

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

PHẠM THỊ THU

VỀ ĐIỀU KIỆN 2-CỘNG TÍNH TRÊN
MỌI SỐ NGUYÊN TỔ LẺ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

PHẠM THỊ THU

VỀ ĐIỀU KIỆN 2-CỘNG TÍNH TRÊN
MỌI SỐ NGUYÊN TỔ LẺ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

Mã số: 846 01 04

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TS. NGUYỄN THÀNH QUANG

Nghệ An - 2022

LỜI CẢM ƠN

Tác giả bày tỏ lòng kính trọng và tri ân sâu sắc tới thầy giáo hướng dẫn khoa học - PGS.TS Nguyễn Thành Quang - người đã dành nhiều thời gian và công sức để chọn đề tài và chỉ dẫn chúng tôi hoàn thành nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến các thầy cô giáo thuộc chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, khoa Toán học và Phòng Đào tạo Sau Đại học - Trường Đại học Vinh đã tận tình giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho chúng tôi hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Trường Trung học Phổ thông Kiệm Tân, đơn vị công tác của tác giả, đã giúp đỡ nhiều về thời gian, tinh thần và vật chất cho tôi để hoàn thành chương trình học tập

Nội dung của luận văn là có ý nghĩa thực sự và mới mẻ đối với bản thân tôi - một giáo viên dạy toán ở trường trung học phổ thông. Dẫu rằng đã hết sức cố gắng, song việc trình bày một cách chi tiết nội dung lý thuyết số chuyên sâu một cách chặt chẽ sẽ chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tác giả mong muốn nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô giáo và các bạn học viên cùng lớp sau đại học khóa 28 chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, ngành Toán, Trường Đại học Vinh để bản luận văn này được hoàn thiện hơn.

Tác giả

PHẠM THỊ THU

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN	1
Mục lục	1
1 KIẾN THỨC CƠ SỞ	6
1.1. Hàm nhân	6
1.2. Hàm số các ước và hàm tổng các ước	9
2 ĐIỀU KIỆN CỘNG TÍNH TRÊN HAI SỐ NGUYÊN TỔ LẺ	15
2.1. Tập duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân	15
2.2. Một số bổ đề chuẩn bị	18
2.3. Đặc trưng đồng nhất của hàm nhân bởi điều kiện 2 - cộng tính trên các số nguyên tố lẻ	25

MỘT SỐ KÍ HIỆU DÙNG TRONG LUẬN VĂN

Thứ tự	Kí hiệu	Tên gọi
1	$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
2	$\mathbb{N}^*$	Tập hợp các số tự nhiên khác 0
3	P	Tập hợp các số nguyên tố
4	$\mathbb{Z}$	Tập hợp các số nguyên
5	$\mathbb{Z}^+$	Tập hợp các số nguyên dương
6	$\mathbb{Q}$	Tập hợp các số hữu tỉ
7	$\mathbb{C}$	Tập hợp các số phức
8	p, q, r	Các số nguyên tố
9	$\nu_p(n)$	Số mũ của số nguyên tố p trong dạng phân tích tiêu chuẩn của số nguyên dương $n > 1$
10	$a:b$	Số nguyên a chia hết cho số nguyên b
11	$b a$	Số nguyên b là ước của số nguyên a
12	$\gcd(a, b)$	Ước chung lớn nhất của hai số nguyên a, b
13	$\text{lcm}(a, b)$	Bội chung nhỏ nhất của hai số nguyên a, b
14	$f(p+q) = f(p) + f(q)$	Điều kiện cộng tính trên hai số nguyên tố lẻ p, q của hàm nhân f
15	$f(ab) = f(a)f(b),$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+, \gcd(a, b) = 1.$	Tính chất nhân của hàm số học f

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Mỗi hàm số f xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ và nhận giá trị trong trường các số phức $\mathbb{C}$ được gọi là một *hàm số số học*. Một hàm số số học f được gọi là *hàm nhân* nếu

$$f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{Z}^+, \gcd(a, b) = 1.$$

Giả sử E là một tập hợp các số nguyên dương và S là một tập hợp các hàm số số học. Khi đó, nếu tồn tại duy nhất một hàm số số học $f \in S$ thỏa mãn điều kiện cộng tính

$$f(m+n) = f(m) + f(n), \forall m, n \in E$$

thì ta sẽ gọi E là tập xác định duy nhất của S .

Với công cụ tập xác định duy nhất, nhiều nhà toán học đã quan tâm việc mô tả đặc trưng của hàm số số học đồng nhất (xem [1], [2], [3], [4], [5], [6]). Năm 1992, Claudia A. Spiro [6] đã chứng minh rằng, tập hợp P tất cả các số nguyên tố là tập xác định duy nhất của tập hợp S các hàm nhân f thỏa mãn điều kiện $f(p_0) \neq 0$ với một số nguyên tố p_0 nào đó. Nói rõ hơn, Claudia A. Spiro [6] đã chỉ ra rằng, nếu một hàm nhân khác không f là cộng tính trên tổng hai số nguyên tố, nghĩa là

$$f(p+q) = f(p) + f(q), \forall p, q \in P$$

thì f là hàm số đồng nhất: $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ở cuối bài báo [6], Claudia A. Spiro đưa ra hai câu hỏi:

1) Tập hợp tất cả các số nguyên tố đủ lớn có phải là tập xác định duy nhất của tập hợp S hay không?

2) Tồn tại hay không một tập hợp con của tập hợp các số nguyên tố có tỉ trọng dương đủ nhỏ mà không phải là tập xác định duy nhất cộng tính của tập các hàm nhân?

Bài báo [6] của Claudia A. Spiro đã truyền cảm hứng cho rất nhiều nhà toán học để họ công bố các kết quả liên quan đến tính xác định duy nhất của các hàm số số học. Trong bài báo [1], hai nhà toán học Trung Quốc là Kang – Kang Chen và Yong – Gao Chen đã đưa ra một đặc trưng cho các hàm nhân $f \neq 0$ bởi điều kiện cộng tính trên mọi số nguyên tố lẻ p, q . Như một hệ quả, hàm nhân $f \neq 0$ là hàm số đồng nhất khi và chỉ khi $f(3) = 3$ và $f(p + q) = f(p) + f(q)$, với mọi số nguyên tố lẻ p, q . Ngoài ra, hai câu hỏi trên của Claudia A. Spiro đặt ra vào năm 1992 cũng được trả lời trong bài báo [1] bởi hai nhà toán học Kang – Kang Chen và Yong – Gao Chen. Từ hệ quả đã nhắc ở trên hai tác giả Kang – Kang Chen và Yong – Gao Chen đã đưa ra được một giả thuyết như là một hệ quả trực tiếp của giả thuyết Goldbach. Và từ đó Kang – Kang Chen và Yong – Gao Chen kết luận rằng nếu giả thuyết của họ sai thì giả thuyết Goldbach cũng sai.

Tham khảo các bài báo [1] và [6], chúng tôi lựa chọn đề tài luận văn **“Điều kiện 2-cộng tính trên mọi số nguyên tố lẻ”** nhằm tìm hiểu sâu hơn những kết quả trong lý thuyết tập xác định duy nhất đối với các hàm nhân - một lĩnh vực có liên quan trực tiếp đến các giả thuyết Goldbach.

2. Mục đích nghiên cứu

- Tìm hiểu khái niệm, tính chất và ứng dụng của các hàm số số học.
- Tìm hiểu giả thuyết tập xác định duy nhất đối với các hàm nhân - một lĩnh vực có liên quan trực tiếp đến các giả thuyết Goldbach trong số học.
- Khảo sát đặc trưng 2-cộng tính trên mọi số nguyên tố lẻ của hàm số số học đồng nhất.
- Tập dượt một số kỹ năng chứng minh số học.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

- Đọc và trình bày lại một số kết quả nghiên cứu trong bài báo tiếng Anh thuộc lĩnh vực lý thuyết số liên quan đến các hàm số số học.
- Tìm hiểu một giả thuyết có liên quan đến giả thuyết Goldbach.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Điều kiện cộng tính trên mọi số nguyên tố lẻ
- Hàm số số học, hàm nhân, hàm đồng nhất.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Tham khảo bài báo [1] của các tác giả Kang-Kang Chen and Yong-Gao Chen cũng như đối chiếu với bài báo [6] của Claudia A. Spiro và tìm hiểu 4 bài báo khác có liên quan.

- Khai thác sự biểu diễn số nguyên chẵn đủ lớn qua tổng hai số nguyên tố.
- Sử dụng tính chất của hàm số nhân.
- Sử dụng tính chất duy nhất cộng tính của tập hợp các số nguyên tố lẻ đối với các hàm nhân.
- Sử dụng nguyên lý cực tiểu của tập hợp các số tự nhiên trong chứng minh.

6. Nội dung chính và kết quả mới của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận văn này gồm có hai chương.

Chương 1 trình bày các khái niệm và kết quả của các hàm nhân; khảo sát một số tính chất của hàm số các ước.

Chương 2 trình bày một đặc trưng của hàm nhân bởi điều kiện cộng tính trên tổng mọi số nguyên tố lẻ. Giải thích được ví dụ về tập các số nguyên dương là tập duy nhất cộng tính cũng như tập các số nguyên dương chẵn không là tập duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân không đồng nhất không. Chứng minh chi tiết một bổ đề mà các tác giả không trình bày trong [1].

Một số kết quả và kỹ thuật chứng minh đã trình bày trong luận văn có thể đưa vào nội dung giới thiệu và giảng dạy trong học phần số học cho sinh viên ngành sư phạm toán và chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1 Hàm nhân

1.1.1 Định nghĩa. Mỗi *hàm số số học* f là một hàm số xác định trên tập hợp $\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương và nhận giá trị trong tập hợp $\mathbb{C}$ các số phức. Hàm số số học f gọi là *hàm đồng nhất không* và ký hiệu $f = 0$ nếu $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Như vậy, $f \neq 0$ khi và chỉ khi tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $f(n_0) \neq 0$.

1.1.2 Định nghĩa. Nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{Z}^+, \gcd(a, b) = 1,$$

thì hàm số số học f được gọi là một *hàm nhân*.

Nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{Z}^+,$$

thì hàm số số học f được gọi là một *hàm nhân mạnh*.

1.1.3 Ví dụ. Các hàm số số học sau đây là hàm nhân:

- (1) Hàm số đồng nhất $e(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$;
- (2) Hàm số đơn vị $1(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$;
- (3) Hàm số nghịch đảo $i(n) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$;
- (4) Hàm số đếm các ước $\tau(n) = \sum_{d|n} 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$;
- (5) Hàm số tổng các ước $\sigma(n) = \sum_{d|n} d, \forall n \in \mathbb{Z}^+$;
- (6) Hàm số Euler $\varphi(n) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \gcd(n, m) = 1}} 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$;

(7) Hàm số Mobius $\mu(n)$ xác định như sau:

(i) $\mu(1) = 1$,

(ii) $\mu(n) = (-1)^k$ nếu $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ là tích của k số nguyên tố phân biệt,

(iii) $\mu(n) = 0$ với các trường hợp còn lại;

(8) Hàm số lũy thừa $f(n) = n^\alpha$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, trong đó α là một số thực.

1.1.4 Chú ý. Hàm đa thức $f(n) = n^2 + 3$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ là hàm số số học nhưng không phải là hàm nhân.

1.1.5 Nhận xét. (1) Nếu $f(n)$ là hàm nhân và $m_1, \dots, m_k$ là các số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau từng đôi một thì $f(m_1 \cdots m_k) = f(m_1) \cdots f(m_k)$.

(2) Nếu f là một hàm nhân và $n > 1$ là số nguyên dương có dạng phân tích tiêu chuẩn là $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ thì $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_k^{\alpha_k})$.

1.1.6 Mệnh đề. Nếu $f \neq 0$ là một hàm nhân thì $f(1) = 1$.

Chứng minh. Từ giả thiết $f \neq 0$ suy ra tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho $f(n_0) \neq 0$. Mặt khác, do f là hàm nhân nên

$$f(n_0) = f(1 \times n_0) = f(1) f(n_0).$$

Vì $f(n_0) \neq 0$ nên chia hai vế đẳng thức trên cho $f(n_0)$ ta có $f(1) = 1$. $\square$

1.1.7 Mệnh đề. Nếu các hàm số số học f và g là các hàm nhân thì hàm tích theo từng điểm fg xác định bởi $fg(n) = f(n)g(n)$ cũng là một hàm nhân.

Chứng minh. Với mọi cặp số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau, do các hàm f và g đã cho là hàm nhân nên ta có

$$\begin{aligned} fg(ab) &= f(ab)g(ab) \\ &= (f(a)f(b))(g(a)g(b)) \\ &= (f(a)g(a))(f(b)g(b)) \\ &= fg(a)fg(b). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra hàm tích fg là một hàm nhân. Ta có điều cần phải chứng minh. $\square$

1.1.8 Định lí. (Công thức tổng trái) Nếu số nguyên dương n có sự phân tích tiêu chuẩn là $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ thì với mọi hàm nhân f ta có công thức tổng trái trên các ước của n như sau

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\alpha_j} f(p_i^j).$$

Chứng minh. Thật vậy, sử dụng tính chất nhân của hàm số số học f , khai triển tích ở vế phải của hệ thức trên ta có

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\alpha_j} f(p_i^j) &= \sum_{\lambda_i=0,1,\dots,\alpha_i}^k f(p_1^{\lambda_1}) \cdots f(p_k^{\lambda_k}) \\ &= \sum_{\lambda_i=0,1,\dots,\alpha_i}^k f(p_1^{\lambda_1} \cdots p_k^{\lambda_k}) = \sum_{d|n} f(d). \end{aligned}$$

Như vậy, công thức tổng trái được chứng minh. $\square$

1.1.9 Ví dụ. (1) Giả sử $n = 6 = 2 \times 3$ ta có

$$\begin{aligned} P &= (f(2^0) + f(2^1)) \times (f(3^0) + f(3^1)) \\ &= (f(1) + f(2)) \times (f(1) + f(3)) \\ &= f(1)f(1) + f(1)f(2) + f(1)f(3) + f(2)f(3) \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + f(6) = \sum_{d|6} f(d) \end{aligned}$$

(2) Giả sử $n = 72 = 2^3 \times 3^2$ ta có

$$\begin{aligned} P &= (f(2^0) + f(2^1) + f(2^2) + f(2^3))(f(3^0) + f(3^1) + f(3^2)) \\ &= (f(1) + f(2) + f(2^2) + f(2^3))(f(1) + f(3) + f(3^2)) \\ &= f(1)f(1) + f(1)f(3) + f(1)f(3^2) + f(2)f(1) + f(2)f(3) + f(2)f(3^2) + \\ &\quad f(2^2)f(1) + f(2^2)f(3) + f(2^2)f(3^2) + f(2^3)f(1) + f(2^3)f(3) + f(2^3)f(3^2) \\ &\quad f(1) + f(3) + f(3^2) + f(2 \times 3) + f(2 \times 3^2) + f(2^2) + f(2^2 \times 3) + f(2^2 \times 3^2) \\ &\quad + f(2^3) + f(2^3 \times 3) + f(2^3 \times 3^2) \\ &= \sum_{d|72} f(d). \end{aligned}$$

1.1.10 Định lí. Giả sử f là hàm nhân sao cho tồn tại một số nguyên tố p_0 để cho $f(p) \neq 0$. Khi đó, nếu f thỏa mãn điều kiện

$$f(p+q) = f(p) + f(q), \forall p, q \in P$$

thì $f(2) = 2$.

Chứng minh. Ta có $f(2) + f(3) = f(5)$. Do đó, nếu $f(p) = 0$ với mọi số nguyên tố lẻ p thì $f(2) = 0$ và do đó $f(p) = 0$ với mọi số nguyên tố p . Điều này, trái với giả thiết rằng tồn tại một số nguyên tố p_0 sao cho $f(p) \neq 0$. Như vậy, ta có thể giả thiết p_0 là số nguyên tố lẻ hay $\gcd(2, p_0) = 1$. Sử dụng tính chất nhân của hàm f ta có

$$f(2)f(p_0) = f(2p_0) = f(p_0 + p_0) = f(p_0) + f(p_0) = 2f(p_0).$$

Vì $f(p_0) \neq 0$ nên chia hai vế cho $f(p_0)$ ta có $f(2) = 2$. Định lý được chứng minh. $\square$

1.2 Hàm số các ước và hàm tổng các ước

1.2.1 Định nghĩa. (Xem [7]). Giả sử n là một số nguyên dương. Khi đó

- (i) $\tau(n)$ là số các ước số nguyên dương của n (bao gồm cả 1 và n).
- (ii) $\sigma(n)$ là tổng các ước số nguyên dương của n (bao gồm cả 1 và n).

1.2.2 Ví dụ. (1) Ta có $\tau(1) = 1$, $\sigma(1) = 1$.

(2) Các ước số nguyên dương của 12 là 1, 2, 3, 4, 6, 12. Do đó,

$$\tau(12) = 6, \sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28.$$

(3) $\tau(15) = 4$, $\sigma(15) = 1 + 3 + 5 + 15 = 24$;

$$\tau(19) = 2, \sigma(19) = 1 + 19 = 20.$$

(4) Nếu p là số nguyên tố thì $\tau(p) = 2$, $\sigma(p) = p + 1$.

1.2.3 Định lí. Giả sử số nguyên dương $n > 1$ có dạng phân tích tiêu chuẩn là

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Khi đó, các ước phân biệt của n là các số hạng khác nhau của khai triển của tích sau đây:

$$P = (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1}) \cdots (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k}).$$

Chứng minh. i) Mỗi ước d của $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ có dạng $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ trong đó $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$. Từ đó suy ra rằng, các ước d có mặt trong các số hạng của khai triển của p .

ii) Mỗi số hạng trong khai triển của p có dạng $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ và do đó mỗi số hạng này là ước của n .

iii) Mọi số hạng trong khai triển của p là khác nhau.

Định lý được chứng minh ngay từ (i), (ii) và (iii). $\square$

1.2.4 Định lí. *Giả sử số nguyên dương $n > 1$ có dạng phân tích tiêu chuẩn là*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Khi đó

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1),$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Chứng minh Theo Định lý 1.2.3, $\tau(n)$ là số tất cả các số hạng trong sự khai triển của p . Do đó, $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Tương tự $\sigma(n)$ là tổng các số hạng trong khai triển của p ở trong Định lý 1.2.3 tức là p . Do đó, định lý được chứng minh bởi vì

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

với mỗi số p là ước của n . $\square$

1.2.5 Ví dụ. Giả sử $n = 2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$. Khi đó

$$\tau(2700) = (2 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = 36,$$

$$\sigma(2700) = \frac{2^3-1}{2-1} \times \frac{3^4-1}{3-1} \times \frac{5^3-1}{5-1} = 8680.$$

Điều này có nghĩa là số 2700 có 36 ước nguyên dương (kể cả 1 và 2700) và tổng các ước nguyên dương của 2700 (kể cả 1 và 2700) là bằng 8680.

1.2.6 Định lí. $\tau(n)$ là số lẻ khi và chỉ khi n là số chính phương.

Chứng minh. Giả sử số nguyên dương $n > 1$ có dạng phân tích tiêu chuẩn là

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

(i) Giả sử n là số chính phương. Khi đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là số chẵn, do đó

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

là một tích các số lẻ nên nó là một số lẻ.

(ii) Giả sử $\tau(n)$ là số lẻ. Khi đó $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ là số lẻ, do đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các số chẵn. Do đó, n là số chính phương. $\square$

1.2.7 Hệ quả. $\tau(n)$ là số chẵn khi và chỉ khi n không là số chính phương.

1.2.8 Định lí. Một số nguyên dương n có thể phân tích thành tích của hai thừa số

(i) bằng $\frac{1}{2}\tau(n)$ cách khi và chỉ khi n không là số chính phương;

(ii) bằng $\frac{1}{2}(\tau(n) + 1)$ cách khi và chỉ khi n là số chính phương.

Chứng minh. Giả sử $t = \tau(n)$ và $d_1, d_2, \dots, d_t$ là dãy tất cả các ước nguyên dương của n được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Ta có d_1 là ước nguyên dương bé nhất và $\frac{n}{d_1}$ là ước lớn nhất của n . Do đó $\frac{n}{d_1} = d_t$ hay $n = d_1 d_t$. Tiếp tục d_2 là ước nguyên dương bé nhất tiếp theo và $\frac{n}{d_2}$ là ước lớn nhất tiếp theo của n . Do đó $\frac{n}{d_2} = d_{t-1}$ hay $n = d_2 d_{t-1}$. Tương tự ta có

$$n = d_1 d_t = d_2 d_{t-1} = d_3 d_{t-2} = \cdots = d_{\frac{t}{2}} d_{\frac{t+2}{2}}$$

nếu t là số chẵn và

$$n = d_1 d_t = d_2 d_{t-1} = d_3 d_{t-2} = \cdots = d_{\frac{t+1}{2}} d_{\frac{t+1}{2}}$$

nếu t là số lẻ.

Áp dụng Định lý 1.2.6 ta thu được điều cần chứng minh. $\square$

1.2.9 Ví dụ. Ta có $n = 24$ là số không chính phương. Các ước của 24 là 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Do đó $\tau(24) = 8$ và 24 có $\frac{1}{2}\tau(24) = 4$ cách phân tích thành hai thừa số, đó là

$$24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6.$$

1.2.10 Ví dụ. Ta có $n = 36$ là số chính phương. Các ước của 36 là 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36. Do đó $\tau(36) = 9$ và 36 có $\frac{\tau(36)+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$ cách phân tích thành hai thừa số

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6.$$

1.2.11 Chú ý. Giả sử $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, với $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các số nguyên tố phân biệt. Khi đó,

$$\tau(n) = (1+1)(1+1) \cdots (1+1) = 2^k.$$

Vậy n có thể phân tích thành tích của hai nhân tử bằng $\frac{1}{2}\tau(n) = 2^{k-1}$ cách.

1.2.12 Định lý. *Giả sử số nguyên dương $n > 1$ có dạng phân tích tiêu chuẩn $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Khi đó, số cách phân tích n thành tích hai thừa số nguyên tố cùng nhau là 2^{k-1} .*

Chứng minh. Giả sử x và y là hai nhân tử bất kỳ của n sao cho

$$n = xy, \quad \gcd(x, y) = 1.$$

Khi đó, rõ ràng là không có số nguyên nào trong các lũy thừa nguyên tố $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}$ có thể phân tích thành tích của x và y bởi vì $\gcd(x, y) = 1$. Do đó, chúng ta chỉ có thể có mỗi một trong các số này là bằng x hoặc là bằng y . Từ đó số cách phân tích n thành tích hai thừa số nguyên tố cùng nhau cũng bằng số cách phân tích của $p_1 p_2 \cdots p_k$ thành tích hai thừa số. Theo chú ý trên số cách phân tích này sẽ là bằng 2^{k-1} . Định lý được chứng minh. $\square$

1.2.13 Ví dụ. Ta có $n = 3^2 \times 5^3 \times 7^4$. Khi đó, $k = 3$. Do đó, số cách phân tích n thành tích hai thừa số nguyên tố cùng nhau bằng $2^{3-1} = 4$. Vì vậy, ta có

$$n = xy = 1 \times (3^2 \times 5^3 \times 7^4) = (3^2) \times (5^3 \times 7^4) = (5^3) \times (3^2 \times 7^4) = (7^4) \times (3^2 \times 5^3).$$

1.2.14 Định lí. *Hàm số các ước $\tau(n)$ và hàm tổng các ước $\sigma(n)$ là hàm nhân. Nói khác đi, giả sử $\gcd(m, n) = 1$, khi đó*

$$(i) \tau(mn) = \tau(m) \tau(n);$$

$$(ii) \sigma(mn) = \sigma(m) \sigma(n).$$

Chứng minh. (i) Nếu $m = 1$ thì

$$\tau(mn) = \tau(n) = 1 \times \tau(n) = \tau(1) \tau(n) = \tau(m) \tau(n).$$

Tương tự nếu $n = 1$ thì

$$\tau(mn) = \tau(m) = \tau(n) \times 1 = \tau(m) \tau(1) = \tau(m) \tau(n).$$

Giả sử các số nguyên dương $m, n > 1$ có dạng phân tích tiêu chuẩn là

$$m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_l^{\beta_l}, \quad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Khi đó, do $\gcd(m, n) = 1$, suy ra các số nguyên tố p_i và q_j là khác nhau và do đó mn có dạng phân tích tiêu chuẩn là

$$mn = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Áp dụng công thức tính giá trị của hàm số $\tau(n)$ ta có

$$\tau(mn) = (\beta_1 + 1) \cdots (\beta_l + 1) (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = \tau(m) \tau(n).$$

(ii) Phần này của định lý có thể chứng minh tương tự như phần (1) ở trên. $\square$

1.2.15 Định lí. $\tau(n)$ là số các điểm nguyên nằm trên hyperbol $xy = n$ trong góc phần tư thứ nhất.

Chứng minh. Giả sử $d_1, d_2, \dots, d_t$ là tất cả các ước nguyên dương của n . Khi đó, $\tau(n)$ các điểm nguyên $\left(d_1, \frac{n}{d_1}\right), \left(d_2, \frac{n}{d_2}\right), \dots, \left(d_t, \frac{n}{d_t}\right)$ nằm trên hyperbol $xy = n$ trong góc phần tư thứ nhất. Mặt khác, nếu $\left(a, \frac{n}{a}\right)$ là một điểm nguyên bất kỳ trên hyperbol $xy = n$ thì điểm này thuộc vào tập hợp các điểm nguyên

vừa xét ở trên bởi vì $\frac{n}{a}$ nguyên và a là ước của n . Từ đó suy ra $\tau(n)$ là số các điểm nguyên nằm trên hyperbol $xy = n$ trong góc phần tư thứ nhất. Định lý được chứng minh. $\square$

1.2.16 Ví dụ. Nếu $n = 10$ thì $\tau(10) = 4$ và do đó các điểm nguyên nằm trên hyperbol $xy = 10$ là bốn điểm sau $(1, 10)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(10, 1)$.

1.2.17 Định lí. $\sigma(n)$ là tổng các hoành độ (hoặc là tổng các tung độ) của tất cả điểm nguyên nằm trên hyperbol $xy = n$ trong góc phần tư thứ nhất.

Chứng minh. Giả sử $d_1, d_2, \dots, d_t$ là tất cả các ước nguyên dương của n . Khi đó, theo Định lý 1.2.15 các điểm nguyên trên hyperbol $xy = n$ là

$$\left(d_1, \frac{n}{d_1}\right), \left(d_2, \frac{n}{d_2}\right), \dots, \left(d_t, \frac{n}{d_t}\right)$$

nằm trên hyperbol trong góc phần tư thứ nhất. Do đó

$$\sigma(n) = d_1 + d_2 + \dots + d_t$$

là tổng các hoành độ của tất cả các điểm trên hyperbol $xy = n$. Ta cũng có $\sigma(n) = d_1 + d_2 + \dots + d_t = \frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \dots + \frac{n}{d_t}$. Từ đó, suy ra $\sigma(n)$ là tổng các tung độ của tất cả các điểm nguyên trên hyperbol $xy = n$ trong góc phần tư thứ nhất. Định lý được chứng minh. $\square$

CHƯƠNG 2

ĐIỀU KIỆN CỘNG TÍNH TRÊN HAI SỐ NGUYÊN TỐ LẺ

2.1 Tập duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân

Giả sử m và n là các số nguyên dương và p, q, r là các số nguyên tố. Chọn $f(n)$ là một hàm nhân và giả sử E là tập con của tập hợp $\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương.

Chú ý rằng, hàm nhân $f(n)$ không đồng nhất 0 nếu và chỉ nếu tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $f(n_0) \neq 0$ và khi đó $f(1) = 1$.

2.1.1 Định nghĩa. Giả sử S là một tập hợp các hàm số học. Nếu có đúng một phần tử $f(n)$ của S thoả mãn

$$f(m+n) = f(m) + f(n), \quad \forall m, n \in E$$

thì E được gọi là *tập duy nhất cộng tính* của S .

Nhiều tác giả đã sử dụng công cụ tập duy nhất cộng tính, để mô tả các đặc trưng của hàm số học đồng nhất (xem [1], [2], [3]).

2.1.2 Mệnh đề. Tập hợp $\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương là tập duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân không đồng nhất 0.

Chứng minh. Trước hết, với mỗi hàm nhân $f(n)$, từ điều kiện

$$f(m+n) = f(m) + f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Ta suy ra

$$f(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_k),$$

với mọi $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2$.

Do giả thiết hàm nhân $f(n)$ không đồng nhất 0 nên ta có $f(1) = 1$. Do đó với mọi số nguyên dương n có

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

Từ đây suy ra trong tập hợp các hàm nhân không đồng nhất 0, tồn tại duy nhất hàm số học đồng nhất $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f(m + n) = f(m) + f(n), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Như vậy, tập hợp $\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương là tập cộng tính duy nhất của tập hợp các hàm nhân không đồng nhất 0. $\square$

2.1.3 Mệnh đề. *Tập hợp $2\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương chẵn không phải là tập duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân không đồng nhất 0.*

Chứng minh. Rõ ràng là hàm đồng nhất $f(n)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(m + n) = f(m) + f(n), \forall m, n \in 2\mathbb{Z}^+.$$

Ngoài ra, hàm nhân $g(n)$ được xác định như sau: $g(n) = 0$ với n là số nguyên dương chẵn và $g(n) = 1$ với n là số nguyên dương lẻ cũng thỏa mãn điều kiện

$$g(m + n) = g(m) + g(n) = 0, \forall m, n \in 2\mathbb{Z}^+.$$

Như vậy, tồn tại hai hàm nhân khác nhau thỏa mãn điều cộng tính. Do đó, tập hợp $2\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương chẵn không phải là tập cộng tính duy nhất của tập hợp các hàm nhân. $\square$

2.1.4 Mệnh đề. *Tập hợp các số nguyên dương lẻ không phải là tập duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân không đồng nhất 0.*

Chứng minh. Giả sử $g_1(n) = n$ với mọi số nguyên dương n và $g_2(n) = 1$ nếu n là số lẻ và $g_2(n) = 2$ nếu n là số chẵn. Kiểm tra được $g_1(n)$ và $g_2(n)$ là hai hàm nhân không đồng nhất 0. Ngoài ra, ta còn có

$$g_i(n+m) = g_i(n) + g_i(m), \quad i = 1, 2.$$

với mọi số nguyên dương lẻ m, n tùy ý. Thật vậy, với các số nguyên dương lẻ m, n tùy ý, ta luôn có $m+n$ là số chẵn, do đó

$$\begin{aligned} g_1(m+n) &= m+n = g_1(m) + g_1(n), \\ g_2(m+n) &= 2 = 1+1 = g_2(m) + g_2(n). \end{aligned}$$

Như vậy, tập các số nguyên lẻ không phải là tập duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân không đồng nhất 0. $\square$

2.1.5 Chú ý. Tập hợp các số nguyên tố là tập duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân không triệt tiêu ít nhất tại một số nguyên tố nào đó.

Năm 1992, C. A. Spiro [6] đã chứng minh rằng tập hợp tất cả các số nguyên tố là một tập hợp duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân f sao cho $f(p_0) \neq 0$ với một số nguyên tố p_0 nào đó. Nói rõ hơn, Claudia A. Spiro [6] đã chứng minh rằng: *Giả sử f là một hàm nhân sao cho tồn tại một số nguyên tố p_0 mà tại đó f không triệt tiêu. Khi đó, nếu*

$$f(p) + f(q) = f(p+q), \quad \forall p, q \in P,$$

thì $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^$.*

Ở cuối bài báo [6], C. A. Spiro đã đưa ra câu hỏi: Nếu tập hợp tất cả các số nguyên tố đủ lớn là tập duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân f sao cho $f(p_0) \neq 0$ với một số nguyên tố p_0 nào đó, thì liệu rằng tồn tại một tập hợp con của các số nguyên tố có mật độ dương thấp trong tập hợp các số nguyên tố, không phải là tập duy nhất cộng tính cho tập các hàm nhân không triệt tiêu hay không?

2.1.6 Chú ý. Tập hợp các số chính phương là tập hợp duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân không triệt tiêu ít nhất tại một số nguyên tố nào đó.

Năm 1996, Phạm Văn Chung (xem bài báo: P. V. Chung, Multiplicative functions satisfying the equation $f(m^2 + n^2) = f(m^2) + f(n^2)$, Math. Slovaca,

46 (1996), 165–171) đã đưa ra một đặc trưng cho hàm đồng nhất bởi tập cộng tính duy nhất E gồm các số chính phương như sau:

Giả sử f là một hàm nhân và tồn tại một số nguyên tố p_0 sao cho $f(p_0) \neq 0$. Khi đó, nếu

$$f(m^2 + n^2) = f(m^2) + f(n^2), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

thì $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

2.1.7 Chú ý. Tập hợp các số nguyên tố hợp với tập các số chính phương là tập hợp duy nhất cộng tính của tập hợp các hàm nhân.

Năm 1997, Jean – Marie De Koninck, Imre Katai và Bùi Minh Phong [4] đã chỉ ra tập duy nhất cộng tính E gồm các số nguyên tố và số chính phương cho các hàm nhân bởi kết quả sau:

Giả sử f là một hàm nhân sao cho $f(1) = 1$ và thỏa mãn

$$f(p + m^2) = f(p) + f(m^2)$$

với mọi số nguyên tố p và số nguyên $m \geq 1$ thì $f(n) = n$ với mọi số nguyên $n \geq 1$.

2.2 Một số bổ đề chuẩn bị

Giả sử $g_1(n) = n$ với mọi số nguyên dương n , $g_2(n) = 1$ nếu n là số lẻ và $g_2(n) = 2$ nếu n là số chẵn. Kiểm tra được $g_1(n)$ và $g_2(n)$ là hai hàm nhân không đồng nhất 0. Ngoài ra, ta còn có

$$g_i(n + m) = g_i(n) + g_i(m), \quad i = 1, 2.$$

với mọi số nguyên dương lẻ m, n tùy ý. Thật vậy, với các số nguyên dương lẻ m, n tùy ý, ta luôn có $m + n$ là số chẵn, do đó

$$\begin{aligned} g_1(m + n) &= m + n = g_1(m) + g_1(n), \\ g_2(m + n) &= 2 = 1 + 1 = g_2(m) + g_2(n). \end{aligned}$$

Để chứng minh định lý chính của bài báo, các tác giả Kang – Kang Chen và Yong - Gao Chen đã phải diễn đạt và chứng minh bảy bổ đề sau đây.

2.2.1 Bổ đề. (xem [1, Lemma 1]). *Giả sử f và g là các hàm nhân sao cho tồn tại một số nguyên tố lẻ p_0 mà tại đó f không triệt tiêu. Khi đó, nếu*

$$f(p+q) = f(p) + f(q), \quad g(p+q) = g(p) + g(q)$$

với mọi số nguyên tố lẻ p, q và $f(n) = g(n)$ với $n = 2, 3, 4$ thì

$$(i) \quad f(n) = g(n), \quad \forall n \leq 18.$$

(ii) Nếu $f(3) \neq 0$ thì hoặc $f(n) = g_1(n)$ với $n = 1, 2, 3, 4$ hoặc $f(n) = g_2(n)$ với $n = 1, 2, 3, 4$.

Chứng minh. Bởi vì $f(2)f(p_0) = f(2p_0) = f(p_0 + p_0) = 2f(p_0)$ và $f(p_0) \neq 0$ nên $f(2) = 2$. Lại do $f(2) = f(2 \times 1) = f(2)f(1)$ ta có $f(1) = 1$.

Bây giờ ta viết $f(n)$ như một đa thức của $f(3)$ và $f(4)$. Vì rằng

$$\begin{aligned} 2f(5) &= f(2)f(5) = f(2 \times 5) = f(10) = f(3+7) = f(3) + f(7), \\ f(4)f(3) &= f(12) = f(5+7) = f(5) + f(7), \end{aligned}$$

Ta có

$$2f(5) - f(3) = f(7) = f(12) - f(5) = f(4)f(3) - f(5).$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(5) &= \frac{1}{3}f(3)(f(4) + 1), \\ f(7) &= 2f(5) - f(3) = \frac{1}{3}f(3)(2f(4) - 1), \\ f(10) &= 2f(5) = \frac{2}{3}f(3)(f(4) + 1). \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} f(6) &= 2f(3), \quad f(8) = f(3) + f(5) = \frac{1}{3}f(3)(f(4) + 4), \\ f(12) &= f(3)f(4), \\ f(14) &= 2f(7) = \frac{2}{3}f(3)(2f(4) - 1), \\ f(11) &= f(14) - f(3) = \frac{1}{3}f(3)(4f(4) - 5), \\ f(15) &= f(3)f(5) = \frac{1}{3}(f(3))^2(f(4) + 1), \end{aligned}$$

$$f(16) = f(11) + f(5) = \frac{1}{3}f(3)(5f(4) - 4),$$

$$f(13) = f(16) - f(3) = \frac{1}{3}f(3)(4f(4) - 7),$$

$$f(18) = f(11) + f(7) = 2f(3)(f(4) - 1),$$

$$f(9) = \frac{f(18)}{f(2)} = \frac{f(18)}{2} = f(3)(f(4) - 1).$$

Bởi vì $f(20) = f(13) + f(7) = f(3) + f(17)$ nên

$$f(17) = f(13) + f(7) - f(3) = \frac{1}{3}f(3)(7f(4) - 11).$$

Chú ý rằng $g(2) = f(2) = 2$ (do giả thiết của bổ đề) và $g(1) = f(1) = 1$ (do f, g là hàm nhân không đồng nhất 0) và với mỗi $5 \leq n \leq 18$, $g(n)$ là đa thức của $g(3)$ và $g(4)$ giống như $f(n)$ là đa thức của $f(3)$ và $f(4)$. Vì $f(3) = g(3)$ và $f(4) = g(4)$ nên ta có $f(n) = g(n)$ với mọi $n \leq 18$.

Bởi vì $f(4)f(5) = f(20) = f(13) + f(7)$ nên ta có

$$\frac{1}{3}f(3)f(4)(f(4) + 1) = \frac{1}{3}f(3)(7f(4) - 8).$$

Nếu $f(3) \neq 0$ thì $f(4) = 2$ hoặc $f(4) = 4$. Do

$$f(3)f(8) = f(24) = f(11) + f(13)$$

nên ta có

$$\frac{1}{3}(f(3))^2(f(4) + 4) = \frac{1}{3}f(3)(9f(4) - 12).$$

Từ đó

$$f(3) = \frac{9f(4)-12}{f(4)+4} = \begin{cases} 1, & \text{khi } f(4) = 2 \\ 3, & \text{khi } f(4) = 4 \end{cases}$$

Như vậy, $f(n) = g_1(n)$ hoặc $f(n) = g_2(n)$ với $n = 1, 2, 3, 4$. Bổ đề 2.2.1 được chứng minh. $\square$

2.2.2 Bổ đề. (xem [1, Lemma 2]). *Giả sử f, g là các hàm như trong Bổ đề 2.2.1. Nếu mỗi số chẵn $2m$ với $4 \leq 2m \leq 2N$ viết được thành tổng của hai số nguyên tố, thì $f(n) = g(n)$ với mọi $n \leq N$.*

Trong bài báo [1] các tác giả Kang – Kang Chen và Yong - Gao Chen không chứng minh Bổ đề này và họ đã chỉ ra phép chứng minh này tương tự với phép

chứng minh Bổ đề 3 trong bài báo [6] của Claudia A. Spiro (xem [6], Lemma 3). Tham khảo bài báo [6], tác giả luận văn đã thực hiện việc chứng minh như sau. Chú ý rằng trong [6] Claudia A. Spiro phát biểu cho hàm nhân f và hàm đồng nhất còn ở đây trong Bổ đề 2.2.2 phát biểu cho hai hàm nhân f, g .

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2.1 ta có $f(n) = g(n)$, $1 \leq n \leq 18$. Giả sử M là số nguyên với $18 \leq M \leq N - 1$, và ta đã có $f(n) = g(n)$, $\forall n \leq M$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $f(M + 1) = g(M + 1)$. Thật vậy, nếu $M + 1$ là số nguyên chẵn thì theo giả thiết của bổ đề sẽ tồn tại các số nguyên tố lẻ p, q sao cho $M + 1 = p + q$. Do đó, từ giả thiết cộng tính trên hai số nguyên tố lẻ của hàm f và từ giả thiết quy nạp $f(n) = g(n)$, $\forall n \leq M$, chúng ta suy ra

$$f(M + 1) = f(p + q) = f(p) + f(q) = g(p) + g(q) = g(M + 1).$$

Như vậy, chúng ta chỉ cần chứng minh $f(M + 1) = g(M + 1)$ khi $M + 1$ là số nguyên lẻ. Nếu $M + 1$ là số nguyên tố lẻ, thì giả sử $q \in \{3, 5\}$ được chọn sao cho $M + 1 + q \equiv 2 \pmod{4}$. Từ giả thiết cộng tính trên hai số nguyên tố lẻ của hàm f có

$$f(M + 1 + q) = f(M + 1) + f(q).$$

Vì 2 và $\frac{M+1+q}{2}$ nguyên tố cùng nhau nên sử dụng tính chất của hàm nhân ta nhận được đẳng thức

$$f(M + 1 + q) = f\left(2\left(\frac{M+1+q}{2}\right)\right) = 2f\left(\frac{M+1+q}{2}\right) = f(M + 1) + f(q).$$

Bởi vì $f(n) = g(n)$, $\forall n \leq N$, suy ra

$$2g\left(\frac{M+1+q}{2}\right) = g(M + 1) + g(q) = f(M + 1) + f(q).$$

Từ đó suy ra $f(M + 1) = g(M + 1)$. Bây giờ, nếu $M + 1$ không là số nguyên tố, thì do $M \leq N - 1$, nên có các số nguyên tố lẻ p, q sao cho

$$2(M + 1) = p + q, \quad p < M + 1 < q.$$

Sử dụng giả thiết cộng tính trên hai số nguyên tố lẻ và tính chất nhân của f ta có

$$2f(M+1) = f(2(M+1)) = f(p+q) = f(p) + f(q).$$

Vì $p < M+1$, nên $f(p) = g(p)$. Vì vậy

$$2f(M+1) = g(p) + f(q). \quad (*)$$

Chọn $r \in \{3, 5, 7, 17\}$ để cho $q+r \equiv 4 \pmod{8}$. Sử dụng giả thiết cộng tính trên hai số nguyên tố lẻ và tính chất nhân của hàm f cho ta

$$f(q) + f(r) = f(q+r) = f\left(4\left(\frac{q+r}{4}\right)\right) = f(4)f\left(\frac{q+r}{4}\right).$$

Mặt khác, theo Bổ đề 2.2.1 ta có $f(r) = g(r)$. Do đó, sử dụng giả thiết $f(n) = g(n)$, $\forall n \leq M$, suy ra

$$f(q) + g(r) = g(4)g\left(\frac{q+r}{4}\right) = g(q+r) = g(q) + g(r).$$

Từ đó $f(q) = g(q)$. Sử dụng hệ thức (*) ta có

$$2f(M+1) = g(p) + f(q) = g(p) + g(q) = g(p+q) = g(2(M+1)) = 2g(M+1).$$

Như vậy, $f(M+1) = g(M+1)$ và Bổ đề 2.2.2 được chứng minh. $\square$

Với mỗi số nguyên tố bất kỳ p và n là số nguyên dương, Claudia A. Spiro ký hiệu trong [6] như sau:

$$H = \{n : \nu_p(n) \leq 1 \text{ khi } p > 1000; \nu_p(n) \leq [9 \log 10 / \log p] - 1 \text{ khi } p < 1000\}.$$

với $\nu_p(n)$ là số mũ của p trong dạng phân tích tiêu chuẩn của n .

Ta có thể viết lại như sau

$$H = \{n : \nu_p(n) \leq 1, \text{ khi } p > 1000; p^{\nu_p(n)+1} < 10^9, \text{ khi } p < 1000\}$$

2.2.3 Bổ đề. (xem [6, Lemma 5]) Với mỗi số nguyên tố $p > 10^{10}$ tồn tại số nguyên tố $q < p$ sao cho $p+q \in H$.

Phát triển kết quả của Claudia A. Spiro trong [6], các tác giả Kang – Kang Chen và Yong - Gao Chen thu được bổ đề sau.

2.2.4 Bổ đề. (xem [1, Lemma 3]) Với mỗi số nguyên tố $p > 10^{10}$ tồn tại ít nhất 3×10^7 số nguyên tố $q < p$ sao cho $p+q \in H$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2.3 (xem [6, Lemma 5]) ta có số $N(p)$ các số nguyên tố $q < p$ sao cho $p + q \in H$ thỏa mãn

$$N(p) \geq 0,3 \frac{p-1}{\log(p-1)} \geq 0,3 \times \frac{10^{10}}{10 \log 10} > 3 \times 10^7.$$

Bất đẳng thức trên kết thúc chứng minh Bổ đề 2.2.4. $\square$

2.2.5 Bổ đề. (xem [6, Lemma 4]) *Hầu như các số nguyên dương chẵn đều có thể biểu diễn bằng tổng của hai số nguyên tố.*

Chú ý rằng, Bổ đề 2.2.5 là một hệ quả trực tiếp của định lý chính ở trong bài báo sau đây: T. Estermann (1938), “On Goldbach’s problem: Proof that almost all even positive integer are sums of two primes”, *Proc. London Math. Soc.*, 44 (2), 307-314. Có thể xem trong [6, Lemma 4] hoặc xem trong [1, Lemma 4].

Từ năm 1938, T. Estermann trong công trình trên đã công bố kết quả bất ngờ sau đây: *Hầu như các số nguyên dương chẵn đều viết được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố.* Tuy nhiên, giữa hầu như đến toàn bộ còn là khoảng cách rất xa mà đến tận nay loài người vẫn chưa giải quyết được.

Một tập con S các số nguyên dương được gọi là có *tỷ trọng* m nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{n} = m, \text{ với } S_n = \{x \in S : x \leq n\}.$$

2.2.6 Ví dụ. Gọi S là tập hợp của các số nguyên dương chẵn, sao cho mỗi số không biểu diễn được thành tổng của hai số nguyên tố. Khi đó, S có tỷ trọng dương.

2.2.7 Bổ đề. (xem [6, Lemma 7]) *Với mỗi số nguyên dương n , ta đặt*

$$H_n = \{mn : m \in H, \gcd(m, n) = 1\} \text{ khi } n \text{ là số chẵn};$$

$$H_n = \{2mn : 2m \in H, \gcd(m, n) = 1\} \text{ khi } n \text{ là số lẻ}.$$

Khi đó, H_n thỏa mãn các tính chất sau:

- (i) *Mỗi phần tử của H_n là số nguyên chẵn,*
- (ii) *Tập hợp H_n có tỷ trọng dưới dương.*

2.2.8 Bổ đề. (xem [6, Lemma 8]) *Nếu $n \in H$, thì mọi ước nguyên dương của n đều thuộc H .*

Chứng minh. Kết quả này được suy từ định nghĩa của tập

$$H = \{n : \nu_p(n) \leq 1, \text{ khi } p > 1000; \nu_p(n) \leq 10^9, \text{ khi } p < 1000\}.$$

2.2.9 Bổ đề. (xem [1, Lemma 7]) *Giả sử f và g là các hàm nhân sao cho tồn tại một số nguyên tố lẻ p_0 mà tại đó f không triệt tiêu. Khi đó, nếu*

$$f(p+q) = f(p) + f(q), \quad g(p+q) = g(p) + g(q)$$

với mọi số nguyên tố lẻ p, q và $f(n) = g(n)$ với $n = 2, 3, 4$ thì $f(n) = g(n)$ với mọi số nguyên dương $n \in H$.

Chứng minh. Vì giả thuyết Goldbach đúng với mọi số nguyên dương chẵn $n \leq 2 \times 10^{10}$ nên theo Bổ đề 2.2.2 ta có $f(n) = g(n)$ với mọi $n \leq 10^{10}$. Bây giờ giả sử $n \in H$ và $n \geq 10^{10}$ và giả thiết quy nạp rằng $f(m) = g(m)$ với mọi $m < n$ và $m \in H$. Nếu n không phải là lũy thừa của một số nguyên tố thì $n = mk$ với $m > 1, k > 1, \gcd(m, k) = 1$. Sử dụng Bổ đề 2.2.7 (xem [6, Lemma 8]) ta có $m, k \in H$. Do đó sử dụng tính chất nhân của các hàm f, g và giả thiết quy nạp ta có

$$f(n) = f(mk) = f(m)f(k) = g(m)g(k) = g(mk) = g(n).$$

Nếu n là lũy thừa của một số nguyên tố thì khi đó do $n \in H$ và $n \geq 10^{10}$ nên n là một số nguyên tố. Theo Bổ đề 2.2.4 (xem [1, Lemma 3]) tồn tại số nguyên tố lẻ $q < n$ để cho $n+q \in H$. Nếu $n+q$ là lũy thừa của số nguyên tố thì do $n+q \in H$ và $n+q > 10^{10}$ nên $n+q$ phải là số nguyên tố. Điều này dẫn đến một mâu thuẫn với n và q đều là những số nguyên tố lẻ. Nếu $n+q$ không phải là lũy thừa của số nguyên tố thì $n+q = m'k'$ với $m' > 1, k' > 1, \gcd(m', k') = 1$. Theo Bổ đề 2.2.7 (xem [6, Lemma 8]) ta có $m', k' \in H$. Vì rằng $q < n$ nên ta có $m' < n, k' < n$. Do đó, sử dụng tính chất nhân và tính chất cộng tính trên các số nguyên tố lẻ của các hàm f, g và giả thiết quy nạp ta có dãy các đẳng thức sau

$$f(n) + f(q) = f(n+q) = f(m'k') = f(m')f(k') = g(m')g(k')$$

$$= g(m'k') = g(n + q) = g(n) + g(q).$$

Vì q là số nguyên tố nên $q \in H$. Do $q < n$ nên sử dụng giả thiết quy nạp ta có $f(q) = g(q)$. Từ đó suy ra được $f(n) = g(n)$. Phép chứng minh bổ đề này được hoàn thành. $\square$

2.3 Đặc trưng đồng nhất của hàm nhân bởi điều kiện 2 - cộng tính trên các số nguyên tố lẻ

Năm 1992, Claudia A. Spiro [6] đã chứng minh rằng, tập hợp P tất cả các số nguyên tố là tập xác định duy nhất của tập hợp S các hàm nhân f thỏa mãn điều kiện $f(p_0) \neq 0$ với một số nguyên tố p_0 nào đó. Nói rõ hơn, Claudia A. Spiro [6] đã chỉ ra rằng, nếu một hàm nhân khác không f là cộng tính trên tổng hai số nguyên tố, nghĩa là

$$f(p + q) = f(p) + f(q), \forall p, q \in P,$$

thì f là hàm số đồng nhất: $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ở cuối bài báo [6], Claudia A. Spiro đưa ra hai câu hỏi:

1) Tập hợp tất cả các số nguyên tố đủ lớn có phải là tập xác định duy nhất của tập hợp S hay không?

2) Tồn tại hay không một tập hợp con của tập hợp các số nguyên tố có tỉ trọng dương đủ nhỏ mà không phải là tập xác định duy nhất của tập các hàm nhân?

Trong bài báo [1] các tác giả Kang – Kang Chen và Yong - Gao Chen đã trả lời câu hỏi 1) của Claudia A. Spiro bằng việc xây dựng hai hàm nhân làm phản ví dụ là $g_1(n)$ và $g_2(n)$ sau đây.

2.3.1 Mệnh đề. *Tập hợp các số nguyên tố lẻ không phải là tập xác định duy nhất của tập hợp các hàm nhân không đồng nhất 0.*

Chứng minh. Giả sử $g_1(n) = n$ với mọi số nguyên dương n và $g_2(n) = 1$ nếu n là số lẻ và $g_2(n) = 2$ nếu n là số chẵn. Kiểm tra được $g_1(n)$ và $g_2(n)$ là hai hàm nhân và không đồng nhất 0. Ngoài ra, ta còn có

$$g_i(n+m) = g_i(n) + g_i(m), \quad i = 1, 2.$$

với mọi số nguyên dương lẻ m, n tùy ý. Thật vậy, với các số nguyên dương lẻ m, n tùy ý, ta luôn có $m+n$ là số chẵn, do đó

$$\begin{aligned} g_1(n+m) &= n+m = g_1(n) + g_1(m) \\ g_2(n+m) &= 2 = 1+1 = g_2(n) + g_2(m). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra tập hợp các số nguyên dương lẻ không phải là tập xác định duy nhất của tập hợp các hàm nhân không đồng nhất 0. Và vì vậy, tập hợp các số nguyên tố lẻ cũng không phải là tập xác định duy nhất của tập hợp các hàm nhân không đồng nhất 0. $\square$

2.3.2 Nhận xét. Mệnh đề 2.3.1. đã trả lời câu hỏi 1) ở trên của Claudi A. Spiro. Nói rõ hơn, tập hợp tất cả các số nguyên tố (lẻ) đủ lớn không phải là tập xác định duy nhất của tập hợp S các hàm nhân.

2.3.3 Định lí. (Theorem 2, [1]) *Giả sử f và g là các hàm nhân sao cho tồn tại một số nguyên tố lẻ p_0 mà tại đó f không triệt tiêu. Khi đó, nếu*

$$f(p+q) = f(p) + f(q), \quad g(p+q) = g(p) + g(q)$$

với mọi số nguyên tố lẻ p, q và $f(n) = g(n)$ với $n = 2, 3, 4$ thì $f(n) = g(n)$ với mọi số nguyên dương n .

Chứng minh. Giả sử $f(3) = 0$. Ta định nghĩa một hàm g_3 bởi

$$g_3(2) = f(2), \quad g_3(3) = 0, \quad g_3(4) = f(4), \quad g_3(n) = f(n), \quad n \geq 5.$$

Khi đó $g_3(p) + g_3(q) = g_3(p+q)$ với mọi số nguyên tố lẻ p, q . Theo Bổ đề 2.2.9 ta có $f(n) = g_3(n)$, $\forall n \in H$. Vì $p_0 \in H$ nên ta có $f(p_0) = g_3(p_0) = 0$, ta gặp mâu thuẫn với $f(p_0) \neq 0$. Do đó $f(3) \neq 0$. Theo Bổ đề 2.2.1 tồn tại $i \in \{1, 2\}$ sao cho $f(n) = g_i(n)$ với $n = 1, 2, 3, 4$. Theo Bổ đề 2.2.9 ta có $f(n) = g_i(n)$ với mọi $n \in H$. Bây giờ nếu Định lý 2.3.3 sai và giả sử n là số nguyên dương nhỏ nhất trong phản ví dụ, nghĩa là $f(n) \neq g_i(n)$. Khi đó mỗi $k \in H_n$, giả sử

$k = nm$, ta có $m \in H$, $\gcd(m, n) = 1$, k là số chẵn và do đó $f(m) = g_i(m)$. Vì mỗi số nguyên tố $p \in H$ nên ta có $f(p) = g_i(p)$ với mọi số nguyên tố p . Do đó, nếu k là tổng của hai số nguyên tố lẻ thì $f(k) = g_i(k)$. Vì $g_i(m) \neq 0$ và

$$g_i(n)g_i(m) = g_i(nm) = g_i(k) = f(k) = f(nm) = f(n)f(m) = f(n)g_i(m)$$

nên ta có $f(n) = g_i(n)$ là một mâu thuẫn với giả thiết của n . Như vậy, không có số nguyên dương chẵn nào thuộc H_n là tổng của hai số nguyên tố lẻ. Theo Bổ đề 2.2.5 ta có H_n là tập hợp có tỉ trọng bằng 0. Kết quả này mâu thuẫn với Bổ đề 2.2.7 nói rằng H_n là tập hợp có tỉ trọng dương. Bởi vì, $g(n) = f(n) = g_i(n)$ với $n = 1, 2, 3, 4$, nên lập luận tương tự cho ta $g(n) = g_i(n)$ với mọi số nguyên dương n . Điều này kết thúc phép chứng minh của định lý. $\square$

Áp dụng Định lý 2.3.3 các tác giả Kang – Kang Chen và Yong - Gao Chen thu được định lý sau đây.

Nhắc lại rằng, ký hiệu $g_1(n) = n$ với mọi số nguyên dương n và $g_2(n) = 1$ nếu n là số lẻ và $g_2(n) = 2$ nếu n là số chẵn. Kiểm tra được $g_1(n)$ và $g_2(n)$ là hai hàm nhân và không đồng nhất 0.

2.3.4 Định lí. (xem [1, Theorem 1]) *Giả sử f là hàm nhân sao cho tồn tại một số nguyên tố lẻ p_0 mà tại đó f không triệt tiêu. Khi đó, nếu*

$$f(p+q) = f(p) + f(q)$$

với mọi số nguyên tố lẻ p, q thì $f = g_1$ hoặc $f = g_2$.

Chứng minh. Sử dụng phần đầu của phép chứng minh trong Định lý 2.3.3 ta có $f(3) \neq 0$. Theo Bổ đề 2.2.1 tồn tại các chỉ số $i \in \{1, 2\}$ sao cho $f(n) = g_i(n)$ với $n = 1, 2, 3, 4$. Theo Định lý 2.3.3 ta có $f = g_1$ hoặc $f = g_2$. Điều này kết thúc phép chứng minh của định lý. $\square$

Một kết quả trực tiếp của Định lý 2.3.4 là hệ quả sau.

2.3.5 Hệ quả. (xem [1]) *Một hàm nhân f là hàm số học đồng nhất khi và chỉ khi $f(3) = 3$ và*

$$f(p+q) = f(p) + f(q)$$

với mọi số nguyên tố lẻ p, q .

Chứng minh. Áp dụng Định lý 2.3.4 với $p_0 = 3$ ta có $f(n) = g_1(n)$ với mọi số nguyên dương n vì $f(3) = 3 \neq g_2(3) = 1$ hay $f = g_1$ là hàm số số học đồng nhất. $\square$

2.3.6 Nhận xét. Cho hai số a, b , giả sử $f(1) = 1, f(2) = a, f(4) = b$ và $f(n) = 0$ với mọi $n \neq 1, 2, 4$. Do đó có vô số các hàm nhân f với $f(2) \neq 0$ và

$$f(p+q) = f(p) + f(q)$$

với mọi số nguyên tố lẻ p, q . Ngược lại, Kang – Kang Chen và Yong - Gao Chen đặt ra giả thuyết sau.

2.3.7 Giả thuyết. ([4, Conjecture 1]) Nếu f là hàm nhân sao cho $f(2) \neq 0, f(3) = 0$ và $f(p+q) = f(p) + f(q)$ với mọi số nguyên tố lẻ p, q thì $f(n) = 0$ với mọi $n \geq 5$.

2.3.8 Nhận xét. Nếu f thỏa mãn các điều kiện của Giả thuyết 2.3.7, thì $f(p) = 0$ với mọi số nguyên tố $p \geq 5$ (xem phần chứng minh của Định lý 2.3.3). Như vậy bằng quy nạp theo n , chúng ta có thể chứng minh rằng từ giả thuyết Goldbach suy ra được Giả thuyết 2.3.7 (xem [1, Conjecture 1]). Điều này ngụ ý rằng nếu giả thuyết 2.3.7 là sai, thì giả thuyết Goldbach cũng sai.

Được thúc đẩy bởi Bổ đề 2.2.1, các tác giả Kang – Kang Chen và Yong - Gao Chen đặt ra giả thuyết sau.

2.3.9 Giả thuyết. (xem [1, Conjecture 2]) Giả sử f là hàm nhân sao cho $f(2) = 2$ và

$$f(p+q) = f(p) + f(q)$$

với mọi số nguyên tố lẻ p, q thì

$$f(2n) = \frac{1}{3}f(3)((n-3)f(4) + 12 - 2n),$$

$$f(2n-1) = \frac{1}{3}f(3)((n-2)f(4) + 7 - 2n), \quad n = 3, 4, \dots$$

Nếu giả thuyết này được trả lời, thì chúng ta nhiều khả năng xây dựng được các tập duy nhất cộng tính cho tập hợp các hàm nhân thỏa mãn điều kiện $f(2) = 2$.

KẾT LUẬN

Giả thuyết Goldbach mạnh nói rằng mọi số nguyên chẵn lớn hơn 2 là tổng của hai số nguyên tố vẫn đang thu hút sự quan tâm của cộng đồng toán học khi gần đây nhà toán học Terence Tao đã tiệm cận được với việc chứng minh giả thuyết Goldbach yếu. Điều kiện cộng tính trên các số nguyên tố lẻ của hàm nhân có liên quan chặt chẽ đến các giả thuyết Goldbach. Do vậy, dựa vào tài liệu [1] của tác giả Kang – Kang Chen và Yong - Gao Chen, luận văn của chúng tôi có các đóng góp cụ thể sau:

- 1 - Hệ thống lại các khái niệm, kết quả về các hàm số số học,
- 2 - Trình bày lại bài báo [1] nhằm tìm hiểu sâu thêm tính xác định duy nhất bởi điều kiện cộng tính của tập các hàm nhân trên tập các số nguyên tố lẻ,
- 3 - Bổ sung và làm rõ các chứng minh của bảy bổ đề và hai định lý (Định lý 2.3.3, Định lý 2.3.4) cùng một hệ quả (Hệ quả 2.3.5) trong [1] một cách chi tiết và tường minh hơn,
- 4 - Tìm hiểu một số kết quả nghiên cứu về tính xác định duy nhất của hàm nhân bởi điều kiện cộng tính trên các số nguyên tố, số chính phương của các tác giả C. Spiro [6], J. H. Fang, P.V. Chung và B. M. Phong ([2], [3], [4], [5], [6]).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Kang-Kang Chen and Yong-Gao Chen (2010), On $f(p+q) = f(p) + f(q)$ for all odd primes p and q , *Publ. Math. Debrecen*, 76/4, 425-430.
- [2] Yong-Gao Chen, Jin-Hui Fang, Pingzhi Yuan, Yueping Zheng (2016), On multiplicative functions with $f(p+q+n_0) = f(p) + f(q) + f(n_0)$, *J. Number Theory*, 165, 270-289.
- [3] P. V. Chung and B. M. Phong (1999), Additive uniqueness sets for multiplicative functions, *Publ. Math. Debrecen*, 55, 237-243.
- [4] J. M. De Koninck, I. Katai and B. M. Phong (1997), A new characteristic of the identity function, *J. Number Theory*, 63, 325-338.
- [5] B. M. Phong, A characterization of the identity function with an equation of Hosszu type (2006), *Publ. Math. Debrecen*, 69, 219-226.
- [6] C. A. Spiro (1992), Additive uniqueness sets for arithmetic functions, *Journal of Number Theory*, 42, 232-246.
- [7] S. G. Telang, *Number Theory*, McGraw-Hill, New Delhi, 2001.