

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

PHẠM ANH DŨNG

ỨNG DỤNG CỦA HÌNH HỌC ĐẠI SỐ
MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG CÁNH TAY NGƯỜI MÁY

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

PHẠM ANH DŨNG

ỨNG DỤNG CỦA HÌNH HỌC ĐẠI SỐ
MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG CÁNH TAY NGƯỜI MÁY

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 8460104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. THIỀU ĐÌNH PHONG

Nghệ An - 2022

MỤC LỤC

Mục lục	1
Mở đầu	2
1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	4
1.1. Toán tử tuyến tính	4
1.2. Phép quay tâm O góc quay θ trong Oxy	8
1.3. Tập đại số, Đa tạp affine	10
2 MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG CÁNH TAY NGƯỜI MÁY	13
2.1. Mô tả hình học của một số chi tiết trong "cánh tay" người máy . .	13
2.2. Bài toán mô tả chuyển động cánh tay người máy	15
2.3. Chuyển động của cánh tay người máy với 3 khớp quay	18
2.4. Chuyển động của cánh tay người máy với khớp lằng trụ	22
Kết luận	26
Tài liệu tham khảo	27

Mở Đầu

Trong thế giới ngày nay, người máy (robot) đã thay thế rất nhiều công việc nặng nhọc và nguy hiểm cho con người. Rất nhiều quốc gia đầu tư cho sự phát triển của Robotics, việc phát triển Robotics là một thách thức cho mỗi quốc gia thể hiện mức độ công nghệ tiên tiến của quốc gia đó.

Robotics là một thuật ngữ tiếng Anh chuyên ngành để chỉ ngành kỹ thuật và khoa học kỹ thuật cơ khí liên ngành, ngành kỹ thuật cơ khí, điện tử, công nghệ – thông tin,...

Robotics tích hợp các lĩnh vực kỹ thuật cơ khí , kỹ thuật điện, kỹ thuật thông tin , cơ điện tử , điện tử , kỹ thuật sinh học , kỹ thuật máy tính, kỹ thuật điều khiển, kỹ thuật phần mềm , toán học,...

Robotics là sản phẩm của ngành cơ khí điện tử và công nghệ AI, với hệ thống máy tính điều khiển nhận thức, kiểm soát, xử lý và phản hồi thông tin.

Robotics đã trở thành một ngành khoa học lớn được xã hội rất quan tâm và coi trọng. Ngành Robotics có nhiệm vụ nghiên cứu, thiết kế và chế tạo các loại robot phục vụ cho cuộc sống hiện đại của con người.

Hiện nay, nghiên cứu Robotics không chỉ đáp ứng cho nhu cầu sản xuất, dân sinh, mà còn có mối liên hệ chặt chẽ với lĩnh vực an ninh – quốc phòng.

Sự ra đời của ngành Robotics đã tạo ra nhiều loại robot có khả năng ứng dụng cao trong cuộc sống con người. Đặc biệt là khả năng cơ động thay thế được nhiều hoạt động của con người về cả sức lực, ngoại hình và giọng nói.

Không đặt mục tiêu ở tầm vĩ mô như thế, luận văn đi tìm hiểu một vấn đề vi mô hơn về ứng dụng của công cụ hình học đại số đó là mô tả chuyển động của cánh tay người máy trên mặt phẳng.

Trên cơ sở đó chúng tôi chọn đề tài “**Ứng dụng Hình học đại số mô tả chuyển động cánh tay người máy**” để trình bày lại các kiến thức và kết quả về bài toán động học chuyển tiếp trong tài liệu tham khảo chính [1].

Luận văn được thực hiện tại Trường Đại học Vinh với sự hướng dẫn của TS. Thiều Đình Phong. Tác giả xin trân trọng cảm ơn sự hướng dẫn tận tình, chu đáo của TS. Thiều Đình Phong. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn tất cả các Thầy giáo, Cô giáo khác trong Chuyên ngành Đại số - Lý thuyết số của Khoa Toán - Trường Sư phạm thuộc Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập và làm luận văn. Mặc dù đã có nhiều cố gắng song luận văn có thể còn có một số sai sót, tác giả rất mong nhận được các ý kiến góp ý, bổ sung và chỉnh chữa của quý Thầy, Cô và các bạn học viên.

Nghệ An, tháng 07 năm 2022

Tác giả

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Toán tử tuyến tính

1.1.1 Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ trên trường K . Một *toán tử tuyến tính*, hay *tự đồng cấu* của V là ánh xạ tuyến tính từ V vào chính nó.

Toán tử tuyến tính là trường hợp riêng của ánh xạ tuyến tính nhưng có cấu trúc phong phú, có nhiều ứng dụng, đặc biệt trong lý thuyết ma trận. Ngược lại, việc nghiên cứu một ánh xạ tuyến tính tùy ý có thể đưa về việc nghiên cứu toán tử tuyến tính. Tập các toán tử tuyến tính của V được kí hiệu là $\text{End}(V)$.

1.1.2 Định nghĩa. Cho $\varphi \in \text{End}(V)$. Phần tử vô hướng $\lambda \in K$ được gọi là *giá trị riêng* của φ nếu tồn tại vectơ $v \neq \vec{0}$ sao cho

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Khi đó người ta gọi v là *vectơ riêng* (ứng với giá trị riêng λ) của φ .

Tương tự, ta gọi $\lambda \in K$ là *giá trị riêng* của ma trận vuông A cấp n , nếu tồn tại vectơ $0 \neq v \in K^n$ sao cho

$$A.v = \lambda v.$$

1.1.3 Ví dụ. Ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $\varphi(x, y) \mapsto (x + 3y, x - y)$ là một toán tử tuyến tính. Thật vậy, ta kiểm tra 2 tính chất:

$$\forall u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\varphi(u + v) &= \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ &= ((x_1 + 3y_1) + (x_2 + 3y_2), (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)) \\ &= (x_1 + 3y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + 3y_2, x_2 - y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2) \\ &= \varphi(u) + \varphi(v).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(ku) &= \varphi(kx_1, ky_1) = (kx_1 + 3ky_1, kx_1 - ky_1) = (k(x_1 + 3y_1), k(x_1 - y_1)) \\ &= k(x_1 + 3y_1, x_1 - y_1) = k\varphi(u).\end{aligned}$$

Vậy đây là một toán tử tuyến tính.

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Phương trình đặc trưng } |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0$$

A có 2 giá trị riêng là : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

Vậy các giá trị riêng của φ là : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

$$\text{Với } \lambda = 2 \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x + -3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy vectơ riêng của φ ứng với $\lambda_1 = 2$ là: $v_1 = (3y, y) = a(3, 1)$ với $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Với } \lambda = -2 \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy vectơ riêng của φ ứng với $\lambda_2 = -2$ là: $v_2 = (-y, y) = b(-1, 1)$ với $0 \neq b \in \mathbb{R}$.

1.1.4 Mệnh đề. Cho φ là một toán tử tuyến tính của không gian vectơ V .

(i) Nếu α là giá trị riêng của φ thì tập các vectơ riêng của φ ứng với α lập thành một không gian con. Đó chính là $\text{Ker}(\varphi - \alpha \text{id})$. Không gian con này còn được gọi là không gian con riêng (ứng với α).

Nếu giả thiết thêm $\dim V = n$ và φ có ma trận biểu diễn A theo cơ sở là S , thì

(ii) α là giá trị riêng của φ khi và chỉ khi α là nghiệm của đa thức đặc trưng $f_\varphi(t) := f_A(t) = |A - tI|$ của φ .

(iii) Kí hiệu v_S là vectơ toạ độ của v theo S . Khi đó α là giá trị riêng của φ khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$A.v_S = \alpha v_S$$

có nghiệm không tầm thường. Hơn nữa tập các nghiệm không tầm thường của hệ này là toạ độ của tất cả các vectơ riêng của φ ứng với α .

(iv) Mỗi toán tử tuyến tính của không gian vectơ n chiều có tối đa n giá trị riêng khác nhau.

1.1.5 Định nghĩa. Một phép biến hình φ là *tuyến tính* nếu nó thoả mãn hai tính chất sau đây:

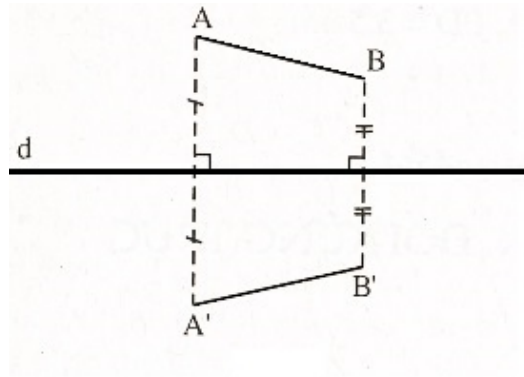
$$(1) \text{ Cộng tính: } \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v},$$

$$(2) \text{ Tỷ lệ: } \varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u}), \forall \vec{u}, \forall k \in K.$$

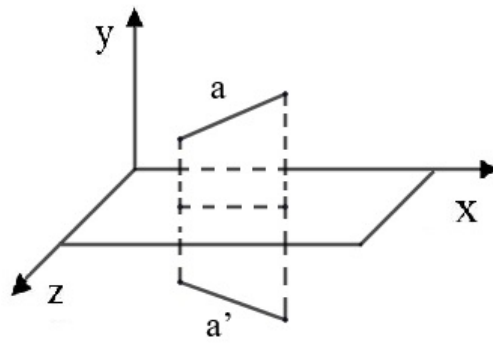
Từ tính cộng tính ta thấy $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ hay một điều kiện cần để φ tuyến tính là φ phải giữ nguyên gốc toạ độ O .

1.1.6 Nhận xét. Như vậy các phép biến hình trong mặt phẳng Oxy , không gian $Oxyz$ như phép quay, phép đối xứng qua một đường thẳng, mặt phẳng đi qua gốc toạ độ, phép chiếu, phép vị tự (*phép biến hình giữ nguyên gốc toạ độ O*) chính là các *toán tử tuyến tính*.

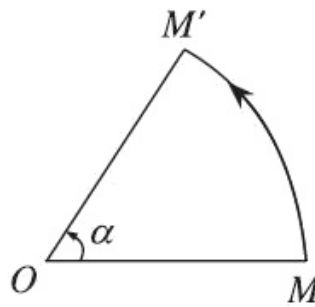
Hình ảnh minh họa một số phép biến hình là toán tử tuyến tính:



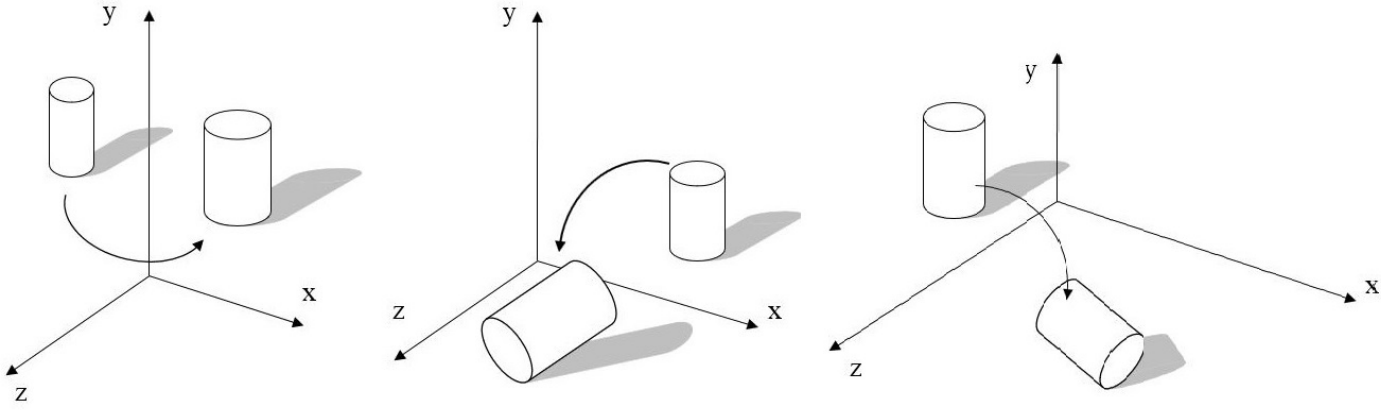
Hình 1.1: Phép đối xứng qua 1 đường thẳng



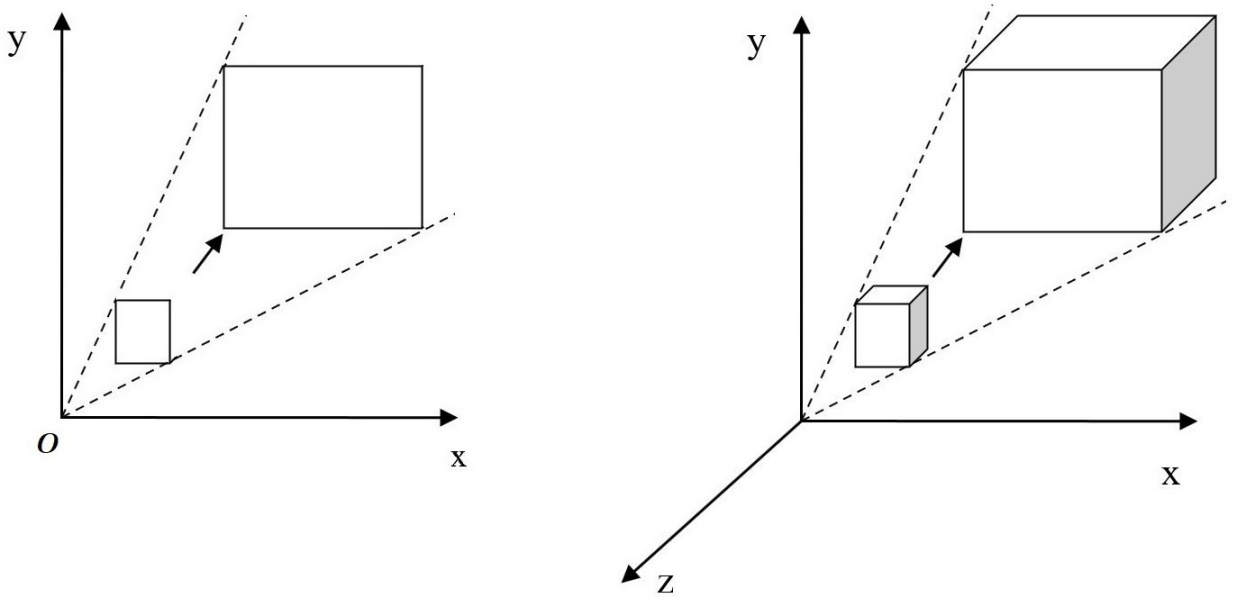
Hình 1.2: Phép đối xứng qua 1 mặt phẳng



Hình 1.3: Phép quay tâm O



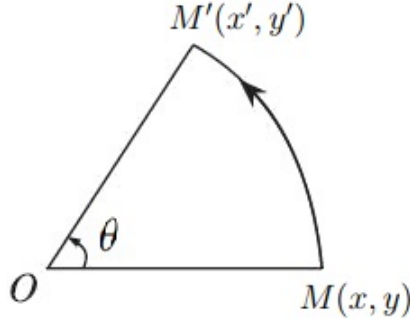
Hình 1.4: Phép quay quanh trục



Hình 1.5: Phép vị tự trong mặt phẳng và trong không gian

1.2 Phép quay tâm O góc quay θ trong Oxy

Ta đã biết phép quay làm thay đổi hướng của đối tượng. Để xác định phép quay, ta cần biết tâm quay và góc quay. Trong mặt phẳng Oxy phép quay điểm $M(x, y)$ quanh gốc tọa độ O một góc quay θ tạo thành điểm $M'(x', y')$ có công



Hình 1.6: Phép quay tâm O góc θ

thức toạ độ như sau:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta \\ y' = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \end{cases}$$

hay

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Xét Q là phép quay tâm O góc quay θ ta tìm ảnh qua hai vectơ cơ sở $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Ta có

$$Q(\vec{e}_1) = (\cos \theta, \sin \theta),$$

$$Q(\vec{e}_2) = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ bất kì đều có biểu diễn là $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ với x, y là các toạ độ của $\vec{u}$ nên ta có: $Q(\vec{u}) = Q(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = Q(x\vec{e}_1) + Q(y\vec{e}_2)$ hay ta có công thức toạ độ điểm ảnh

$$(x', y') = Q(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

hay

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ta có được phép quay tâm O góc quay θ là toán tử tuyến tính được định nghĩa như sau $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ với

$$\varphi(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Ngoài cách nhận xét như trên ta hoàn toàn có thể chứng minh một cách đơn giản φ là toán tử tuyến tính bằng cách xét với mọi $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned}\varphi(u+v) &= ((x_1+x_2)\cos\theta - (y_1+y_2)\sin\theta, (x_1+x_2)\sin\theta + (y_1+y_2)\cos\theta) \\ &= (x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) \\ &\quad + (x_2\cos\theta - y_2\sin\theta, x_2\sin\theta + y_2\cos\theta) \\ &= \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2) = \varphi(u) + \varphi(v). \\ \varphi(ku) &= \varphi(kx_1, ky_1) = (kx_1\cos\theta - ky_1\sin\theta, kx_1\sin\theta + ky_1\cos\theta) \\ &= k(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) = k\varphi(u).\end{aligned}$$

Vậy phép quay tâm O góc quay bất kỳ là một toán tử tuyến tính.

1.3 Tập đại số, Đa tạp affine

1.3.1 Định nghĩa. Cho một hệ S các đa thức n biến trong vành đa thức n biến $K[\mathbf{x}] = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. *Tập đại số* xác định bởi S là tập nghiệm của hệ phương trình tất cả các đa thức thuộc S , ký hiệu $V(S)$. Tức là

$$V(S) = \{\mathbf{a} \in K^n \mid f(\mathbf{a}) = 0 \text{ với mọi } f \in S\}.$$

1.3.2 Ví dụ. 1. Tập rỗng $\emptyset$ là một tập đại số, vì $\emptyset = V(1)$.

2. K^n là một tập đại số, vì $K^n = V(0)$.

3. Mọi điểm $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ là một tập đại số, vì $\mathbf{a}$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình đa thức $x_i - a_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

4. Đường thẳng trong không gian $\mathbb{R}^2$.

5. Tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính trên K là một tập đại số, còn được gọi là một *đa tạp tuyến tính*.

6. Trong $\mathbb{R}^2$, đường tròn gốc tại tâm tọa độ và bán kính đơn vị là tập đại số $V(x^2 + y^2 - 1)$.
7. Hai tập đại số $V(xy + z)$ và $V(x^2 - x + y^2 + yz)$ là hai hyperboloid trong $\mathbb{R}^3$.

1.3.3 Chú ý. Định nghĩa của tập đại số không phụ thuộc vào việc chọn hệ tọa độ của k^n .

1.3.4 Bổ đề. *Tập nghiệm của tập con các đa thức chứa tập nghiệm của tập mẹ. Tức là với hai hệ đa thức $S_1 \subset S_2$, ta có $V(S_2) \subset V(S_1)$.*

1.3.5 Bổ đề. *Hợp của họ hữu hạn các tập đại số là một tập đại số.*

Chứng minh. Bằng quy nạp, ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp của họ 2 tập đại số. Giả sử $V_1 = V(S_1)$, $V_2 = V(S_2)$ là hai tập đại số, trong đó S_1, S_2 là hai hệ đa thức trong $K[\mathbf{x}]$. Đặt $S = \{fg | f \in S_1, g \in S_2\}$. Khi đó

$$V_1 \cup V_2 = V(S).$$

Thật vậy, với mọi $\mathbf{a} \in V_1$ thì $f(\mathbf{a}) = 0$ với $\forall f \in S_1$. Suy ra $fg(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) = 0$ với $\forall fg \in S$. Do đó $\mathbf{a} \in V$. Tương tự với mọi $\mathbf{a} \in V_2$ suy ra $\mathbf{a} \in V$. Vậy $V_1 \cup V_2 \subset V$.

Ngược lại, với $\mathbf{a} \in V$. Ta có $fg(\mathbf{a}) = 0$ với $\forall f \in S_1, g \in S_2$. Nếu $\mathbf{a} \notin V_1$ thì tồn tại một đa thức $f \in S_1$ sao cho $f(\mathbf{a}) \neq 0$. Từ $fg(\mathbf{a}) = 0$ với mọi $g \in S_2$, suy ra $g(\mathbf{a}) = 0, \forall g \in S_2$. Do đó $\mathbf{a} \in V_2$. Điều này chứng tỏ $V \subset V_1 \cup V_2$. $\square$

1.3.6 Chú ý. Hợp của họ tùy ý các tập đại số có thể không là tập đại số.

1.3.7 Bổ đề. *Giao của họ tùy ý các tập đại số là một tập đại số.*

Chứng minh. Giả sử $\{V_i : i \in I\}$ là một họ tùy ý các tập đại số V_i , trong đó $V_i = V(S_i), S_i \subset k[\mathbf{x}]$. Khi đó

$$\bigcap_{i \in I} V_i = V\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right).$$

Điều này suy ra từ tính chất là: một điểm $\mathbf{a} \in K^n$ là nghiệm của mọi hệ đa thức S_i khi và chỉ khi nó là nghiệm của hệ đa thức $\cup_{i \in I} S_i$. $\square$

1.3.8 Định nghĩa. Tập đại số trong không gian affine K^n còn được gọi là *đa tập affine*.

1.3.9 Ví dụ. Xét hai đa tập affine xác định trên $K[x, y, z]$ là $V(x)$ và $V(y, z)$. Khi đó ta có

$$V(x) \cup V(y, z) = V(xy, xz);$$

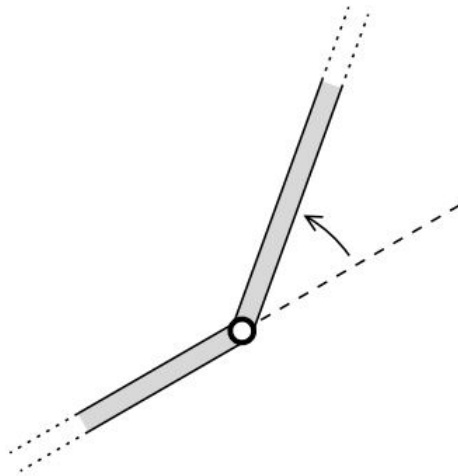
$$V(x) \cap V(y, z) = V(x, y, z) = \{(0, 0, 0)\}.$$

CHƯƠNG 2

MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG CÁNH TAY NGƯỜI MÁY

2.1 Mô tả hình học của một số chi tiết trong "cánh tay" người máy

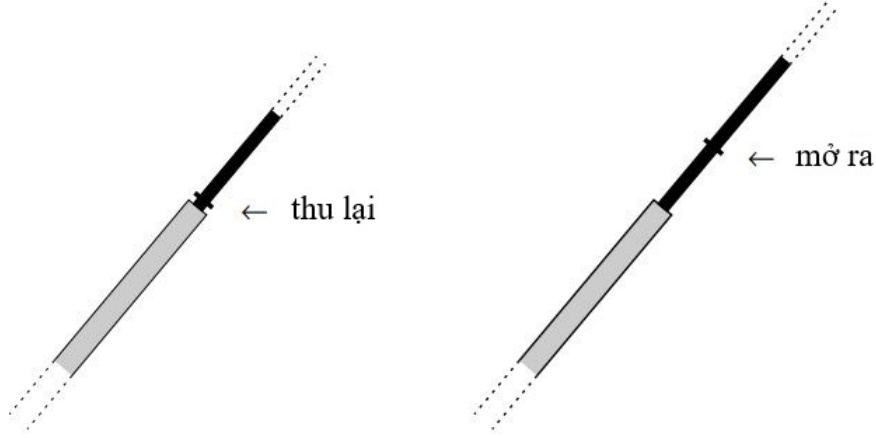
Một khớp xoay cho phép hai đoạn được nối bởi khớp xoay quanh khớp đó. Giả định rằng cả hai đoạn nối với khớp đều nằm trên một mặt phẳng, khớp xoay giúp nối hai đoạn và mọi chuyển động của khớp xoay sẽ rời khỏi mặt phẳng chứa hai đoạn thẳng đó (Việc này khẳng định trục quay vuông góc với mặt phẳng chứa hai đoạn thẳng đó).



Hình 2.1: Khớp quay

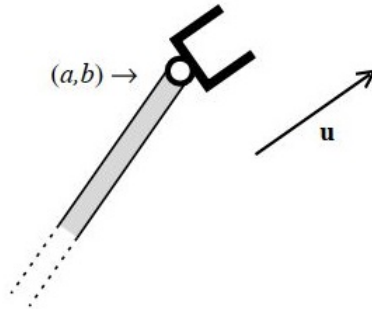
Một khớp lăn trượt cho phép 1 đoạn của "cánh tay" robot di chuyển bằng cách trượt hoặc tịnh tiến dọc theo một trục. Hình minh họa dưới đây cho thấy sơ đồ của một khớp lăn trượt giữa hai đoạn của robot nằm trong một mặt phẳng. Một

khớp như vậy cho phép một đoạn chuyển động tịnh tiến dọc theo một đường trong mặt phẳng.



Hình 2.2: Khớp lằng trụ khi thu lại và khi mở ra

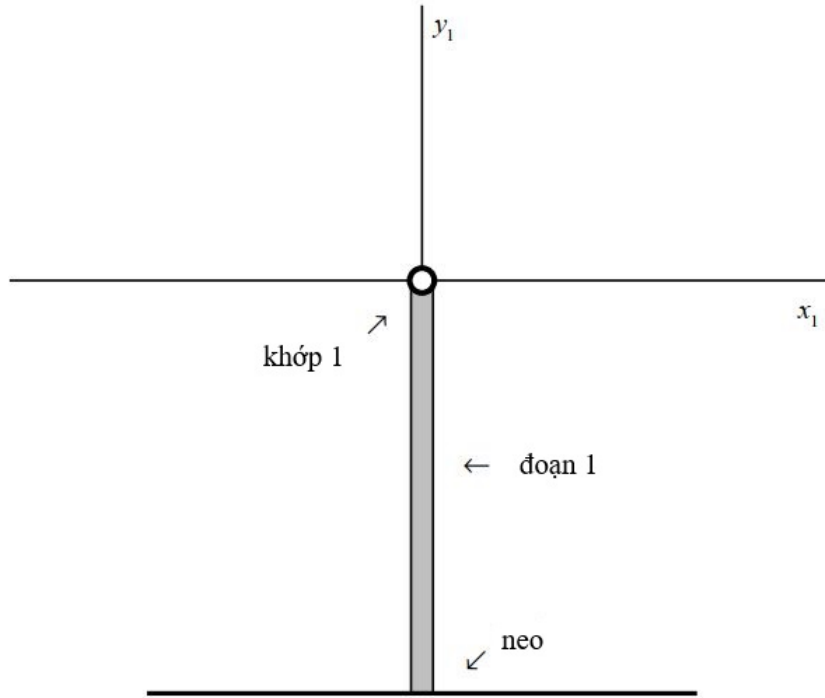
Về phần "bàn tay" robot có thể hình dung qua hình minh họa sau. Trên mặt phẳng cố định một hệ tọa độ Descartes, biểu diễn vị trí của "bàn tay" bằng điểm (a, b) thuộc cơ sở $u \subset \mathbb{R}^2$. Tương tự, có thể biểu diễn hướng của bàn tay bằng cách đưa ra một vectơ đơn vị được căn chỉnh với một số đặc điểm cụ thể của bàn tay. Do đó, hướng của bàn tay được tham số hóa bởi các vectơ u trong $V = S^1$.



Hình 2.3: Hình minh họa bàn tay. Với điểm (a, b) chỉ vị trí tay, vectơ u chỉ hướng tay

2.2 Bài toán mô tả chuyển động cánh tay người máy

Bài toán động học chuyển tiếp (The Forward Kinematic Problem) ở đây là lấy từ chuyển động của "cánh tay" người máy được cố định 1 đầu xét trên 1 mặt phẳng. Với đoạn đầu tiên của "cánh tay" được cố định tại 1 vị trí, ta sử dụng một hệ tọa độ với gốc tọa độ đặt tại khớp 1 của đoạn. Hệ này ta gọi là *hệ tọa độ toàn cục*.



Hình 2.4: Hệ tọa độ toàn cục (x_1, y_1)

Ngoài hệ tọa độ toàn cục (x_1, y_1) , tại mỗi khớp quay có một hệ tọa độ cục bộ để mô tả vị trí tương đối của các đoạn nối với nhau tại khớp đó. Tất nhiên, các hệ tọa độ này sẽ thay đổi khi vị trí của "cánh tay" thay đổi.

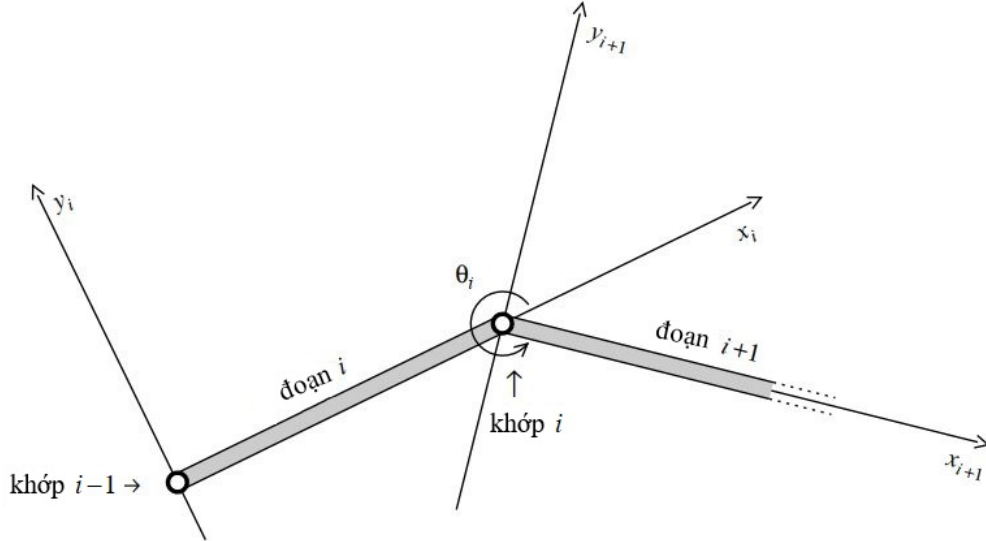
Tại một khớp quay i , đặt một hệ tọa độ (x_{i+1}, y_{i+1}) như sau. Gốc được đặt tại khớp i . Ta lấy trục x_{i+1} dương nằm dọc theo hướng của đoạn $i + 1$ (ở vị trí hiện tại của robot). Sau đó, xác định trục y_{i+1} dương để tạo thành một hệ tọa độ. Lưu ý rằng đối với mỗi $i \geq 2$, tọa độ (x_i, y_i) của khớp i là $(l_i, 0)$, trong đó

l_i là độ dài của đoạn i .

Tiếp theo đi nghiên cứu vị trí và hoạt động của đoạn thứ $i + 1$ sau khi đoạn thứ i hoạt động.

Gọi (x_i, y_i) là hệ tọa độ của đoạn thứ i . Đoạn thứ $i + 1$ được nối với đoạn thứ i qua 1 khớp, khớp này là khớp i . Vị trí của đoạn $i + 1$ được xác định sau phép quay tại khớp i với chiều dương được quy ước ngược chiều kim đồng hồ. Với mỗi vị trí của đoạn $i + 1$ ta xác định được (x_{i+1}, y_{i+1}) là hệ tọa độ cục bộ của đoạn $i + 1$ (hệ tọa độ địa phương của đoạn thứ $i + 1$).

Ta có hình sau:



Hình 2.5: Hệ tọa độ cục bộ

Mô tả hệ tọa độ cục bộ của đoạn thứ $i + 1$.

Mục tiêu đầu tiên là liên hệ tọa độ của một điểm từ hệ tọa độ (x_{i+1}, y_{i+1}) sang hệ tọa độ (x_i, y_i) của điểm đó. Với θ_i là góc ngược chiều kim đồng hồ từ trục x_i đến trục x_{i+1} . Từ sơ đồ trên, ta thấy rằng nếu một điểm q thuộc hệ (x_{i+1}, y_{i+1}) có tọa độ

$$q(a_{i+1}, b_{i+1})$$

khi đó tọa độ của q trong hệ tọa độ (x_i, y_i) là

$$q(a_i, b_i)$$

Thực hiện xoay theo góc θ_i ; (để căn chỉnh trục x_i và x_{i+1}), sau đó tịnh tiến theo vectơ $(l_i, 0)$ (để làm cho gốc của các hệ tọa độ trùng khớp). Trong các bài tập, phép quay θ_i ; được thực hiện bằng cách nhân với ma trận quay

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Việc tịnh tiến được thực hiện bằng cách thêm vectơ $(l_i, 0)$. Khi đó mối quan hệ giữa tọa độ (x_i, y_i) và (x_{i+1}, y_{i+1}) của q là:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_i a_{i+1} - \sin\theta_i b_{i+1} \\ \sin\theta_i a_{i+1} + \cos\theta_i b_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_i a_{i+1} - \sin\theta_i b_{i+1} + l_i \\ \sin\theta_i a_{i+1} + \cos\theta_i b_{i+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Phép biến đổi tọa độ này cũng thường được viết ở dạng viết tắt bằng cách sử dụng ma trận 3×3 và vectơ 3 thành phần:

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i a_{i+1} - \sin\theta_i b_{i+1} + l_i \\ \sin\theta_i a_{i+1} + \cos\theta_i b_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & l_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Đặt

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & l_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

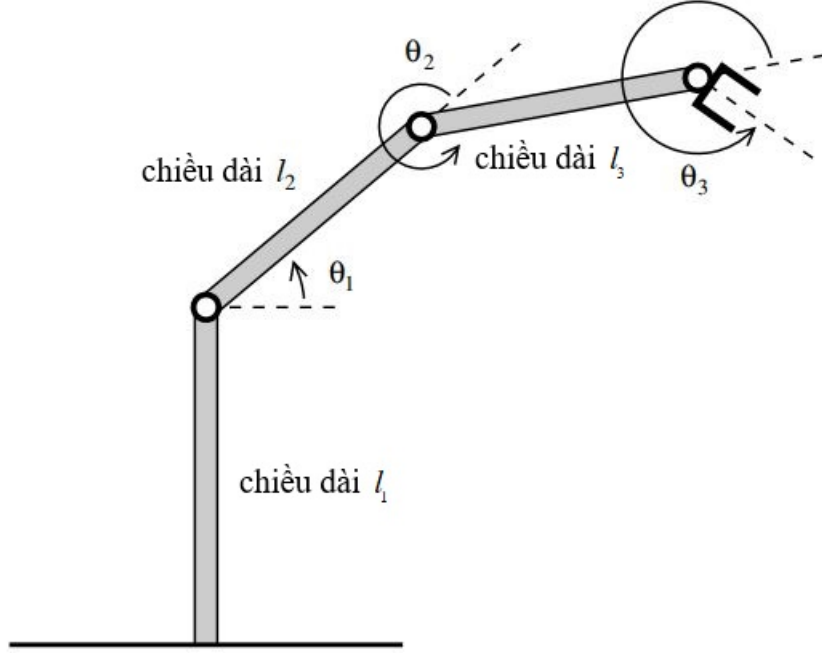
Khi đó:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & l_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} = A_i \cdot \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Điều này cho phép chúng ta kết hợp phép quay θ_i , với phép tịnh tiến theo đoạn i thành ma trận 3×3 A_i duy nhất.

2.3 Chuyển động của cánh tay người máy với 3 khớp quay

2.3.1 Ví dụ. Với cách làm trên, hãy xem xét tiếp một “cánh tay” robot trên mặt phẳng tổng quát có ba khớp xoay:



Hình 2.6: Cánh tay người máy 3 khớp xoay

Coi bàn tay như đoạn 4, được gắn thông qua khớp xoay 3 với đoạn 3, l_i sẽ biểu thị độ dài của đoạn i . Ta có

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vì gốc của hệ tọa độ (x_2, y_2) cũng được đặt ở khớp nối 1. Ta có ma trận A_2 và A_3 lần lượt là: $A_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & l_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & l_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Từ (1)

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix} = A_i \cdot \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

các tọa độ chung của bất kỳ điểm nào có thể thu được bằng cách từ hệ tọa độ (x_4, y_4) đưa lần lượt về hệ trục tọa độ (x_1, y_1) . Tức là lần lượt nhân vectơ tọa độ điểm (x_4, y_4) với A_3, A_2, A_1 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sử dụng các công thức lượng giác, phương trình này có thể được viết dưới dạng

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tọa độ (x_4, y_4) của bàn tay là $(0, 0)$ (vì bàn tay được gắn trực tiếp vào khớp 3), nên thu được tọa độ (x_1, y_1) của bàn tay bằng cách thay $x_4 = y_4 = 0$ vào ma trận tích trên. Kết quả thu được là

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin \theta_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hướng tay được xác định nếu ta biết góc giữa trục x_4 và hướng của bất kỳ tính năng cụ thể nào mà chúng ta quan tâm. Ví dụ, ta có thể chỉ đơn giản muốn sử dụng hướng của trục x_4 để chỉ định hướng này. Từ các tính toán góc giữa trục x_1 và trục x_4 đơn giản là $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. Biết θ_i cho phép chúng ta cũng tính được góc này.

Là một hàm của các góc khớp θ_i , cấu hình của bàn tay được đưa ra bởi

$$(3) \quad f(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \begin{pmatrix} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin \theta_1 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Ví dụ. Xét mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ có hệ tọa độ trục giao (x_1, y_1) . Bây giờ đưa vào hệ tọa độ thứ hai (x_2, y_2) bằng cách xoay hệ tọa độ thứ nhất ngược chiều kim đồng hồ theo một góc θ . Giả sử một điểm q có tọa độ (a_1, b_1) trong (x_1, y_1) và có tọa độ (a_2, b_2) trong (x_2, y_2) . Ta khẳng định rằng

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Để chứng minh điều này, trước tiên ta biểu diễn tọa độ của q ở dạng cực trong (x_2, y_2) như sau:

$$q = (a_2, b_2) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

Khi đó trong (x_1, y_1) tọa độ của q được cho bởi

$$q = (a_1, b_1) = (r \cos (\alpha + \theta), r \sin (\alpha + \theta))$$

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cos \theta - b_2 \sin \theta \\ a_2 \sin \theta + b_2 \cos \theta \end{pmatrix}$$

Suy ra:

$$(*) \quad \begin{cases} a_1 &= a_2 \cos \theta - b_2 \sin \theta \\ b_1 &= a_2 \sin \theta + b_2 \cos \theta \end{cases}$$

Thay $a_2 = r \cos \alpha, b_2 = r \sin \alpha$ vào $(*)$ ta được:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_1 = a_2 \cos \theta - b_2 \sin \theta \\ b_1 = a_2 \sin \theta + b_2 \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ b_1 = r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = r \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \theta) + \cos (\alpha - \theta)) + r \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \theta) - \cos (\alpha - \theta)) \\ b_1 = r \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \theta) + \sin (\alpha - \theta)) + r \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \theta) - \sin (\alpha - \theta)) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{r}{2} (\cos (\alpha + \theta) + \cos (\alpha - \theta) + \cos (\alpha + \theta) - \cos (\alpha - \theta)) \\ b_1 = \frac{r}{2} (\sin (\alpha + \theta) - \sin (\alpha - \theta) + \sin (\alpha + \theta) + \sin (\alpha - \theta)) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = r \cos (\alpha + \theta) \\ b_1 = r \sin (\alpha + \theta) \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

là chính xác. □

2.3.3 Ví dụ. Trong các ví dụ trên, ta đã sử dụng ma trận vuông A cấp 3 để đại diện cho mỗi thay đổi của tọa độ từ một hệ thống cực bộ sang một hệ thống

khác. Những thay đổi về tọa độ này là các phép quay, sau đó là các phép dịch chuyển. Đây là những loại biến đổi afin. Khi đó ta có các khẳng định sau:

a. Bất kỳ phép biến đổi afin nào trong mặt phẳng

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + e \\ y' &= cx + dy + f\end{aligned}$$

có thể được biểu diễn theo cách tương tự:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

b. Có các biểu diễn tương tự cho các phép biến đổi afin của $\mathbb{R}^3$ sử dụng ma trận 4×4 .

Chứng minh.

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + e \\ y' &= cx + dy + f\end{aligned}$$

Phép biến đổi tọa độ này còn có thể được viết ở dạng viết tắt bằng cách sử dụng ma trận 4×4 và vectơ 4 thành phần:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e & 0 \\ c & d & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta có phép biến đổi:

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + cz + k \\ y' &= dx + ey + fz + l \\ z' &= gx + hy + iz + m\end{aligned}$$

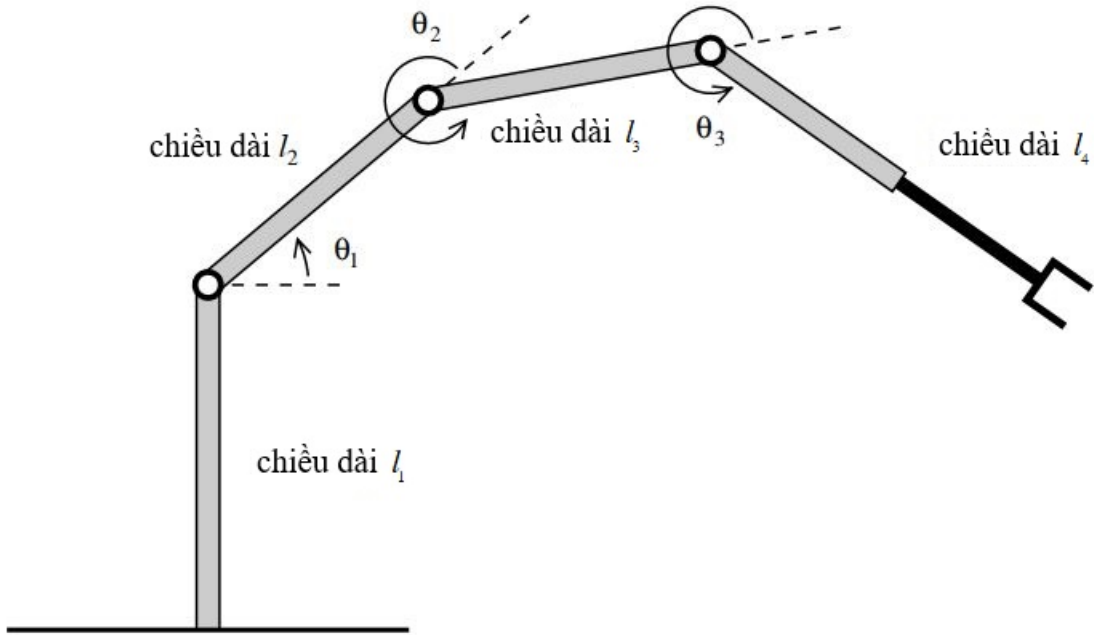
Phép biến đổi tọa độ này còn có thể được viết ở dạng viết tắt bằng cách sử dụng ma trận 4×4 và vectơ 4 thành phần:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & k \\ d & e & f & l \\ g & h & i & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

2.4 Chuyển động của cánh tay người máy với khớp lằng trự

2.4.1 Ví dụ. Các khớp lằng trự cũng có thể được xử lý trong khuôn khổ này. Ví dụ, hãy xem xét một rôbot phẳng có ba đoạn và khớp đầu tiên giống như của robot trong Ví dụ 2.3.1, nhưng có thêm một khớp hình lằng trự giữa đoạn 4 và bàn tay. Như vậy, đoạn 4 sẽ có chiều dài thay đổi và đoạn 5 sẽ là bàn tay.



Hình 2.7: Cánh tay người máy 3 khớp xoay và khớp lằng trự

Trục dịch chuyển của khớp lằng trự nằm dọc theo hướng của đoạn 4. Ta có thể mô tả robot như sau. Ba khớp nối hai chiều cho phép ta tự do đặt khớp 3 giống như trong robot được nghiên cứu trong Ví dụ 2.3.1. Tuy nhiên, khớp lằng trự cho phép chúng ta thay đổi độ dài của đoạn 4 thành bất kỳ giá trị nào từ $l_4 = m_1$ (khi được rút lại) và $l_4 = m_2$ (khi được mở ra hoàn toàn). Theo lý luận được đưa ra trong Ví dụ 2.3.1, nếu đã biết thiết lập l_4 của khớp lằng trự, khi đó vị trí của bàn tay sẽ được đưa ra bằng cách nhân ma trận tích $A_1 A_2 A_3$ với (x_4, y_4) vectơ tọa độ của bàn tay, cụ thể là $(l_4, 0)$. Từ đó, cấu hình của bàn tay được đưa ra bằng

$$(4) \quad g(\theta_1, \theta_2, \theta_3, l_4) = \begin{pmatrix} l_4 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_4 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin \theta_1 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Như Ví dụ 2.3.1, l_2 và l_3 không đổi, nhưng $l_4 \in [m_1, m_2]$ bây giờ là một biến khác. Hướng tay vẫn là $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ vì việc thiết lập khớp lăng trụ sẽ không ảnh hưởng đến hướng của bàn tay.

Tiếp theo chúng ta sẽ thảo luận về các công thức như (3) và (4) có thể được chuyển đổi thành đại diện của f và g dưới dạng đa thức hoặc ánh xạ hữu tỷ trong các biến phù hợp. Các biến khớp cho các khớp nối hai chiều và cho các khớp lăng trụ được xử lý khác nhau. Mặc dù $\cos \theta$ và $\sin \theta$ là các hàm siêu việt, nhưng chúng cho phép thông số hóa

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ y &= \sin \theta \end{aligned}$$

đa thức đại số $V(x^2 + y^2 - 1)$ trong mặt phẳng. Do đó, chúng ta có thể viết các thành phần của phía bên phải của (3) hoặc, tương đương, các mục nhập của ma trận $A_1 A_2 A_3$ trong (2) như các hàm của

$$\begin{aligned} c_i &= \cos \theta_i \\ s_i &= \sin \theta_i \end{aligned}$$

tùy thuộc vào những ràng buộc

$$(5) \quad c_i^2 + s_i^2 - 1 = 0$$

đối với $i = 1, 2, 3$. Lưu ý rằng biến được xác định bởi ba phương trình này trong $\mathbb{R}^6$ là một hiện thực cụ thể của không gian khớp $\mathcal{J}$ cho loại rô bốt này. Về mặt hình học, biến này chỉ là một tích Descartes của ba bản sao của quỹ đạo. Rõ ràng, ta nhận được từ (3) một biểu thức cho vị trí bàn tay như một hàm của các biến $c_1, s_1, c_2, s_2, c_3, s_3$. Sử dụng các công thức cộng lượng giác, ta có thể viết:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = c_1 c_2 - s_1 s_2.$$

Tương tự như vậy

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 = s_1 c_2 + s_2 c_1.$$

Do đó, tọa độ (x_1, y_1) của vị trí bàn tay là:

$$(6) \quad \begin{pmatrix} l_3 (c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 \\ l_3 (s_1 c_2 + s_2 c_1) + l_2 s_1 \end{pmatrix}.$$

Ta xác định một ánh xạ đa thức từ đa tạp affine

$$\mathfrak{S} = V(x_1^2 + y_1^2 - 1, x_2^2 + y_2^2 - 1, x_3^2 + y_3^2 - 1)$$

đến $\mathbb{R}^2$. Lưu ý rằng vị trí đặt bàn tay không phụ thuộc vào θ_3 . Góc đó chỉ được tính đến khi xác định hướng tay. Vì định hướng bằng tay phụ thuộc trực tiếp vào chính các góc θ_i , nên không thể biểu hiện định hướng dưới dạng đa thức trong $c_i = \cos \theta_i$ và $s_i = \sin \theta_i$. Tuy nhiên, ta có thể xử lý định hướng theo cách tương tự. Tương tự, từ ánh xạ g trong Ví dụ 2.4.1, ta thu được dạng đa thức

$$(7) \quad \begin{pmatrix} l_4 (c_1 (c_2 c_3 - s_2 s_3) - s_1 (c_2 s_3 + c_3 s_2)) + l_3 (c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 \\ l_4 (s_1 (c_2 c_3 - s_2 s_3) + c_1 (c_2 s_3 + c_3 s_2)) + l_3 (s_1 c_2 + s_2 c_1) + l_2 s_1 \end{pmatrix}$$

cho tọa độ (x_1, y_1) của vị trí tay. Ở đây $\mathcal{J}$ là tập hợp con $V \times [m_1, m_2]$ hay $V \times \mathbb{R}$, trong đó $V = V(x_1^2 + y_1^2 - 1, x_2^2 + y_2^2 - 1, x_3^2 + y_3^2 - 1)$. Độ dài l_4 được coi là một biến thông thường khác trong (7), vì vậy các hàm thành phần ở đây là đa thức trong l_4 , c_i và s_i . Một cách thứ hai để viết các công thức (3) và (4) là dựa trên các thông số hợp lý

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

của quỹ đạo. Về thông số lượng giác, $t = \tan(\theta/2)$. Điều này cho phép chúng ta biểu diễn (3) dưới dạng ba biến $t_i = \tan(\theta_i/2)$. Khi đó, biến $\mathcal{J}$ cho robot trong Ví dụ 2.3.1 tương đương với $\mathbb{R}^3$. Ta có thể xây dựng một thông số hợp lý $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{J}$ sử dụng ba bản sao của thông số hóa (8). Do đó, ta thu được ánh xạ hữu tỷ từ $\mathbb{R}^3$ đến $\mathbb{R}^2$, biểu diễn tọa độ bàn tay của cánh tay rô bốt dưới

dạng các hàm t_1, t_2, t_3 bằng cách lấy thành phần ρ với ánh xạ tọa độ bàn tay dưới dạng (6).

Cả hai dạng này đều có những ưu và nhược điểm nhất định để sử dụng trong thực tế. Đối với robot được đề cập tới trong Ví dụ 2.3.1, một lợi thế có thể nhìn thấy ngay lập tức của ánh xạ hữu tỷ thu được từ (8) là nó chỉ liên quan đến ba biến chứ không phải là sáu biến $s_i, c_i, i = 1, 2, 3$, cần thiết để mô tả ánh xạ đầy đủ f . Ngoài ra, không cần thêm ba phương trình ràng buộc (5). Tuy nhiên, các giá trị tương ứng với các vị trí khớp với θ_i ; gần với π khá lớn và không có giá trị t_i tương ứng với $\theta_i = \pi$. Mọi vị trí tay có thể về mặt lý thuyết trong hình ảnh của ánh xạ f khi nó được thể hiện dưới dạng này. Tất nhiên, điều này có thể không thực sự là một vấn đề nếu rôbot được lắp dựng sao cho đoạn $i + 1$ không tự do để gấp lại vào đoạn i (nghĩa là thiết lập khớp $\theta_i = \pi$ là không thể). Dạng đa thức (6) không chắc chắn hơn, nhưng vì dạng này đến từ thông số lượng giác (đơn vị tốc độ) của quỹ đạo, nên nó không bị ảnh hưởng bởi các kết quả ngăn tiềm năng của dạng hữu tỷ. Dạng này sẽ là một phần nào đó phù hợp hơn cho các khớp nối hai chiều có thể tự do xoay tròn qua quỹ đạo.

KẾT LUẬN

Như vậy, một bài toán hình học với giả thiết hoạt động của cánh tay người máy đã có thể được biểu diễn như phương trình đa thức liên quan đến tọa độ Descartes của các điểm trong mặt phẳng Euclide, các mệnh đề hình học suy ra từ các giả thuyết sẽ bao gồm tất cả các mệnh đề đều có thể được biểu diễn dưới dạng đa thức.

Việc sử dụng các đa thức giúp giải các bài toán hình học phức tạp trở nên đơn giản và thuận tiện hơn. Đây cũng chính là mấu chốt trong việc lập trình các hoạt động của robot. Với tốc độ tính toán của một máy tính bình thường hiện nay lên tới vài tỉ phép tính mỗi giây thì việc xử lý các phép tính được thực hiện nhanh chóng, góp phần tạo ra nhiều robot có độ chính xác cao để phục vụ các nhu cầu trong cuộc sống từ chế tạo, lắp ráp các thiết bị cho đến các dịch vụ y tế như phẫu thuật các trường hợp cần độ chính xác cao.

Điều này cho thấy ứng dụng của **Toán học** nói chung và **Hình học đại số** nói riêng trong cuộc sống là rất to lớn. Đó cũng là thách thức cho các nhà toán học càng ngày càng phải phát triển hơn nữa.

Luận văn bước đầu đã tìm hiểu và trình bày lại một số ứng dụng của Hình học đại số để mô tả các chuyển động của cánh tay robot trong thực tiễn cuộc sống, minh họa được vai trò to lớn của Hình học đại số trong kỹ thuật nói riêng và của Toán học trong thực tiễn nói chung.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu tham khảo của luận văn gồm các tài liệu sau, trong đó tài liệu tham khảo chính là [1]

- [1] David A. Cox, John Little, Donal O'Shea (2015), *Ideals, varieties, and algorithms*, 265–279, Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland.
- [2] Jürgen Herzog and Takayuki Hibi (2010), *Monomial Ideals*, Graduate Texts in Mathematics, New Delhi.