BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

LÊ THỊ DUNG

VỀ NỬA NHÓM SỐ REPUNIT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

LÊ THỊ DUNG

VỀ NỬA NHÓM SỐ REPUNIT

Chuyên ngành: **ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ**
Mã số: 846 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. NGUYỄN THỊ HỒNG LOAN

Nghệ An 2022

MỤC LỤC

Mục lục 2

Mở đầu 3

1 Kiến thức chuẩn bị về nửa nhóm số 7

1.1. Nửa nhóm số . . . 7

1.2. Tập Apéry . . . 8

1.3. Số Frobenius của nửa nhóm số . . . 10

1.4. Giống của nửa nhóm số . . . 11

1.5. Số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số . . . 12

2 Về nửa nhóm số Repunit 13

2.1. Nửa nhóm số repunit . . . 13

2.2. Chiều nhúng của nửa nhóm số repunit . . . 15

2.3. Tập Apéry của nửa nhóm số repunit . . . 20

2.4. Số Frobenius, giống, số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số repunit . . . 26

Kết luận 32

Tài liệu tham khảo 33

MỞ ĐẦU

Ký hiệu $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên và $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên. Một nửa nhóm số là một tập con S của $\mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây: S chứa 0, đóng kín với phép cộng các số tự nhiên và $\mathbb{N}\backslash S$ là tập hợp hữu hạn.

Như vậy mỗi nửa nhóm số là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$ sao cho phần bù của nó trong $\mathbb{N}$ là một tập hợp hữu hạn. Cho A là một tập con khác rỗng của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Ký hiệu $\langle A\rangle$ là vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$ sinh bởi A, nghĩa là

$$\langle A\rangle = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}\backslash \{0\}, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Khi đó $\langle A\rangle$ là một nửa nhóm số khi và chỉ khi $\gcd(A) = 1$.

Trong lý thuyết số, một *repunit* là một số nguyên mà các chữ số của nó chỉ là các chữ số 1. Chẳng hạn, $1, 11, 111$ hoặc $1111, \ldots$ là những ví dụ về repunit. Thuật ngữ này diễn đạt sự lặp lại của đơn vị và nó được đưa ra bởi Albert H. Beiler năm 1964.

Cho b là một số nguyên, $|b| \geq 2$ (b có thể là số âm hoặc số dương). Các repunit cơ số b là

$$R_n^{(b)} = 1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1} = \frac{b^n - 1}{b - 1}, \quad n \geq 1.$$

Như vậy, các repunit $R_n^{(b)}$ là các số mà các chữ số của chúng chỉ gồm chữ số 1 khi biểu diễn theo cơ số b. Hai repunit cơ số b đầu tiên ứng với $n = 1$ và

$n = 2$ là

$$R_1^{(b)} = \frac{b-1}{b-1} = 1 \qquad \text{và} \qquad R_2^{(b)} = \frac{b^2-1}{b-1} = b+1.$$

Đặc biệt, đối với hệ thập phân (cơ số 10) các repunit $R_n^{(10)}$ được ký hiệu đơn giản là R_n và

$$R_n \equiv R_n^{(10)} = \frac{10^n-1}{10-1} = \frac{10^n-1}{9}, \qquad \text{với } n \geq 1.$$

Do đó, $R_n = R_n^{(10)}$ là số mà tất cả các chữ số của chúng đều là chữ số 1 viết trong hệ biểu diễn cơ số 10. Dãy các repunits cơ số 10 bắt đầu với $1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, \ldots$.

Tương tự, các repunit cơ số 2 là

$$R_n^{(2)} = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1, \qquad \text{với } n \geq 1.$$

Do đó, $R_n^{(2)}$ là số gồm n chữ số 1 viết trong hệ ghi cơ số 2. Như vậy, các repunit cơ số 2 chính là các số Mersenne $M_n = 2^n - 1$, dãy này bắt đầu với $1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, 8191, 16383, 32767, 65535, \ldots$.

Như vậy, tập các repunit cơ số b là

$$\left\{ \frac{b^n-1}{b-1} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Nửa nhóm số S được gọi là *nửa nhóm số repunit* nếu tồn tại các số nguyên $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ và $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sao cho

$$S = \left\langle \left\{ \frac{b^{n+i}-1}{b-1} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \right\rangle$$

và nó được ký hiệu là $S(b, n)$.

Vì mọi nửa nhóm số đều hữu hạn sinh (mỗi nửa nhóm số đều có duy nhất một hệ sinh tối tiểu và số phần tử của hệ sinh tối tiểu của một nửa nhóm số được gọi là *chiều nhúng* của nửa nhóm số đó) nên việc nghiên cứu một nửa nhóm số tương đương với việc nghiên cứu tập các nghiệm nguyên không âm của một hệ phương trình tuyến tính với hệ số trong $\mathbb{N}$. Do đó, nó chính là vấn đề cổ điển đã được nhiều nhà toán học quan tâm. Theo hướng này, có hai bất biến quan trọng của nửa nhóm số được phát hiện, đó là: số nguyên lớn nhất không thuộc nửa nhóm số S, gọi là *số Frobenius của* S, ký hiệu là $\mathrm{F}(S)$ và lực lượng của tập hợp $\mathbb{N} \setminus S$, gọi là *giống* của S, ký hiệu là $\mathrm{g}(S)$.

Vấn đề tìm công thức tính số Frobenius và giống của một nửa nhóm số thông qua hệ sinh tối tiểu của nửa nhóm số đó đã được rất nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Tuy nhiên vấn đề này mới chỉ giải quyết được cho trường hợp chiều nhúng bằng 2. Trường hợp chiều nhúng của nửa nhóm số từ 3 trở lên, vấn đề Frobenius vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn.

Trong bài báo [5] ra năm 2016 trên tạp chí The Ramanujan Journal, các nhà toán học J. C. Rosales, M. B. Branco và D. Torrão đã nghiên cứu về nửa nhóm số repunit. Trong bài báo này, họ đã đưa ra công thức tính chiều nhúng, số Frobenius, kiểu và giống của nửa nhóm số repunit.

Luận văn gồm hai phần chính, phần thứ nhất trình bày các kiến thức chung về nửa nhóm số, phần thứ hai là nội dung chính của luận văn, trình bày chi tiết các kết quả của bài báo [5] về nửa nhóm số repunit. Ngoài ra, luận văn còn có phần mở đầu, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Luận văn này được hoàn thành trong khóa 28 đào tạo thạc sỹ của trường Đại học Vinh dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Thị Hồng Loan. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô-người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian và công sức để chỉ bảo, hướng dẫn tôi từ những điều nhỏ nhặt nhất tới những vấn đề khó khăn. Cô vẫn luôn kiên nhẫn, tận tình quan tâm giúp đỡ để tôi hoàn thành luận văn này. Tôi cũng xin được gửi lời tri ân sâu sắc tới các thầy cô giảng viên Khoa Toán - Trường Sư phạm, Phòng Đào tạo Sau đại học, Trường Đại học Vinh về những sự hỗ trợ cần thiết và quý báu trong quá trình học tập tại trường. Cuối cùng, tôi xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu Trường THPT Ngô Sĩ Liên, các đồng nghiệp, gia đình và người thân đã luôn quan tâm giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi có thể học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn này.

Nghệ An, tháng 6 năm 2022

Tác giả

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ VỀ NỬA NHÓM SỐ

Trong chương này, chúng tôi trình bày không chứng minh các kiến thức chuẩn bị về nửa nhóm số và một số bất biến của nửa nhóm số. Các kết quả trong chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1], [2], [3], [4] và trình bày lại nhằm phục vụ cho nội dung chính của luận văn ở Chương 2.

1.1 Nửa nhóm số

Trước khi tìm hiểu về nửa nhóm số và một số bất biến của nửa nhóm số, chúng ta nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị sau:

(1) Một tập hợp khác rỗng trên đó được trang bị một phép toán có tính chất kết hợp được gọi là một *nửa nhóm*.

(2) Một nửa nhóm mà phép toán trên đó có tính chất giao hoán thì được gọi là *nửa nhóm giao hoán*.

(3) Một nửa nhóm mà phép toán trên đó có đơn vị thì được gọi là *vị nhóm*.

(4) Giả sử X là một nửa nhóm và A là một tập con ổn định của X (ổn định đối với phép toán trên nửa nhóm X). Khi đó A cùng với phép toán cảm sinh là một nửa nhóm và được gọi là *nửa nhóm con* của nửa nhóm X.

1.1.1 Định nghĩa. Cho S là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Nếu phần bù của S trong $\mathbb{N}$ là hữu hạn thì S được gọi là một *nửa nhóm số*.

Cho A là một tập con khác rỗng của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Ký hiệu

$\langle A\rangle$ là vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$ sinh bởi A, nghĩa là

$$\langle A\rangle = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1,\ldots,n\}\}.$$

Khi đó $\langle A\rangle$ là nửa nhóm con bé nhất (theo quan hệ bao hàm) của $\mathbb{N}$ chứa A. Nếu $\langle A\rangle = S$ thì A là một *hệ sinh của nửa nhóm S*.

Mệnh đề sau cho ta điều kiện cần và đủ để $\langle A\rangle$ là một nửa nhóm số.

1.1.2 Mệnh đề. *Cho A là một tập con khác rỗng của $\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Khi đó $\langle A\rangle$ là một nửa nhóm số khi và chỉ khi* $\gcd(A) = 1$.

Chú ý rằng, mỗi nửa nhóm số có thể có nhiều hệ sinh. Tuy nhiên, kết quả sau đây chỉ ra rằng mỗi nửa nhóm số chỉ có duy nhất một hệ sinh hữu hạn.

1.1.3 Mệnh đề. *Mỗi nửa nhóm số đều có duy nhất một hệ sinh tối tiểu. Hệ sinh tối tiểu này gồm hữu hạn phần tử.*

Như vậy, mỗi nửa nhóm số S là một tập con của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$, gồm các tổ hợp tuyến tính trên $\mathbb{N}$ của một tập hữu hạn các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau cho trước.

Cho $s_1, \ldots, s_n$ là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó, nửa nhóm số sinh bởi $s_1, \ldots, s_n$ là

$$S = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle = \{\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Mệnh đề 1.1.3 dẫn đến khái niệm sau đây.

1.1.4 Định nghĩa. Số phần tử của một hệ sinh hữu hạn của nửa nhóm số S được gọi là *chiều nhúng* của S, kí hiệu là $e(S)$.

1.2 Tập Apéry

Tập Apéry là một khái niệm có vai trò quan trọng trong nghiên cứu nửa nhóm số. Tập Apéry được định nghĩa như sau:

1.2.1 Định nghĩa. Cho S là một nửa nhóm số và n là một phần tử khác 0 của S. *Tập Apéry của n trong nửa nhóm số S* là tập hợp được xác định bởi

$$\mathrm{Ap}(S,n) = \{h \in S \mid h - n \notin S\}.$$

Từ định nghĩa của tập Apéry ta có bổ đề sau đây.

1.2.2 Bổ đề. *Giả sử S là một nửa nhóm số và n là một số nguyên dương thuộc S. Nếu $x, y \in S$ sao cho $x + y \in \mathrm{Ap}(S,n)$ thì $\{x, y\} \subseteq \mathrm{Ap}(S,n)$.*

Mệnh đề sau đây cho ta cách tìm tập Apéry của một nửa nhóm số.

1.2.3 Mệnh đề. *Cho S là một nửa nhóm số và $n \in S \setminus \{0\}$. Khi đó ta có*

$$\mathrm{Ap}(S,n) = \{0 = w(0), w(1), \ldots, w(n-1)\},$$

trong đó $w(i)$ là số nhỏ nhất của S đồng dư với i theo môđun n, với mỗi $i \in \{0, 1, ...n-1\}$.

Từ Mệnh đề 1.2.3, ta thấy $\mathrm{Ap}(S,n)$ là một hệ thặng dư đầy đủ môđun n. Từ mỗi lớp thặng dư môđun n ta lấy ra số nguyên nhỏ nhất trong đó thuộc S, ta được một hệ thặng dư đầy đủ môđun n và đó chính là tập $\mathrm{Ap}(S,n)$. Như vậy tập Apéry của phần tử n trong nửa nhóm số S có n phần tử.

1.2.4 Ví dụ. Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \to\}$$

(trong đó ký hiệu $14 \to$ nghĩa là các số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 14). Ta tính được

$$\mathrm{Ap}(S,5) = \{0, 7, 9, 16, 18\},$$

$$\mathrm{Ap}(S,7) = \{0, 5, 9, 10, 15, 18, 20\}.$$

1.3 Số Frobenius của nửa nhóm số

Trong số các bất biến của một nửa nhóm số, có một bất biến quan trọng và có nhiều ứng dụng là *số Frobenius*. Nói một cách đơn giản, *số Frobenius* của một nửa nhóm số S là số nguyên lớn nhất mà không thuộc S, ký hiệu là $F(\mathrm{S})$. Hiện nay, chưa có công thức cụ thể nào để tính số Frobenius của một nửa nhóm số bất kỳ.

1.3.1 Định nghĩa. Cho S là một nửa nhóm số. Số nguyên lớn nhất không thuộc S được gọi là *số Frobenius của* S và được ký hiệu là $\mathrm{F}(S)$.

Ký hiệu $\mathbb{Z}$ là tập hợp số nguyên. Từ định nghĩa trên ta có

$$\mathrm{F}(S) = \max(\mathbb{Z} \setminus S).$$

1.3.2 Ví dụ. 1) Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 4, 7 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18 \rightarrow\}.$$

Khi đó ta tính được $\mathrm{F}(S) = 17$.
2) Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \rightarrow\}.$$

Khi đó ta tính được $\mathrm{F}(S) = 13$.

Mệnh đề sau đây cho ta một công thức tính số Frobenius của một nửa nhóm số thông qua tập Apéry.

1.3.3 Mệnh đề. *Cho nửa nhóm số S và n là một phần tử khác* 0 *thuộc S. Khi đó*

$$\mathrm{F}(S) = \max \mathrm{Ap}(S, n) - n.$$

Trong trường hợp nửa nhóm số sinh bởi hai phần tử thì từ mệnh đề trên ta có công thức tính số Frobenius như sau.

1.3.4 Hệ quả. *Cho nửa nhóm số $S = \langle a, b\rangle$, trong đó a, b là các số nguyên dương sao cho* $\gcd(a, b) = 1$. *Khi đó số Frobenius của nửa nhóm số S được xác định như sau:*

$$\mathrm{F}(S) = ab - a - b.$$

1.4 Giống của nửa nhóm số

1.4.1 Định nghĩa. Cho S là một nửa nhóm số. Ký hiệu $H\left(S\right) = \mathbb{N}\backslash S$. Lực lượng của tập $H(S)$ ký hiệu là $g(S)$ và được gọi là *giống của nửa nhóm số* S, đôi khi nó còn được gọi là *bậc kỳ dị của* S.

1.4.2 Ví dụ. 1) Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 4, 7\rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18 \rightarrow\}.$$

Khi đó ta tính được $\mathrm{g}(S) = 9$.
2) Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 5, 7, 9\rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \rightarrow\}.$$

Khi đó ta tính được $\mathrm{g}(S) = 8$.

1.4.3 Mệnh đề. *Cho nửa nhóm số S và n là một phần tử khác* 0 *thuộc S. Khi đó:*

$$g\left(S\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{w \in Ap(S,n)} w\right) - \frac{n-1}{2}.$$

Trong trường hợp nửa nhóm số có chiều nhúng bằng 2 thì ta có thể tính giống của nó như sau:

1.4.4 Hệ quả. *Cho nửa nhóm số $S = \langle a, b\rangle$, trong đó a, b là các số nguyên dương sao cho* $\gcd(a, b) = 1$. *Khi đó giống của nửa nhóm số S được xác định như sau:*

$$g\left(S\right) = \frac{ab - a - b + 1}{2}.$$

1.5 Số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số

1.5.1 Định nghĩa. Cho S là một nửa nhóm số. Khi đó

(1) Số nguyên x được gọi là *số giả Frobenius* nếu $x \notin S$ và $x + s \in S$ với mọi $s \in S \setminus \{0\}$.

(2) Tập các số giả Frobenius của S kí hiệu là $PF(S)$. Lực lượng của tập hợp $PF(S)$ được gọi là *kiểu* của S và kí hiệu là $t(S)$.

Từ định nghĩa trên, ta có nhận xét sau:

(1) $PF(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid x + s \in S, \forall s \in S \setminus \{0\}\}$.

(2) $F(S) \in PF(S)$ và $F(S)$ là số lớn nhất của $PF(S)$.

Trên nửa nhóm số S, xét quan hệ hai ngôi $\leq_S$ xác định như sau: $a \leq_S b$ nếu $b - a \in S$. Quan hệ hai ngôi $\leq_S$ có tính phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu nên nó là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}$.

Đối với mỗi tập con X của S ta kí hiệu $Maximal_{\leq S}(X)$ là tập tất cả các phần tử cực đại của X theo quan hệ thứ tự $\leq_S$.

1.5.2 Mệnh đề. *Cho S là một nửa nhóm số và x là một số nguyên khác không của S. Khi đó,*

(1) $PF(S) = Maximal_{\leq S}(\mathbb{Z} \backslash S)$;

(2) $PF(S) = \{w - x \mid w \in Maximal_{\leq S}(Ap(S, x))\}$.

Cho S là một nửa nhóm số và $s_1, \ldots, s_n$ là một hệ sinh tối tiểu của S sao cho $s_1 < ... < s_n$. Số tự nhiên bé nhất trong hệ sinh tối tiểu gọi là *số bội* của S, kí hiệu là $m(S)$. Do tính duy nhất của hệ sinh tối tiểu nên s_1 xác định duy nhất. Vậy $m(S) = s_1$.

Ta đã biết, số phần tử của tập $Ap(S, n)$ bằng n và 0 không bao giờ là phần tử cực đại nên từ Mệnh đề 1.5.2 ta có một chặn trên cho kiểu của nửa nhóm số S trong kết quả sau.

1.5.3 Hệ quả. *Cho S là một nửa nhóm số. Kiểu của nửa nhóm số S thỏa mãn $t(S) \leq m(S) - 1$.*

CHƯƠNG 2

VỀ NỬA NHÓM SỐ REPUNIT

Cho b là một số nguyên ($|b| \geq 2$). Một repunit cơ số b là một số nguyên mà các chữ số của nó chỉ gồm chữ số 1 khi biểu diễn theo cơ số b. Như vậy một repunit n chữ số trong cơ số b là

$$R_n^{(b)} = 1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1} = \frac{b^n - 1}{b - 1}, \quad n \geq 1.$$

Trong hệ thập phân, dãy các repunit bắt đầu với $1, 11, 111, ...$ Các repuit cơ số 2 chính là các số Mersenne $2^n - 1$, dãy này bắt đầu với $1, 3, 7, 15, ...$

Nửa nhóm số repunit là nửa nhóm số sinh bởi các repunit. Cho b và n là các số nguyên dương ($b \geq 2$). Nửa nhóm số repunit $S(b, n)$ là nửa nhóm số sinh bởi tập các repunit $\{R_{n+i}^{(b)} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Trong [5], các nhà toán học J. C. Rosales, M. B. Branco và D. Torrão đã nghiên cứu về nửa nhóm số repunit. Họ đã chỉ ra hệ sinh tối tiểu, chiều nhúng, số Frobenius, giống và kiểu của nửa nhóm số $S(b, n)$. Trong chương này, chúng tôi trình bày về nửa nhóm số repunit dựa vào bài báo [5].

2.1 Nửa nhóm số repunit

2.1.1 Định nghĩa. Một *repunit* là một số nguyên mà các chữ số của nó chỉ là các chữ số 1.

Chẳng hạn, $1, 11, 111$ hoặc $1111, \ldots$ là những ví dụ về repunit.

Cho b là một số nguyên, $|b| \geq 2$ (b có thể là số âm hoặc số dương). Các repunit cơ số b là

$$R_n^{(b)} = 1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1} = \frac{b^n - 1}{b - 1}, \quad n \geq 1.$$

Như vậy, các repunit $R_n^{(b)}$ là các số mà các chữ số của chúng chỉ gồm chữ số 1 khi biểu diễn theo cơ số b. Hai repunit cơ số b đầu tiên ứng với $n = 1$ và $n = 2$ là

$$R_1^{(b)} = \frac{b-1}{b-1} = 1 \qquad \text{và} \qquad R_2^{(b)} = \frac{b^2-1}{b-1} = b + 1.$$

Đặc biệt, đối với hệ thập phân (cơ số 10) các repunit $R_n^{(10)}$ được ký hiệu đơn giản là R_n và

$$R_n \equiv R_n^{(10)} = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}, \text{với } n \geq 1.$$

Do đó, $R_n = R_n^{(10)}$ là số mà tất cả các chữ số của chúng đều là chữ số 1 viết trong hệ biểu diễn cơ số 10. Dãy các repunits cơ số 10 bắt đầu với $1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, \ldots.$

Tương tự, các repunit cơ số 2 là

$$R_n^{(2)} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1, \text{với } n \geq 1.$$

Do đó, $R_n^{(2)}$ là số gồm n chữ số 1 viết trong hệ ghi cơ số 2. Như vậy, các repunit cơ số 2 chính là các số Mersenne $M_n = 2^n - 1$, dãy này bắt đầu với $1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, 8191, 16383, 32767, 65535, \ldots.$

Như vậy, tập các repunit cơ số b là

$$\left\{ \frac{b^n - 1}{b - 1} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Cho b là một số nguyên lớn hơn 2 và n là một số nguyên dương. Ký hiệu $S(b, n)$ là vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$ sinh bởi $\left\{ \frac{b^n-1}{b-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, nghĩa là

$$S(b, n) = \left\langle \left\{ \frac{b^{n+i} - 1}{b - 1} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \right\rangle.$$

2.1.2 Mệnh đề. *$S(b,n)$ là một nửa nhóm số.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.1.2, để chứng minh $S(b,n)$ là một nửa nhóm số ta chỉ cần chứng minh

$$\gcd\left(\left\{\frac{b^{n+i}-1}{b-1} \mid i \in \mathbb{N}\right\}\right) = 1.$$

Ta có

$$b^n - 1 = (b-1)(b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b + 1),$$

suy ra $\dfrac{b^n-1}{b-1}$ là một số nguyên dương. Mặt khác,

$$\begin{aligned}
\gcd\left\{\frac{b^n-1}{b-1}, \frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right\} &= \frac{1}{b-1}\left(\gcd\{b^n-1, b^{n+1}-1\}\right)\\
&= \frac{1}{b-1}\left(\gcd\{b^n-1, b(b^n-1)+b-1\}\right)\\
&= \frac{1}{b-1}\left(\gcd\{b^n-1, b-1\}\right)\\
&= \frac{1}{b-1}(b-1) = 1.
\end{aligned}$$

Do đó mệnh đề được chứng minh. □

2.1.3 Định nghĩa. Nửa nhóm số $S(b,n)$ được gọi là *nửa nhóm số repunit.*

2.2 Chiều nhúng của nửa nhóm số repunit

Ký hiệu $M(b,n)$ là vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $(\mathbb{N},+)$ sinh bởi $\left\{b^{n+i}-1 \mid i \in \mathbb{N}\right\}$.

Khi đó

$$S(b,n) = \left\{\frac{m}{b-1} \mid m \in M(b,n)\right\}.$$

Vì $S(b,n)$ là một nửa nhóm số nên $\gcd\left(S(b,n)\right) = 1$. Do đó

$$\gcd(M(b,n) = b-1$$

và ánh xạ

$$\phi : M(b,n) \to S(b,n)$$

xác định bởi $\phi(m) = \dfrac{m}{b-1}$ là một đẳng cấu vị nhóm. Tóm lại, nếu X là một hệ sinh tối tiểu của $M(b,n)$ thì $\left\{\dfrac{x}{b-1} \mid x \in X\right\}$ là một hệ sinh tối tiểu của $S(b,n)$.

2.2.1 Bổ đề. *Cho s và t là các số nguyên và A là một tập hợp khác rỗng các số nguyên dương sao cho $M = \langle A \rangle$. Khi đó các điều kiện sau đây là tương đương:*

(1) $sa + t \in M$ *với mọi* $a \in A$;

(2) $sm + t \in M$ *với mọi* $m \in M \setminus \{0\}$.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2): Nếu $m \in M \setminus \{0\}$ thì tồn tại $a_1, \ldots, a_k \in A$ sao cho $m = a_1 + \ldots + a_k$. Nếu $k = 1$ thì $m = a_1$, suy ra

$$sm + t = sa_1 + t \in M.$$

Nếu $k \geq 2$, do M đóng kín đối với phép cộng nên

$$sm + t = s(a_1 + \ldots + a_{k-1}) + sa_k + t \in M.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Hiển nhiên. $\square$

Bổ đề tiếp theo cho ta một tính chất của vị nhóm $M(b,n)$, nó chính là chìa khóa trong việc chứng minh các kết quả trong chương này.

2.2.2 Bổ đề. *Nếu $m \in M(b,n) \setminus \{0\}$ thì $bm + b - 1 \in M(b,n)$.*

Chứng minh. Vì $M(b,n) = \left\langle \left\{ b^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N} \right\} \right\rangle$ và

$$b(b^{n+i} - 1) + b - 1 = b^{n+i+1} - 1 \in M(b,n)$$

nên theo Bổ đề 2.2.1 ta có $bm + b - 1 \in M(b,n)$ với mọi $m \in M(b,n) \setminus \{0\}$. $\square$

Ta thấy rằng nếu X và Y là các tập hợp khác rỗng các số nguyên dương sao cho $Y \subseteq X$ và $X \subseteq \langle Y \rangle$ thì $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$.

Bổ đề sau đây chỉ ra một hệ sinh hữu hạn của $M(b, n)$.

2.2.3 Bổ đề. *Tập hợp* $\left\{b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}$ *là một hệ sinh của* $M(b, n)$.

Chứng minh. Ta ký hiệu

$$M = \left\langle \{b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\} \right\rangle.$$

Đầu tiên ta chứng minh rằng nếu $m \in M \backslash \{0\}$ thì $bm + b - 1 \in M$. Thật vậy, với $n = 1$, khẳng định là hiển nhiên đúng. Với $n \geq 2$, nếu $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ thì

$$b(b^{n+i} - 1) + b - 1 = b^{n+i+1} - 1 \in M.$$

Hơn nữa,

$$b(b^{2n-1} - 1) + b - 1 = b^{2n} - 1 = (b^n - 1)(b^n + 1) \in M.$$

Áp dụng Bổ đề 2.2.1 ta có $bm + b - 1 \in M$ với mọi $m \in M \setminus \{0\}$.

Bây giờ ta chứng minh rằng $M(b, n) = M$. Ta chỉ cần chứng minh rằng $b^{n+i} - 1 \in M$ với mọi $i \in \mathbb{N}$. Ta chứng minh quy nạp theo i. Với $i = 0$ khẳng định là đúng. Giả sử khẳng định đúng đối với i và ta sẽ chứng minh khẳng định đúng đối với $i + 1$. Thật vậy, vì

$$b^{n+i+1} - 1 = b(b^{n+i} - 1) + b - 1$$

nên theo giả thiết quy nạp và do $bm + b - 1 \in M$ với mọi $m \in M \setminus \{0\}$ như đã chỉ ra ở trên ta có $b^{n+i+1} - 1 \in M$. $\square$

Định lý sau đây chỉ ra rằng hệ sinh của $M(b, n)$ trong bổ đề trên là tối tiểu.

2.2.4 Định lý. *Tập hợp*

$$\{b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

là một hệ sinh tối tiểu của $M(b, n)$.

Chứng minh. Nếu $n = 1$ thì định lí hiển nhiên đúng. Do đó ta giả sử rằng $n \geq 2$. Đầu tiên ta chứng minh rằng

$$b^{2n-1} - 1 \notin \left\langle \left\{ b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n-2\} \right\} \right\rangle.$$

Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại $a_0, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} b^{2n-1} - 1 &= a_0(b^n - 1) + \dots + a_{n-2}(b^{2n-2} - 1) \\ &= a_0 b^n + \dots + a_{n-2} b^{n-2} - (a_0 + \dots + a_{n-2}). \end{aligned}$$

Suy ra

$$a_0 + \dots + a_{n-2} \equiv 1 \pmod{b^n}.$$

Điều này dẫn đến $a_0 + \dots + a_{n-2} = 1 + kb^n$ với $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, do đó

$$a_0 + \dots + a_{n-2} \geq 1 + b^n.$$

Tóm lại, ta có

$$\begin{aligned} b^{2n-1} - 1 &= a_0(b^n - 1) + \dots + a_{n-2}(b^{2n-2} - 1) \\ &\geq (a_0 + \dots + a_{n-2})\,(b^n - 1) \\ &\geq (1 + b^n)\,(b^n - 1) = b^{2n} - 1 > b^{2n-1} - 1, \end{aligned}$$

điều này không thể xảy ra.

Theo Bổ đề 2.2.3 thì tập

$$\left\{ b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

là một hệ sinh của $M(b, n)$. Nếu nó không là hệ sinh tối tiểu thì tồn tại $h \in \{1, \dots, n-1\}$ sao cho

$$b^{n+h} - 1 \in \left\langle \left\{ b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots h-1\} \right\} \right\rangle.$$

Đặt
$$M = \left\langle \left\{ b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots h-1\} \right\} \right\rangle .$$
Nếu $i \in \{0, \dots, h-2\}$ thì
$$b(b^{n+i} - 1) + b - 1 = b^{n+i+1} - 1 \in M.$$
Hơn nữa, theo chứng minh trên
$$b(b^{n+h-1} - 1) + b - 1 = b^{n+h} - 1 \in M.$$
Do đó, theo Bổ đề 2.2.1 ta có $bm + b - 1 \in M$ với mọi $m \in M \setminus \{0\}$.

Bây giờ ta sử dụng quy nạp theo i để chứng minh $b^{n+i} - 1 \in M$ với mọi $i \in \mathbb{N}$. Với $i = 0$ thì khẳng định là đúng. Giả sử khẳng định đúng với i. Vì
$$b^{n+i+1} - 1 = b(b^{n+i} - 1) + b - 1$$
nên theo giả thiết quy nạp ta có $b^{n+i+1} - 1 \in M$. Từ đó suy ra
$$b^{2n-1} - 1 \in M \subseteq \left\langle \left\{ b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, \dots, n-2\} \right\} \right\rangle ,$$
điều này mâu thuẫn với
$$b^{2n-1} - 1 \notin \left\langle \left\{ b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, \dots, n-2\} \right\} \right\rangle .$$
Định lý hoàn toàn được chứng minh. □

Như một hệ quả của định lý trên, ta có phát biểu sau đây.

2.2.5 Hệ quả. *Nửa nhóm số repunit $S(b, n)$ có chiều nhúng n. Hơn nữa, hệ sinh tối tiểu của nó là*
$$\left\{ \frac{b^{n+i} - 1}{b - 1} \mid i \in \{0, \dots, n-1\} \right\} .$$
Chứng minh. Theo định lý trên tập hợp
$$\{b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

là một hệ sinh tối tiểu của $M(b, n)$. Mặt khác, theo nhận xét trước Bổ đề 2.2.1, nếu X là một hệ sinh tối tiểu của $M(b, n)$ thì

$$\left\{\frac{x}{b-1} \mid x \in X\right\}$$

là một hệ sinh tối tiểu của $S(b, n)$. Do đó, ta suy ra

$$\left\{\frac{b^{n+i}-1}{b-1} \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}$$

là một hệ sinh tối tiểu của $S(b, n)$ và do đó $S(b, n)$ có chiều nhúng bằng n. $\square$

Chú ý rằng $\mathbb{N}$ là nửa nhóm số repunit duy nhất với chiều nhúng bằng 1. Với $n \geq 2$, theo Hệ quả 2.2.5 có vô số nửa nhóm số repunit với chiều nhúng n và đó chính là $\{S(b, n) \mid b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\}$.

2.2.6 Ví dụ. Tập các nửa nhóm số repunit với chiều nhúng bằng 3 là

$$\begin{aligned} \{S(b,3) \mid b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\} &= \left\{\left\langle \frac{b^3-1}{b-1}, \frac{b^4-1}{b-1}, \frac{b^5-1}{b-1} \right\rangle \mid b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\right\} \\ &= \{\langle\{7, 15, 31\}\rangle, \langle\{13, 40, 121\}\rangle, \ldots\}. \end{aligned}$$

2.3 Tập Apéry của nửa nhóm số repunit

Cho S là một nửa nhóm số và cho x là một phần tử khác không của nó. Khi đó ta nhắc lại rằng tập Apéry của x trong S là

$$\mathrm{Ap}(S, x) = \{s \in S \mid s - x \notin S\}.$$

Thông tin về tập $\mathrm{Ap}(S, x)$ sẽ cho ta nhiều thông tin về nửa nhóm số S.

Từ định nghĩa và các mệnh đề 1.3.3, 1.4.3, ta có thể mở rộng khái niệm tập Apéry của nửa nhóm số lên vị nhóm con của $(\mathbb{N}, +)$. Nếu M là một vị nhóm con của $(\mathbb{N}, +)$ và $m \in M \setminus \{0\}$ thì ta định nghĩa tập Apéry của m trong M là

$$\mathrm{Ap}(M, m) = \{x \in M \;\mid\; x - m \notin M\}.$$

Mục tiêu của tiết này là chứng minh Định lý 2.3.4. Định lý này cho phép ta miêu tả tập $\mathrm{Ap}(M(b,n), m_0)$.

2.3.1 Bổ đề. *Cho M là một vị nhóm con của $(\mathbb{N}, +)$ sao cho $M \neq \{0\}$ và đặt $d = \gcd(M)$. Khi đó*

(1) $S = \left\{ \frac{m}{d} \mid m \in M \right\}$ là một nửa nhóm số;

(2) Nếu $m \in M \setminus \{0\}$ thì $\mathrm{Ap}(M, m) = \left\{ dw \mid w \in \mathrm{Ap}(S, \frac{m}{d}) \right\}$;

(3) Lực lượng của tập hợp $\mathrm{Ap}(M, m)$ là $\dfrac{m}{d}$.

Từ đây, ta sẽ ký hiệu $m_i = b^{n+i} - 1$ với mỗi $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Với ký hiệu này $\{m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}\}$ là hệ sinh tối tiểu của $M(b,n)$ và

$$\left\{ \frac{m_0}{b-1}, \frac{m_1}{b-1}, \ldots, \frac{m_{n-1}}{b-1} \right\}$$

là hệ sinh tối tiểu của $S(b,n)$.

2.3.2 Bổ đề. *Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2. Khi đó*

(1) Nếu $0 < i \leq j < n-1$ thì $m_i + bm_j = bm_{i-1} + m_{j+1}$;

(2) Nếu $0 < i \leq n-1$ thì $m_i + bm_{n-1} = bm_{i-1} + (b^n + 1)m_0$.

Ta ký hiệu $R(b,n)$ là tập tất cả các $n-1$-bộ số $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) Với mọi $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ ta có $a_i \in \{0, 1, \ldots, b\}$;

(2) Nếu $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ và $a_i = b$ thì $a_1 = \ldots = a_{i-1} = 0$.

2.3.3 Bổ đề. *Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2. Nếu $x \in \mathrm{Ap}(M(b,n), m_0)$ thì tồn tại $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R(b,n)$ sao cho*

$$x = a_1 m_1 + \ldots + a_{n-1} m_{n-1}.$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo x.

Với $x = 0$ thì bổ đề là hiển nhiên đúng.

Giả sử rằng $x > 0$ và đặt

$$j = \min\{i \in \{0, \dots, n-1 \mid x - m_i \in M(b,n)\}.$$

Vì $x \in \operatorname{Ap}(M(b,n), m_0)$ nên $j \neq 0$. Theo giả thiết quy nạp thì tồn tại $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in R(b,n)$ sao cho

$$x - m_j = a_1 m_1 + \dots + a_{n-1} m_{n-1}.$$

Do đó

$$x = a_1 m_1 + \dots + (a_j + 1) m_j + \dots + a_{n-1} m_{n-1}.$$

Để hoàn tất chứng minh, ta sẽ chỉ ra rằng

$$(a_1, \dots, a_j + 1, \dots, a_{n-1}) \in R(b,n).$$

Nếu $a_j + 1 = b + 1$ thì theo Bổ đề 2.3.2 ta có:

- Nếu $j < n-1$ thì $(a_j + 1)m_j = (b+1)m_j = bm_{j-1} + m_{j+1}$;
- Nếu $j = n-1$ thì $(a_j + 1)m_j = (b+1)m_j = bm_{j-1} + (b^n + 1)m_0$.

Trong cả hai trường hợp trên, ta đều thu được $x - m_{j-1} \in M(b,n)$, điều này mâu thuẫn với tính tối tiểu của j.

Bây giờ ta giả sử tồn tại $k > j$ sao cho $a_k = b$. Khi đó theo Bổ đề 2.3.2 ta có:

- Nếu $k < n-1$ thì $m_j + bm_k = bm_{j-1} + m_{k+1}$;
- Nếu $k = n-1$ thì $m_j + bm_k = bm_{j-1} + (b^n + 1)m_0$.

Trong cả hai trường hợp trên ta đều thu được $x - m_{j-1} \in M(b,n)$, điều này mâu thuẫn với tính tối tiểu của j. Hơn nữa, từ tính tối tiểu của j ta suy ra $a_1 = \dots = a_{j-1} = 0$.

Từ những chứng minh trên ta suy ra $(a_1, \dots a_j + 1, \dots, a_{n+1}) \in R(b,n)$.

□

Chú ý rằng nếu h là một số nguyên dương thì dãy các số $b^n, b^{n+1}, \dots, b^{n+h}$ là một cấp số nhân công bội b. Do đó

$$b^n + b^{n+1} + \dots + b^{n+h} = \frac{b^{n+h+1} - b^n}{b-1}.$$

2.3.4 Định lý. *Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2. Khi đó*

$$\mathrm{Ap}(M(b,n), m_0) = \{a_1m_1 + \dots + a_{n-1}m_{n-1} \mid (a_1, \dots, a_{n-1}) \in R(b,n)\}.$$

Chứng minh. Ta thấy rằng

$$R(b,n) = \{0, ..., b-1\}^{n-1} \cup \{(a_1, \dots, a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_1 = b\} \cup ...$$
$$\cup \{(a_1, \dots, a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_{n-1} = b\}.$$

Khi đó $R(b,n)$ là hợp rời của các tập hợp như trên, do đó lực lượng $R(b,n)$ bằng

$$b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + b^0 = \frac{b^n - 1}{b-1} = \frac{m_0}{b-1}.$$

Theo Bổ đề 2.3.3 thì

$$\mathrm{Ap}(M(b,n), m_0) \subseteq \{a_1m_1 + \dots + a_{n-1}m_{n-1} \mid (a_1, \dots, a_{n-1}) \in R\,(b,n)\,\}.$$

Theo Bổ đề 2.3.1 thì lực lượng của $\mathrm{Ap}(M(b,n), m_0)$ bằng $\dfrac{m_0}{b-1}$. Hơn nữa, theo chứng minh trên, lực lượng của tập

$$\{a_1m_1 + \dots + a_{m-1}m_{n-1} \mid (a_1, \dots, a_{n-1} \in R(b,n)\}$$

là bé hơn hoặc bằng $\dfrac{m_0}{b-1}$. Do đó

$$\mathrm{Ap}(M(b,n), m_0) = \{a_1m_1 + \dots + a_{n-1}m_{n-1} \mid (a_1, \dots, a_{n-1}) \in R(b,n)\}.$$

□

Từ chứng minh của định lý trên ta có hệ quả sau đây.

2.3.5 Hệ quả. *Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2; cho $(a_1, \dots, a_{n-1})$ và $(b_1, \dots, b_{n-1})$ là hai phần tử khác nhau trong $R(b,n)$. Khi đó*

$$a_1m_1 + \dots + a_{n-1}m_{n-1} \neq b_1m_1 + \dots + b_{n-1}m_{n-1}.$$

Như một hệ quả của Bổ đề 2.3.1 và Định lý 2.3.4, ta có kết quả sau.

2.3.6 Hệ quả. *Cho n là một số nguyên hơn hoặc bằng 2. Khi đó*

$$\mathrm{Ap}(S(b,n), \frac{m_0}{b-1}) = \{a_1\frac{m_1}{b-1} + \ldots + a_{n-1}\frac{m_{n-1}}{b-1} \mid (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R(b,n)\}.$$

Nhắc lại rằng số nguyên dương nhỏ nhất thuộc vào nửa nhóm số S là bội của S và ký hiệu là $m(S)$. Nửa nhóm S được gọi là có *tập Apery đơn điệu* nếu

$$w(1) < w(2) < \ldots < w(m(S) - 1)$$

trong đó $w(i)$ là phần tử bé nhất của S đồng dư với i theo môđun $m(S)$ với mọi $i \in \{1, \ldots, m(S) - 1\}$. Mục tiêu tiếp theo của tiết này là chứng minh $S(b,n)$ là nửa nhóm số có tập Apéry đơn điệu. Chú ý rằng không phải mọi nửa nhóm số đều có tính chất này.

2.3.7 Ví dụ. Cho $S = \langle 5, 7, 9\rangle$. Khi đó S là nửa nhóm số không có tập Apéry đơn điệu vì $m(S) = 5$ và

$$\mathrm{Ap}(S, 5) = \{w(0) = 0, w(1) = 16, w(2) = 7, w(3) = 18, w(4) = 9\};$$

như vậy $w(1) > w(2)$.

2.3.8 Bổ đề. *Cho $n \geq 2$. Nếu $x \in S(b,n)$ và $x \not\equiv 0 \mod \frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{b}-1}$ thì*

$$x - 1 \in S(b,n).$$

Chứng minh. Nếu $x \in S(b,n)$ thì tồn tại $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$ sao cho

$$x = a_0\frac{m_0}{b-1} + \ldots + a_{n-1}\frac{m_{n-1}}{b-1}.$$

Bên cạnh đó, nếu $x \not\equiv 0 \mod \frac{m_0}{b-1}$ thì tồn tại $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ sao cho $a_1 \neq 0$. Do đó

$$x - 1 = a_0 \ \ \frac{m_0}{b-1} + \ldots + (a_i - 1) \ \ \frac{m_i}{b-1} + \ldots + a_{n-1} \ \ \frac{m_{n-1}}{b-1} + \frac{m_i}{b-1} - 1.$$

Vì

$$\frac{m_i}{b-1} - 1 = \frac{b^{n+i}-1}{b-1} - 1 = \frac{b^{n+i}-b}{b-1} = b \quad \frac{b^{n+i-1}-1}{b-1} = b \quad \frac{m_i}{b-1}$$

nên

$$x-1 = a_0 \quad \frac{m_0}{b-1} + \ldots + (a_{i-1}+b) \quad \frac{m_{i-1}}{b-1} + (a_i - 1) \quad \frac{m_i}{b-1} + \ldots + a_{n-1} \quad \frac{m_{n-1}}{b-1}$$

thuộc vào $S(b,n)$. $\square$

2.3.9 Mệnh đề. *Cho $n \geq 2$. Khi đó $S(b,n)$ là một nửa nhóm số có tập Apéry đơn điệu.*

Chứng minh. Theo Hệ quả 2.2.5 ta có $m(S(b,n)) = \dfrac{m_0}{b-1}$. Ta sẽ chứng minh rằng $w(i) < w(i+1)$ trong đó $w(i)$ là phần tử nhỏ nhất của $S(b,n)$ đồng dư với i môđun $\dfrac{m_0}{b-1}$ với mọi $i \in \{1, \ldots, m(S(b,n))-1\}$. Vì $w(i+1) \in S(b,n)$ và $w(i+1) \not\equiv 0 \bmod \dfrac{m_0}{b-1}$ nên theo Bổ đề 2.3.8 ta có $w(i+1)-1 \in S(b,n)$. Do đó $w(i) \leq w(i+1)-1$ vì $w(i+1)-1 \equiv i \bmod \dfrac{m_0}{b-1}$. $\square$

Ví dụ sau đây sẽ minh họa cho các kết quả trình bày trong tiết này.

2.3.10 Ví dụ. Chúng ta sẽ xác định tập hợp

$$\mathrm{Ap}\left(S(3,3), \frac{3^3-1}{3-1}\right) = \mathrm{Ap}(\langle 13, 40, 121\rangle, 13).$$

Ta dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(3,3) = \{&(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),\\ &(3,0),(3,1),(3,2),(0,3)\}. \end{aligned}$$

Theo Hệ quả 2.3.6 ta có

$$\mathrm{Ap}(\langle 13,40,121\rangle, 13) = \{0,121,242,40,161,282,80,201,322,120,241,362,363\}.$$

Hơn nữa, theo Mệnh đề 2.3.9 ta có $w(0)=0, w(1)=40, w(2)=80, w(3)=120, w(4)=121, w(5)=161, w(6)=201, w(7)=241, w(8)=242, w(9)=282, w(10)=322, w(11)=362$ và $w(12)=363$.

Chú ý rằng một số nguyên z thuộc S khi và chỉ khi $z \geq w\ (z \bmod x)$. Do đó $265 \in S(3,3)$ và $270 \notin S(3,3)$ vì $265\ \geq w(265 \bmod 13) = w(5) = 161$ và $270 < w(270 \bmod 13) = w(10) = 322$.

2.4 Số Frobenius, giống, số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số repunit

2.4.1 Bổ đề. *Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Khi đó các phần tử tối đại (theo thứ tự tích) trong $R(b,n)$ là*

$(b, b-1, \ldots, b-1), (0, b, b-1, \ldots, b-1)$ *và* $(0, \ldots, 0, b)$.

Kết quả tiếp theo chỉ ra rằng $bm_1 + (b-1)m_2 + \ldots + (b-1)m_{n-1}, bm_2 + (b-1)m_3 + \ldots + (b-1)m_{n-1}, \ldots, bm_{n-1}$ là một dãy các số nguyên mà mỗi số hạng có được bằng cách lấy hạng tử phía trước cộng thêm $b-1$.

2.4.2 Bổ đề. *Cho n là số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3 và $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. Khi đó $bm_i + b - 1 = m_{i+1}$.*

Chứng minh. Ta có $bm_i + b - 1 = b(b^{n+i} - 1) + b - 1 = b^{n+i+1} - 1 = m_{i+1}$. □

Định lý sau cho ta công thức tính số Frobenius của nửa nhóm số repunit $S(b,n)$.

2.4.3 Định lý. *Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2. Khi đó*

$$F(S(b,n)) = \frac{b^n - 1}{b-1}\ b^n - 1.$$

Chứng minh. Theo Hệ quả 2.3.6 và các Bổ đề 2.4.1 và Bổ đề 2.4.2 ta có

$$\max(\mathrm{Ap}(S(b,n), \frac{m_0}{b-1})) = b\ \frac{m_{n-1}}{b-1}.$$

Sử dụng Mệnh đề 1.3.3, ta có

$$F(S(b,n)) = b\ \frac{m_{n-1}}{b-1} - \frac{m_0}{b-1} = \frac{b(b^{2n-1} - 1)}{b-1} - \frac{b^n - 1}{b-1} = \frac{b^n - 1}{b-1}\ b^n - 1.$$

□

Chú ý rằng với $n = 1$, công thức trong định lý trên không đúng vì $S(b,1) = \mathbb{N}$ và $F(\mathbb{N}) = -1 \neq \dfrac{b-1}{b-1}\ b-1 = b-1$.

2.4.4 Ví dụ. Cho nửa nhóm số $S(3,4)$. Ta viết cụ thể hơn như sau

$$S(3,4) = \left\langle \frac{3^4-1}{3-1}, \frac{3^5-1}{3-1}, \frac{3^6-1}{3-1}, \frac{3^7-1}{3-1} \right\rangle = \langle 40, 121, 364, 1093\rangle.$$

Theo Định lý 2.4.3 thì $F(S(3,4)) = \dfrac{3^4-1}{3-1}\ 3^4 - 1 = 3239$.

Mục tiêu tiếp theo là xác định tập tất cả các số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số repunit $S(b,n)$. Theo Mệnh đề 1.5.2, để xác định tập các số giả Frobenius của $S(b,n)$ thì ta chỉ cần xác định tập

$$\mathrm{Maximals}_{\leq S(b,n)}\left(\mathrm{Ap}(S(b,n), \frac{m_0}{b-1}\right).$$

2.4.5 Định lý. *Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2. Khi đó*

$$t(S(b,n)) = n-1.$$

Hơn nữa,

$$PF(S(b,n)) = \{F(S(b,n)) - i \mid i \in \{0,\ldots,n-2\}\}.$$

Chứng minh. Giả sử rằng A là tập các phần tử tối đại của $R(b,n)$ (theo thứ tự tích) và

$$B = \{a_1\ \frac{m_1}{b-1} + \ldots + a_{n-1}\ \frac{m_{n-1}}{b-1}\ \mid\ (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in A\}.$$

Theo Hệ quả 2.3.6 ta có

$$\mathrm{Maximals}_{\leq S(b,n)}\left(\mathrm{Ap}(S(b,n)), \frac{m_0}{b-1}\right) = \mathrm{Maximals}_{\leq S(b,n)} B.$$

Khi đó, sử dụng Bổ đề 2.4.1 và Bổ đề 2.4.2 ta suy ra tập hợp B được sinh bởi $n-1$ số nguyên liên tiếp. Do đó sự sai khác giữa hai phần tử bất kỳ của

B là nhỏ hơn hoặc bằng $n-2$. Vì $\dfrac{m_0}{b-1} = \dfrac{b^n-1}{b-1}$ là số nguyên dương nhỏ nhất trong $S(b,n)$ và $\dfrac{b^n-1}{b-1} > n-2$ nên B là tập các phần tử không so sánh được theo thứ tự $\leq_{S(b,n)}$, suy ra $\mathrm{Maximals}_{\leq_{S(b,n)}} B = B$.

Bây giờ ta sử dụng Mệnh đề 1.5.2 để suy ra

$$PF(S(b,n)) = \{w - \frac{m_0}{b-1} \mid w \in B\}.$$

Theo chứng minh của Định lý 2.4.3 ta có

$$\max(B) = F(S(b,n)) + \frac{m_0}{b-1},$$

suy ra

$$PF(S(b,n)) = \{F(S(b,n)) - i \mid i \in \{0, \ldots, n-2\}\}. \qquad \square$$

Chú ý rằng với $n = 1$, định lý trên không đúng vì $S(b,1) = \mathbb{N}, PF(\mathbb{N}) = \{-1\}$ dẫn đến $t(\mathbb{N}) = 1$. Ta cũng chú ý rằng với mỗi số nguyên dương n tồn tại vô số các nửa nhóm số repunit có kiểu n. Cụ thể hơn, các nửa nhóm số đó chính là $\{S(b, n+1) \mid b \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\}$ trùng với tập các nửa nhóm số repunit với chiều nhúng $n+1$.

2.4.6 Ví dụ. Cho nửa nhóm số $S(3,4)$, ta tính các số giả Frobenius của nó. Theo Ví dụ 2.4.4 thì $F(S(3,4)) = 3239$. Bằng cách sử dụng Định lý 2.4.5, ta tính được

$$PF(S(b,n)) = \{3239, 3238, 3237\}.$$

Kết quả tiếp theo cho ta công thức tính giống của một nửa nhóm số repunit.

2.4.7 Định lý. *Cho n là một số nguyên dương. Khi đó*

$$g(S(b,n)) = \frac{b^n}{2}\left(\frac{b^n-b}{b-1} + n - 1\right).$$

Chứng minh. Với $n = 1$ định lý là hiển nhiên đúng. Bây giờ ta giả sử rằng $n \geq 2$ và với mỗi $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ ta đặt $s_i = \dfrac{m_i}{b-1}$. Sử dụng Mệnh đề 1.4.3, Hệ quả 2.3.6 và Hệ quả 2.3.5, ta có

$$g(S(b,n)) = \frac{1}{s_0}\left(\sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n)} a_1s_1 + \ldots + a_{n-1}s_{n-1}\right) - \frac{s_0 - 1}{2}.$$

Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}\sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n)} a_1s_1 + \ldots + a_{n-1}s_{n-1} = & \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n),a_1=1} s_1 + \ldots \\ & + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n),a_1=b} bs_1 + \ldots \\ & + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n),a_{n-1}=1} s_{n-1} + \ldots \\ & + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n),a_{n-1}=b} bs_{n-1}.\end{aligned}$$

Cho $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Ta có:

- Lực lượng của tập hợp $\{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_i = b\}$ là b^{n-1-i};
- Nếu $x \in \{1, \ldots, b-1\}$ thì lực lượng của tập hợp

  $$\{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_i = x \text{ và } b \notin \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}\}$$

  là b^{n-2};
- Nếu $1 \leq j < i$ thì lực lượng của tập hợp

  $$\{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_i = x \text{ và } a_j = b\}$$

  là b^{n-j-2}.

Do dó, từ các chứng minh trên ta có

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n)} a_1s_1+\ldots+a_{n-1}s_{n-1}$$

$$= \sum_{x=1}^{b-1}\left(x\sum_{i=1}^{n-1}(b^{n-2}+b^{n-3}+\ldots+b^{n-1-i})s_i\right)+b\sum_{i=1}^{n-1}b^{n-1-i}bs_i$$

$$= \tfrac{b(b-1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b^{n-2}+\ldots+b^{n-1-i})s_i+b\sum_{i=1}^{n-1}b^{n-i-1}s_i$$

$$= \tfrac{b(b-1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\tfrac{b^{n-1}-b^{n-i-1}}{b-1}+b\sum_{i=1}^{n-1}b^{n-i-1}s_i$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b^n-b^{n-i})s_i+\sum_{i=1}^{n-1}b^{n-i}s_i=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b^n+b^{n-i})s_i$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b^n+b^{n-i})\left(\tfrac{b^{n+i}-1}{b-1}\right)=\tfrac{1}{2(b-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(b^{2n+i}-b^n+b^{2n}-b^{n-i})$$

$$= \tfrac{1}{2(b-1)}\left(\tfrac{b^{3n}-b^{2n+1}}{b-1}-(n-1)b^n+(n-1)b^{2n}-\left(\tfrac{b^n-b}{b-1}\right)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2(b-1)}\left(\tfrac{(b^n-1)(b^{2n}-b^{n+1}+b^n-b}{b-1}+(n-1)b^n(b^n-1)\right)$$

$$= \tfrac{b^n-1}{2(b-1)}\left(\tfrac{b^{2n}-b^{n+1}+b^n-b}{b-1}+(n-1)b^n\right).$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}
g(S(b,n)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{b^{2n}-b^{n+1}+b^n-b}{b-1}+(n-1)b^n\right)-\frac{\dfrac{b^n-1}{b-1}-1}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{b^{2n}-b^{n+1}+b^n-b}{b-1}+(n-1)b^n-\frac{b^n-b}{b-1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{b^{2n}-b^{n+1}}{b-1}+(n-1)b^n\right)=\frac{b^n}{2}\left(\frac{b^n-b}{b-1}+n-1\right).
\end{aligned}$$

□

2.4.8 Ví dụ. Cho nửa nhóm số $S(3,4)$. Áp dụng Định lý 2.4.7 ta tính được giống của nửa nhóm số này là

$$g(S(3,4)) = \frac{3^4}{2}\left(\frac{3^4-3}{3-1}+4-1\right) = 1701.$$

KẾT LUẬN

Nội dung chính của luận văn là trình bày về nửa nhóm số repunit dựa vào bài báo [5] của J.C. Rosales, M.B. Branco, D. Torrão. Cụ thể là chúng tôi đã trình bày được những nội dung sau đây.

1. Định nghĩa nửa nhóm số repunit.
2. Hệ sinh tối tiểu của nửa nhóm số repunit $S(b, n)$ và từ đó tính được chiều nhúng của nó theo n.
3. Tập Apéry của nửa nhóm số repunit.
4. Số Frobenius, giống, số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số repunit.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Lương Ngọc Nhật (2017), *Một số bất biến của nửa nhóm số*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.

[2] Nguyễn Quang Phúc (2018), *Số Frobenius và giống của nửa nhóm số với chiều nhúng bằng 3*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.

[3] Hoàng Thế Toản (2020), *Về vấn đề số Frobenius cho các nửa nhóm số*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.

Tiếng Anh

[4] J.C. Rosales, P.A. García- Sánchez (2009), *Numerical semigroups*, Development in mathematics, **20**, Springer.

[5] J. C. Rosales, M. B. Branco and D. M. M. Torrão (2016), The Frobenius problem for repunit numerical semigroups, *The Ramanujan Journal* **40**, 323-334.

[6] J. J. Sylvester (1882), Excursus on rational fractions and partitions, *American Journal of Mathematics,* **5**, 119-136.