (2.264) được gọi là hàm Green trong miền không bị chặn $(-\infty; +\infty)$. Nó cũng được gọi là nghiệm cơ bản của phương trình truyền nhiệt.

Những tính chất của nghiệm cơ bản

i) Hàm $G(x, \xi, t - t_0)$ như là hàm của x, t là nghiệm của phương trình truyền nhiệt. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} G_x &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x - \xi}{2(a^2(t - t_0))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}, \\ G_{xx} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(a^2(t - t_0))^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x - \xi)^2}{4(a^2(t - t_0))^{\frac{5}{2}}} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}, \\ G_t &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(-\frac{a^2}{2(a^2(t - t_0))^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2(x - \xi)^2}{4(a^2(t - t_0))^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}. \end{aligned}$$

Vì vậy $G_t = a^2 G_{xx}$.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0) dx = 1$ với $t > t_0$. Thật vậy

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1$$

2.4.2 Bài toán Cauchy

Xét bài toán tìm một hàm bị chặn $u(x, t)$ $(-\infty < x < +\infty, t \geq 0)$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \quad (2.265)$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.266)$$

Vì u bị chặn nên nghiệm của bài toán (2.265)-(2.266) là duy nhất. Ta sẽ chứng minh rằng nếu φ bị chặn, nghĩa là $|\varphi(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$ thì với $t > 0$ tích phân Poisson

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \quad (2.267)$$

là nghiệm của (2.265) và giới hạn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u(x, t) = \varphi(x_0)$$

nếu φ là một hàm liên tục tại x_0 . Ta lưu ý rằng

$$|u(x, t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) |\varphi(\xi)| d\xi < M \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) d\xi = M.$$

Vì vậy, hàm $u(x, t)$ bị chặn. Ta sẽ chứng minh rằng với $t > 0$, $u(x, t)$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt (2.265). Để làm điều đó, ta chứng minh rằng ta có thể lấy đạo hàm (2.267) dưới tích phân. Trước hết, ta chứng minh rằng tồn tại một hàm dương $F(\xi)$ mà không phụ thuộc vào x và t sao cho

$$|G_x(x, \xi, t) \varphi(\xi)| \leq F(\xi), \quad (2.268)$$

và

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi) d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{x_1} F(\xi) d\xi < \infty \quad (2.269)$$

với x_1 là một số thực nào đó.

Thật vậy với $|x - x_0| \leq \bar{x}$ và $t_1 \leq t \leq t_2$ ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t) \right| \cdot |\varphi(\xi)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x|}{2\sqrt{a^2 t}^3} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi)| \\ &\leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x_0| + \bar{x}}{2\sqrt{a^2 t_1}^3} e^{-\frac{(|\xi - x_0| - \bar{x})^2}{4a^2 t_2}} := F(\xi). \end{aligned} \quad (2.270)$$

Mặt khác, với số thực x_1 thích hợp ta có

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{\infty} F(\xi) d\xi &= \int_{x_1}^{\infty} \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x_0| + \bar{x}}{2\sqrt{a^2 t_1}^3} e^{-\frac{(|\xi - x_0| - \bar{x})^2}{4a^2 t_2}} d\xi \\ &= \int_{x_1 - \bar{x}}^{\infty} \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi_1 + 2\bar{x}}{2\sqrt{a^2 t_1}^3} e^{-\frac{\xi_1^2}{4a^2 t_2}} d\xi \quad (\xi_1 = |\xi - x_0| - \bar{x}). \end{aligned}$$

Rõ ràng tích phân này hội tụ. Vì vậy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} G(x\xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.271)$$

Tương tự, ta có thể chứng minh rằng với $t > 0$ hàm $u(x, t)$ khả vi 2 lần theo biến x , 1 lần theo biến t và thoả mãn phương trình truyền nhiệt (2.265). Cho $\varphi(x)$ là hàm liên tục tại điểm x_0 . Ta sẽ chứng minh rằng

$$u(x, t) \rightarrow \varphi(x_0)$$

khi $t \rightarrow 0$ và $x \rightarrow x_0$. Với bất kì $\varepsilon > 0$ ta cần chỉ ra rằng tồn tại $\delta(\varepsilon)$ sao cho $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ nếu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ và $t < \delta(\varepsilon)$. Vì φ liên tục tại điểm x_0 nên tồn tại $\eta(\varepsilon)$ sao cho $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}$ với

$$|x - x_0| < \eta. \quad (2.272)$$

Ta tách tích phân của $u(x, t)$ thành ba phần như sau

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \dots + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_2}^{\infty} \\ &:= u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \end{aligned} \quad (2.273)$$

với

$$x_1 = x_0 - \eta \text{ và } x_2 = x_0 + \eta. \quad (2.274)$$

Với tích phân thứ hai ta có

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] d\xi \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Tích phân I_1 có thể tính như sau

$$I_1 = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

với $\alpha = \frac{\xi-x}{2\sqrt{a^2t}}$, $d\alpha = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}$. Khi $|x-x_0| < \eta$, $x_1 = x_0-\eta$, $x_2 = x_0+\eta$, ta thấy rằng

$$\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}} \rightarrow -\infty \text{ khi } t \rightarrow 0, \quad \frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}} \rightarrow +\infty \text{ khi } t \rightarrow 0.$$

Suy ra

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} I_1 = \varphi(x_0).$$

Vì vậy, có một $\delta_1(\varepsilon)$ sao cho

$$|I_1 - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với } |x - x_0| < \delta_1 \text{ và } t < \delta_1. \quad (2.275)$$

Ta đánh giá I_2 như sau

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| d\xi.$$

Từ (2.274), với $x_1 < \xi < x_2$, ta thấy rằng $|\xi - x_0| < \eta$. Từ (2.272) và bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\alpha^2} d\alpha < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1, \forall x', x'' \in \mathbb{R}$$

ta có

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{4a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{\varepsilon}{6} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\alpha} d\alpha < \frac{\varepsilon}{6}. \quad (2.276)$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} |u_3(x, t)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{x_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi \right| \\ &< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow 0 \text{ và } x \rightarrow x_0, \end{aligned} \quad (2.277)$$

$$\begin{aligned}
|u_1(x, t)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \right| \\
&< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow 0 \text{ và } x \rightarrow x_0
\end{aligned} \tag{2.278}$$

Vì vậy, có một $\delta_2(\varepsilon)$ sao cho

$$|u_3(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ và } |u_1(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ với } |x - x_0| < \delta_2 \text{ và } t < \delta_2. \tag{2.279}$$

Kết hợp (2.275), (2.276) và (2.279) cho ta

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| \leq |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + |I_2| + |u_3| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.280}$$

khi $|x - x_0| < \delta$ và $t < \delta$, với $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Như vậy, chúng ta chứng minh rằng hàm

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi$$

bị chặn và thoả mãn phương trình truyền nhiệt với điều kiện ban đầu.

Nếu điều kiện ban đầu được cho tại $t = t_0$ thì nghiệm có dạng

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Bây giờ ta thử tìm nghiệm của bài toán (2.265) và (2.266) trong trường hợp

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1, & x < 0, \\ T_2, & x > 0. \end{cases}$$

Trong trường hợp này

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \\
&= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} \\
&= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \\
&= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha, \tag{2.281}
\end{aligned}$$

vì

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

và

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Nếu $T_2 = 0$, $T_1 = 1$, thì

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right).$$

Hàm $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$ được gọi là hàm sai số. Nó có nhiều ứng dụng trong các lý thuyết xác suất.

Bài tập

Bài 1 Sử dụng các công thức cơ bản

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 z^2} \sin(\beta z) dz = 0, \quad \alpha, \beta \text{ là các hằng số}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 z^2} \cos \beta z dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}, \quad \alpha, \beta \text{ là các hằng số và } \alpha > 0$$

tim nghiệm của các bài toán Cauchy sau

a)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2+2x}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} + \cos(5x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = xe^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bài 2 Tìm nghiệm của phương trình

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0$$

thỏa mãn điều kiện biên

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0$$

và điều kiện ban đầu:

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l - x & \text{khi } \frac{l}{2} \leq x < l. \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Mạnh Hùng (2008), *Phương trình đạo hàm riêng*, Đại học sư phạm.
- [2] Đinh Nho Hào (1996), *Introduction to partial differential equation*, Universität - GH - Siegen Summer Semester.
- [3] Vũ Tuấn và Đoàn Văn Ngọc (1992), *Phương trình vi phân*, NXBGD.
- [4] V. P. Mikhailov (1978), *Partial Differential Equations*, Mir Publishers.
- [5] L.C. Evans (1998), *Partial Differential Equations*, American Math. Society.