

Chương 1

Phương trình đạo hàm riêng cấp một

Phương trình đạo hàm riêng cấp một là "cầu nối" giữa phương trình vi phân thường với phương trình đạo hàm riêng nói chung, đặc biệt là phương trình đạo hàm riêng cấp 2 ở phần sau.

Phương trình có dạng sau đây được gọi là phương trình đạo hàm riêng cấp một:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

trong đó $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm phải tìm của n biến độc lập $x_1, x_2, \dots, x_n$, F là hàm đã cho của các đối số trong một miền nào đó trong không gian $(2n+1)$ chiều.

1.1 Phương trình đạo hàm riêng cấp một tuyến tính thuần nhất

Phương trình đạo hàm riêng cấp một tuyến tính thuần nhất là phương trình có dạng

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1.1 Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất

Ta xét phương trình (1.2), Giả sử rằng $X_1, X_2, \dots, X_n$ xác định và liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng theo tất cả các biến trong một lân

cận nào đó của điểm $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ và không đồng thời bằng không tại điểm này, chẳng hạn:

$$X_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \neq 0. \quad (1.3)$$

Việc tìm nghiệm của phương trình (1.2) xác định trong một lân cận nào đó của điểm đã cho là tìm hàm $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định và khả vi liên tục ($u \in C^1$) trong lân cận điểm $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ và khi thay vào phương trình (1.2) nó trở thành đồng nhất.

Ta thấy rằng hàm số:

$$u = C (C = \text{const}) \quad (1.4)$$

luôn luôn là một nghiệm của phương trình (1.2). Ta gọi nghiệm (1.4) là *nghiệm hiển nhiên* của phương trình (1.2). Ngoài nghiệm hiển nhiên ra, ta sẽ chứng tỏ rằng với những giả thiết nào đó, phương trình (1.2) sẽ có một tập hợp vô số nghiệm không hiển nhiên.

Cùng với phương trình (1.2), ta xét hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng sau đây:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (1.5)$$

Hệ phương trình (1.5) gọi là hệ đối xứng tương ứng với phương trình (1.2).

Định lý 1.1.1. 1) Nếu hàm số $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là tích phân khả vi liên tục của hệ (1.5) thì hàm $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của phương trình (1.2).

2) Nếu hàm số $u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ là nghiệm của phương trình (1.2), thì hàm $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là tích phân của hệ (1.5).

Từ định lý trên ta suy ra rằng việc tìm nghiệm của phương trình (1.2) tương đương với việc tìm tích phân của hệ (1.5). Ta giả sử rằng hệ (1.5) có $n - 1$ tích phân độc lập:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.6)$$

xác định và khả vi liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Ta lập một hàm khả vi liên tục của các tích phân (1.6):

$$u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \quad (1.7)$$

khi đó hàm số xác định bởi (1.7) cũng là tích phân của (1.5), do đó cũng là nghiệm của phương trình (1.2).

Ta gọi nghiệm (1.7) trong đó Φ là hàm bất kỳ (khả vi liên tục của các tích phân của nó) là *nghiệm tổng quát* của phương trình (1.2).

1.1.2 Bài toán Cauchy đối với phương trình thuần nhất

Ta tìm nghiệm

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.8)$$

của phương trình (1.2) sao cho khi cố định một biến số (chẳng hạn, x_n) thì nó trở thành hàm khả vi liên tục của các biến còn lại, tức là:

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad \text{khi} \quad x_n = x_n^0. \quad (1.9)$$

Điều kiện (1.9) gọi là *điều kiện ban đầu* của phương trình (1.2).

Để tìm nghiệm Cauchy đối với phương trình (1.2), ta tiến hành như sau. Giả sử $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ là $(n-1)$ tích phân độc lập của hệ (1.5) và đặt $x_n = x_n^0$, ta kí hiệu $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}$ như sau:

[illegible]

Giải được từ hệ (1.10) đối với $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ trong lân cận của điểm $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \varphi_{n-1}) \\ x_2 = \omega_2(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \varphi_{n-1}) \\ \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \varphi_{n-1}). \end{cases} \quad (1.11)$$

Hàm số có dạng

$$u = \varphi(\omega_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})) \quad (1.12)$$

trong đó $\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1, n}$ sẽ là nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình (1.2), (1.9).

1.2 Phương trình đạo hàm riêng cấp một tuyến tính không thuần nhất

1.2.1 Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{aligned} \quad (1.13)$$

được gọi là phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp một không thuần nhất. Chú ý rằng nếu vế phải của phương trình (1.13) đồng nhất bằng không ($f \equiv 0$), còn các hàm số $X_i (i = \overline{1, n})$ không phụ thuộc hàm số phải tìm u thì phương trình (1.13) trở thành phương trình thuần nhất (1.2).

Ta xét phương trình (1.13) trong đó các hàm $X_i (i = \overline{1, n})$ và hàm f xác định và liên tục cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng theo các biến trong một lân cận nào đó của điểm $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0)$, ngoài ra

$$X_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0) \neq 0. \quad (1.14)$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng nghiệm của phương trình (1.13) có dạng ẩn:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0 \quad (1.15)$$

trong đó V là hàm số nào đó khả vi liên tục theo các đối số và thỏa mãn:

$$\frac{\partial V}{\partial u}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0) \neq 0. \quad (1.16)$$

Thật vậy, lấy vi phân hệ thức (1.15) theo $x_k, k = \overline{1, n}$ trong đó u là hàm của $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta được:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\partial V}{\partial x_k} : \frac{\partial V}{\partial u}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.17)$$

Đặt (1.17) vào (1.13), ta được

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + f \frac{\partial V}{\partial u} = 0. \quad (1.18)$$

Phương trình (1.18) là phương trình tuyến tính thuần nhất với hàm số phải tìm V .

Hệ phương trình vi phân đối xứng tương ứng của phương trình (1.18) là

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{f}. \quad (1.19)$$

Hệ (1.19) có n tích phân độc lập:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (1.20)$$

Khi đó hàm số

$$V = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \quad (1.21)$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (1.18). Nếu đặt (1.21) vào (1.15) ta được nghiệm của phương trình (1.13) ở dạng

$$V = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0. \quad (1.22)$$

Đó là điều cần chứng minh.

Chú ý 1.2.1. 1) Nghiệm (1.22) là nghiệm tổng quát của phương trình (1.13).
2) Nếu từ phương trình (1.22), ta giải ra được

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.23)$$

trong đó φ là hàm số tùy ý khả vi liên tục, thì (1.23) là nghiệm tổng quát ở dạng tường minh của phương trình (1.13).

1.2.2 Bài toán Cauchy đối với phương trình không thuần nhất

Ta tìm nghiệm

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.24)$$

của phương trình (1.13) sao cho khi cố định một biến số (chẳng hạn, x_n) thì nó trở thành hàm khả vi liên tục của các biến còn lại, tức là:

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad \text{khi} \quad x_n = x_n^0. \quad (1.25)$$

Điều kiện (1.25) gọi là *điều kiện ban đầu* của phương trình (1.13).

Để tìm nghiệm của bài toán Cauchy ta thực hiện như sau: Tìm n tích phân độc lập từ hệ phương trình vi phân đối xứng

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u)} = \dots = \frac{du}{R(x_1, x_2, \dots, x_n, u)} \quad (1.26)$$

Giả sử n tích phân độc lập tìm được là

[illegible]

Đặt

[illegible]

Từ hệ (1.28), ta giải $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$ theo $\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_n}$, ta có

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_n) \\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_n) \\ \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_n) \\ u = \omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_n). \end{cases} \quad (1.29)$$

Nghiệm của bài toán Cauchy được suy từ phương trình hàm ẩn

$$\omega(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) - \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)) = 0. \quad (1.30)$$

Bài tập chương 1

Bài 1. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình thuần nhất

- 1) $\frac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z)\frac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$
- 2) $(mz - ny)\frac{\partial u}{\partial x} + (nx - lz)\frac{\partial u}{\partial y} + (ly - mx)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$
- 3) $(x^3 + 3xy^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial u}{\partial y} + 2y^3z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$
- 4) $(x + 2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
- 5) $(x - z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$
- 6) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$
- 7) $\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$
- 8) $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$
- 9) $(z - y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x - z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y - x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$
- 10) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$
- 11) $x(y^2 - z^2)\frac{\partial u}{\partial x} - y(x^2 + z^2)\frac{\partial u}{\partial y} + z(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Bài 2. Tìm nghiệm các bài toán Cauchy của phương trình thuần nhất

- 1) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ biết $z(0, y) = \varphi(y)$ với $\varphi(y)$ là hàm khả vi liên tục cho trước.
- 2) $x\frac{\partial u}{\partial x} + yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ biết $u = x^y$ khi $z = 1$.
- 3) $(1 + x^2)\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ biết $u = y^2$ khi $x = 0$.
- 4) $y\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ biết $u = \ln z - \frac{1}{y}$ khi $x = 1$.
- 5) $(z - y)^2\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ biết $u = 2(y - z)y$ khi $x = 0$.
- 6) $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ biết $z = y$ khi $x = 0$.
- 7) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ biết $u = yz$ khi $x = 1$.
- 8) $2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ biết $z = y^2$ khi $x = 1$.
- 9) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ biết $u = x^2 + y^2$ khi $z = 0$.
- 10) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ biết $z = y^2$ khi $x = 0$.

11) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = y + z^2$ khi $x = 1$

Bài 3. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình không thuần nhất

- 1) $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$
- 2) $(y + z + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (z + u + x) \frac{\partial u}{\partial y} + (u + x + y) \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$
- 3) $\frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$; (b, c là các hằng số khác 0)
- 4) $(y^3 x - 2x^4) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3 y) \frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3)$
- 5) $e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$
- 6) $2x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0$
- 7) $y \frac{\partial z}{\partial x} = x$
- 8) $\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$
- 9) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = mu$ ($m \neq 0$)
- 10) $(z - y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial z}{\partial y} + x - y = 0$
- 11) $xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz$
- 12) $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z$
- 13) $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$
- 14) $x^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$
- 15) $(z - y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$
- 16) $yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z$
- 17) $xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz$
- 18) $\sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + \tan z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$
- 19) $(xz + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x + yz) \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2$
- 20) $y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{y}{x} = 0$
- 21) $(x + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$
- 22) $(y + z) \frac{\partial u}{\partial x} + (z + x) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y) \frac{\partial u}{\partial z} = u$
- 23) $(u - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (u - y) \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = x + y$
- 24) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (z + u) \frac{\partial u}{\partial z} - xy = 0$

Bài 4. Tìm nghiệm các bài toán Cauchy của phương trình không thuần nhất

- 1) $x \frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z$; $z = y - 4$ khi $x = 2$.
- 2) $z(x + z) \frac{\partial z}{\partial x} - y(y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = \sqrt{y}$ khi $x = 1$.

- 3) $yz \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = x^2$ khi $y = 1$
- 4) $x \frac{\partial z}{\partial x} = z$; $z = y$ khi $x = 1$
- 5) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u$; $u = \frac{1}{2}(y + z)$ khi $x = 2$.
- 6) $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x$; $z = y^2$ khi $x = 0$
- 7) $x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = y$ khi $x = 1$
- 8) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$; $y = z$ khi $x = 1$
- 9) $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y)$; $yz + 1 = 0$ khi $x = 1$.
- 10) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$; $z = x - x^2$ khi $y = -2$
- 11) $x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$; $z = x^2$ khi $y = 1$
- 12) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$; $z = y^2 + 1$ khi $x = 2$