BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ BÌNH

ẢNH CỦA ÁNH XẠ ĐA THỨC THUẦN NHẤT BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2023

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ BÌNH

ẢNH CỦA ÁNH XẠ ĐA THỨC THUẦN NHẤT BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: **ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ**
Mã số: 8460104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN HỮU QUANG

Nghệ An - 2023

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN

Tác giả bày tỏ lòng kính trọng và tri ân sâu sắc tới TS. Nguyễn Hữu Quang - Thầy giáo hướng dẫn khoa học - đã dành nhiều thời gian và công sức để lựa chọn tài liệu tham khảo và đặt ra đề tài cũng như giúp đỡ cho chúng tôi hoàn thành nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn.

Tác giả gửi lời cảm ơn trân trọng đến các nhà giáo, nhà khoa học thuộc Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, Khoa Toán học, Trường Sư phạm - Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho chúng tôi hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu.

Xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Ban Giám đốc Trung tâm GDNN - GDTX Đức Thọ - đơn vị công tác của tác giả, đã hỗ trợ nhiều về thời gian và tinh thần cho chúng tôi để hoàn thành nhiệm vụ học tập sau đại học.

Dù đã hết sức cố gắng đọc, hiểu, suy nghĩ và nghiền ngẫm song việc trình bày một cách chi tiết những nội dung chuyên sâu thuộc về lĩnh vực đại số và lý thuyết số một cách chặt chẽ sẽ chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót.

Tác giả rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô giáo và của các bạn học viên lớp sau đại học ngành toán để luận văn được hoàn thiện hơn.

Nghệ An, tháng 7 năm 2023

Tác giả

Nguyễn Thị Bình

CÁC KÝ HIỆU TRONG LUẬN VĂN

Ký hiệu	**Ý nghĩa**	**Trang**
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	Tập các số thực, Tập các số thực không âm	
$\mathbb{R}_{++}$	Tập các số thực dương	
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclide thực n chiều	
$M_{m\times n}(\mathbb{R})$	Tập các ma trận hệ số thực cấp $m \times n$	
$M_n(\mathbb{R})$	Tập các ma trận vuông hệ số thực cấp n	
S^n	Tập các ma trận đối xứng cấp n	
S^n_+	Tập các ma trận đối xứng nửa xác định dương cấp n	
S^n_{++}	Tập các ma trận đối xứng xác định dương cấp n	
A^T	Ma trận chuyển vị của ma trận A	
A^+	Ma trận giả nghịch đảo Moore-Penrose của A	
$A \succ 0$	A là ma trận xác định dương	
$A \succeq 0$	A là ma trận nửa xác định dương	
$A \succ B$	$A - B$ là ma trận xác định dương	
$A \succeq B$	$A - B$ là ma trận nửa xác định dương	
$Tr(A)$	Vết của ma trận vuông A	
$\|x\|$	Độ dài véc tơ x	
$\langle x, y\rangle$	Tích vô hướng của x và y	

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Tính chất của tập ảnh của các ánh xạ đa thức thuần nhất là một vấn đề thú vị và có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế. Các kết quả đầu tiên về hướng này thuộc về Toepliz, Hausdorff (The Toeplitz-Hausdorff theorem) và Dines (Dines theorem). Các kết quả này nói về tính lồi của tập ảnh của ánh xạ $F(x) = (x^TAx, x^TBx)$, trong đó A, B là các ma trận đối xứng cấp n. Cho đến nay bài toán về tìm điều kiện cần và đủ để tập $F(\mathbb{R}^n)$, trong đó $F(x) = (x^TAx, x^TBx, x^TCx)$, vẫn là một câu hỏi mở. Vấn đề trở nên phức tạp hơn nếu chúng ta tăng các thành phần của ánh xạ $F(x)$ lên con số lớn hơn 3. Trong khuôn khổ luận văn này chúng tôi chỉ tìm hiểu tập ảnh của ánh xạ bậc hai thuần nhất có ba thành phần. Cụ thể là ánh xạ có dạng sau:

$$\begin{aligned} F:\ & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & x \mapsto F(x) = (x^TAx, x^TBx, x^TCx)^T. \end{aligned}$$

Điều thú vị là hiện nay có nhiều cách tiếp cận các vấn đề trên. Cách thông dụng nhất là dùng các kiến thức Đại số và Hình học. Đặc biệt, có một vài kết quả dùng kiến thức khá xa với bản chất các bài toán trên, chẳng hạn dùng lý thuyết min-max để nghiên cứu các tính chất của tập $F(\mathbb{R}^n)$.

Trong luận văn này, chúng tôi tìm hiểu các cách chứng minh đã có về tập ảnh của ánh xạ trên và các kết quả về bài toán xác định điều kiện để hệ có nghiệm và cố gắng làm cho lời giải đơn giản, dễ tiếp cận hơn.

2. Nội dung nghiên cứu

- Hệ thống lại các tính chất của hàm thuần nhất bậc hai nhiều biến.

- Tìm hiểu về các ma trận đối xứng nửa xác định dương và các tính chất liên quan.

- Tìm hiểu một số kết quả về ảnh của ánh xạ F đề cập ở phần 1.

- Trình bày chi tiết các chứng minh cho các kết quả đã biết và cố gắng mở rộng chúng.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết và dựa vào các tài liệu để giải quyết vấn đề đặt ra.

4. Cấu trúc luận văn

Luận văn được trình bày gồm 2 chương:

- Chương 1 trình bày các kiến thức chuẩn bị làm cơ sở cho Chương 2.

- Chương 2 trình bày các kết quả về tính chất của tập ảnh của ánh xạ đa thức thuần nhất bậc hai, các ứng dụng của chúng vào tìm điều kiện để cho một số hệ có nghiệm.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi trình bày lại các kiến thức cơ bản, cần thiết cho những trình bày về sau.

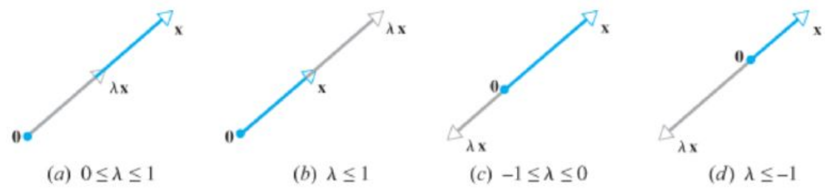
1.1 Giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận

Định nghĩa 1.1.1. Nếu A là một ma trận vuông thì vectơ x khác không được gọi là *vectơ riêng* của A nếu tồn tại một số vô hướng λ sao cho:

$$Ax = \lambda x.$$

Khi đó, số thực λ được gọi là *giá trị riêng* của A và x được gọi là *vectơ riêng* ứng với λ.

Nói chung, hình ảnh của một vectơ x dưới phép nhân với ma trận vuông A khác với x về cả độ lớn và phương. Tuy nhiên, trong trường hợp đặc biệt khi x là một vectơ riêng của A, phép nhân với A không thay đổi phương. Ví dụ, trong $\mathbb{R}^2$ hoặc $\mathbb{R}^3$, khi nhân ánh xạ A với mỗi vectơ riêng x của A (nếu có) với gốc của vectơ x là gốc tọa độ. Tùy thuộc vào dấu và độ lớn của giá trị riêng λ tương ứng với x mà $Ax = \lambda x$ thu ngắn hoặc kéo dài x theo hệ số λ, hoặc làm đảo ngược hướng trong trường hợp λ âm.



Ví dụ 1.1.2. Cho $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ là một vectơ riêng của

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, khi đó

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x.$$

Định lí 1.1.3. *Nếu A là ma trận vuông cấp n thì λ là giá trị riêng của A khi và chỉ khi nó thỏa mãn phương trình:*

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{1.1}$$

Phương trình (1.1) *được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận vuông A và đa thức $p(\lambda) = det(\lambda I - A)$ được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A.*

Dễ thấy, đa thức đặc trưng của ma trận vuông cấp n có dạng

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$$

trong đó hệ số của λ^n là 1. Do đa thức bậc n có tối đa n nghiệm thực nên phương trình

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

có tối đa n nghiệm thực và ma trận vuông cấp n có tối đa n giá trị riêng. Vì phương trình đặc trưng có thể có nghiệm phức nên giá trị riêng của ma trận có thể là số phức, kể cả trường hợp các hệ số của ma trận đều là hệ số thực.

Mệnh đề 1.1.4. *Nếu A là ma trận tam giác cấp $n \times n$ (ma trận tam giác trên, ma trận tam giác dưới hoặc ma trận đường chéo) thì giá trị riêng của A là các hệ số trên đường chéo chính.*

Định lí 1.1.5. *Cho A là ma trận vuông cấp n, các mệnh đề sau tương đương:*

(a) λ là giá trị riêng của A.

(b) Hệ phương trình $(\lambda I - A)x = 0$ có nghiệm không tầm thường.

(c) Tồn tại vectơ x khác không sao cho $Ax = \lambda x$.

(d) λ là nghiệm của phương trình đặc trưng $\det(\lambda I - A) = 0$.

1.2 Ma trận nửa xác định dương và các tính chất liên quan

Cho trước ma trận A cỡ $m \times n$, A^T là ký hiệu của ma trận chuyển vị của A. Tập tất các ma trận đối xứng cấp n được ký hiệu bởi $\mathcal{S}^n$.

- Ma trận đối xứng $A \in S^n$ được gọi là *xác định dương* nếu:

$$x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0. \tag{1.2}$$

- Ma trận đối xứng $A \in S^n$ được gọi là *nửa xác định dương* nếu:

$$x^T Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

- Ma trận xác định dương A được kí hiệu $A \succ 0$.

- Ma trận nửa xác định dương A được kí hiệu $A \succeq 0$.

Tính chất 1.2.1. *a. Cho A là một ma trận đối xứng, khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) A là ma trận nửa xác định dương (xác định dương).

(ii) Các giá trị riêng của A không âm (đều dương).

(iii) Tồn tại ma trận B sao cho $A = B^T B$ (Tồn tại ma trận vuông không suy biến B sao cho $A = B^T B$).

b. Cho $A \succ 0$ khi đó

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow C - B^T A^{-1} B \geq 0. \tag{1.4}$$

1.3 Hàm bậc hai thuần nhất

Định nghĩa 1.3.1. Hàm bậc hai thuần nhất n biến là hàm có dạng:

$$f(x) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{1.5}$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$ và có ít nhất một trong các hệ số $a_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., n$ khác 0. Đặt:

$$A = (a_{ij})_{n \times n},$$

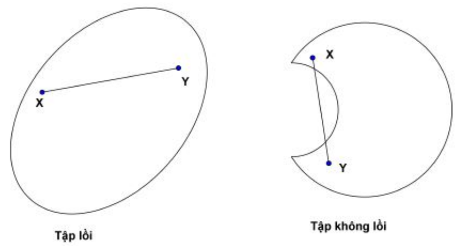
hàm bậc hai được viết dạng:

$$f(x) = x^T A x.$$

Hàm bậc hai thuần nhất $f(x) = x^T A x$ được gọi là *xác định dương (nửa xác định dương)* nếu ma trận của nó là xác định dương (nửa xác định dương).

1.4 Tập lồi, hàm lồi và Định lý tách các tập lồi, nón

Định nghĩa 1.4.1. Giả sử C là một tập trong $\mathbb{R}^n$. Tập C được gọi là *lồi* nếu với mọi x và y thuộc C và với mọi t trong khoảng $[0, 1]$, điểm $(1 - t)x + ty$ cũng thuộc C.



Nói cách khác, mọi điểm trên đoạn thẳng nối x và y đều thuộc C. Điều này cũng dẫn đến kết luận: tập lồi trong không gian vectơ tôpô thì liên thông.

Mệnh đề 1.4.2. *Giả sử S là một tập lồi trong $\mathbb{R}^n$, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ là các điểm thuộc S, và $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ là các số không âm bất kỳ sao cho $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1$. Khi đó điểm $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k$ cũng thuộc S.*

Nếu A, B là các tập lồi, $r \in \mathbb{R}$ thì $A + B, rA$ cũng lồi.

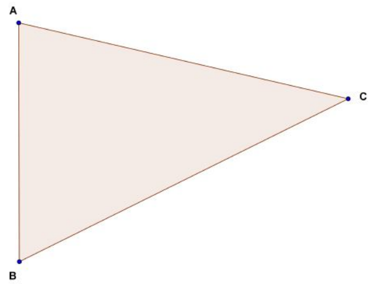
Giao của một họ tùy ý các tập lồi cũng là một tập lồi, điều này cũng có nghĩa là bất kỳ một tập con A nào của không gian vectơ cũng có thể được chứa trong một tập lồi nhỏ nhất (gọi là bao lồi của A, ký hiệu $\text{conv}(A)$), mà tập lồi này cũng chính là giao của tất cả các tập lồi chứa A.

Mệnh đề 1.4.3. *Cho A là tập bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$, khi đó:*

$$conv(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k | \ u_i \in A, \lambda_i \geq 0 \ và \ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1 \right\}.$$

Ví dụ 1.4.4. Bao lồi của đoạn thẳng $[A, B]$ và điểm C không nằm trên đường thẳng chứa đoạn đó là hình tam giác $\triangle ABC$.

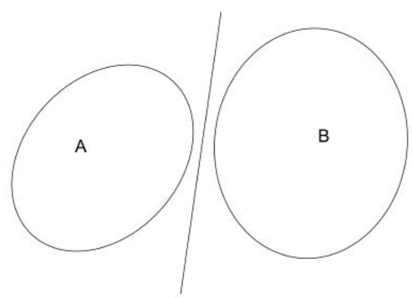
Bổ đề 1.4.5. *Nếu K là tập lồi đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$, $a \notin K$, thì tồn tại duy nhất $x_0 \in K$ để đoạn nối a và x_0 có độ dài nhỏ nhất trong tất cả các đoạn nối a với điểm $x \in K$.*



Định lí 1.4.6. *Giả sử A và B là hai tập lồi không có điểm chung trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, tồn tại một vectơ khác không v và số thực c sao cho:*

$$\langle x, v\rangle \geq c \text{ và } \langle y, v\rangle \leq c$$

với mọi $x \in A, y \in B$; nghĩa là, siêu phẳng $\{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, v\rangle = c\}$, nhận v làm vectơ pháp tuyến, tách tập A và B.



Định nghĩa 1.4.7 (Hàm lồi)**.** + Hàm số f xác định trên tập lồi D được gọi là hàm lồi trên D nếu:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall x, y \in D, \ \lambda \in [0,1]. \quad (1.6)$$

+ Hàm f được gọi là hàm lồi chặt nếu:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall x, y \in D, \ \lambda \in (0,1). \quad (1.7)$$

+ Hàm f là hàm lõm khi $-f$ là hàm lồi.

Ví dụ 1.4.8. + Hàm số $y = ax + b$ là hàm lồi.

+ Hàm số $f(x) = a^T x + b$ vừa lồi, vừa lõm.

+ Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ là hàm lồi nếu $a > 0$ và hàm lõm nếu $a < 0$.

+ Hàm số $f(x) = x^T Ax + b^T x + C$, với A là ma trận đối xứng có số hàng bằng số phần tử của x, $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$, b là ma trận bất kì cùng chiều với x, c là hằng số bất kỳ. Khi đó:

Nếu A là ma trận (nửa) xác định dương thì $f(x)$ là hàm lồi.

Nếu A là ma trận (nửa) xác định âm thì $f(x)$ là hàm lõm.

Định nghĩa 1.4.9. Tập hợp $K \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *nón* nếu với mọi $\lambda \in \mathbb{R}^+$ và mọi $x \in K$, λx cũng thuộc tập K.

Nhận xét 1.4.10. Cho trước tập K bất kỳ, ta đặt $\text{cone}(K) \doteq \bigcup_{t \geq 0} tK$, dễ thấy $\text{cone}(K)$ là cái nón bé nhất chứa K và $\overline{\text{cone}}(K) \doteq \overline{\bigcup tK}$. Trong trường hợp K là tập một điểm $\{u\}$, ta ký hiệu $\text{cone}K = \mathbb{R}_+ u$ và $\mathbb{R}u \doteq \{tu : t \in \mathbb{R}\}$.

Định nghĩa 1.4.11. Nón đối cực của K, ký hiệu K^*, là tập được xác định như sau

$$K^* \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, a \rangle \geq 0 \quad \forall a \in K\}.$$

Tập lồi K được gọi là *nhọn* nếu $P \cap (-P) = \{0\}$.

CHƯƠNG 2

ẢNH CỦA ÁNH XẠ ĐA THỨC THUẦN NHẤT BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

Trong chương này chúng tôi trình bày bài toán cũng như giới thiệu một số kết quả quan trọng về ảnh của ánh xạ đa thức thuần nhất bậc hai và ứng dụng.

2.1 Hệ tuyến tính các dạng bậc hai

Ta xét ánh xạ đa thức thuần nhất bậc hai dạng

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

được xác định bởi hệ k đa thức thuần nhất bậc hai $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ nhận giá trị thực.

Chúng ta bắt đầu bài toán bằng một vài chú ý nhỏ sau đây:

1. Tập gồm k đa thức thuần nhất bậc hai được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu ảnh của $\mathbb{R}^n$ qua ánh xạ mà ta đã xác định như trên không nằm trong một không gian vectơ con thực sự của $\mathbb{R}^k$, vì thế để thuận tiện, nếu giả thiết không có thêm điều kiện gì thì k đa thức bậc hai là độc lập tuyến tính.

2. Nếu $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ là ánh xạ được xác định bởi k đa thức bậc hai $u_\alpha = f_\alpha(x)\,(x \in \mathbb{R}^n; \alpha = 1, 2, ..., k)$, khi đó ảnh của tập $\mathbb{R}^n$ qua ánh xạ F, $F(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^k$, luôn là một hình nón, điều đó chỉ ra rằng tập tất cả

các điểm $\big($các vectơ$\big)$ trong $\mathbb{R}^k$ đóng kín với tích vô hướng dương. Tập này nằm trong một nửa không gian đóng, được xác định bằng một bất phương trình tuyến tính thuần nhất: $\sum_{\alpha=1}^k c_\alpha u_\alpha \geq 0$, $(c_1, ..., c_k) \neq \vec{0}$, khi và chỉ khi dạng bậc hai

$$f_c = \sum_{\alpha=1}^{k} c_\alpha f_\alpha \tag{2.1}$$

là nửa xác định dương.

3. Nếu với các số thực $(c_1, ..., c_k)$, dạng bậc hai (2.1) xác định dương và $n < \infty$ thì ánh xạ $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ được xác định bởi $u_\alpha = f_\alpha(x)$ $(1 \leq \alpha \leq k)$ là ánh xạ riêng đến nửa không gian

$$\{0\} \cup \left\{ u = (u_\alpha) \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, \sum_{\alpha=1}^{k} c_\alpha u_\alpha > 0 \right\}.$$

Sau đây là kết quả chính của mục này với $k = 3$:

Định lí 2.1.1. *Nếu ánh xạ $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi $u_\alpha = f_\alpha(x)$ $\big(x \in \mathbb{R}^n, \alpha = 1, 2, 3\big)$ thoả mãn các giả thiết:*
(a) $n \geq k = 3$,
(b) Tồn tại các số $c_1, ..., c_k$ sao cho dạng bậc hai $f_c = \sum_{\alpha=1}^k c_\alpha f_\alpha$ xác định trên $\mathbb{R}^n$ là xác định dương.
Khi đó nón ảnh $K = F(\mathbb{R}^n)$ trong $\mathbb{R}^3$ là một nón lồi.

Chứng minh. Từ chú ý thứ 2 và 3 ở trên, ta thấy rằng hình nón ảnh $K = F(\mathbb{R}^n)$ thoả mãn ít nhất một trong những tính chất:
(a) K nằm trong nửa không gian đóng $\overline{H_c}$ được xác định bởi bất đẳng thức tuyến tính $\sum_{\alpha=1}^k c_\alpha u_\alpha \geq 0$.
(b) Nếu $n < \infty$, khi đó F là ánh xạ riêng.
Thật vậy, vì $\sum_{\alpha=1}^k c_\alpha f_\alpha(x)$ là xác định dương nên các giá trị riêng của ma

trận của hàm này là dương, lấy ϵ bằng với giá trị riêng bé nhất của ma trận này, ta có với mọi $x \in \mathbb{R}^n, \sum_{\alpha=1}^{k} c_\alpha u_\alpha \geq \epsilon |x|^2$, do đó hình nón K nằm trong một hình nón lồi đóng trong không gian $\mathbb{R}^k$ là không suy biến, tức là nó không chứa hoàn toàn đường thẳng nào.

Bây giờ ta giả sử rằng $n < \infty$ và giả sử rằng kết luận là sai. Vì ảnh hình nón $K = F(\mathbb{R}^n)$ là đóng và không lồi, do đó luôn tồn tại tia $\Lambda = \{\lambda\eta\}_{\lambda \geq 0}, \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ nằm ngoài K nhưng có điểm trong của nó thuộc bao đóng của K. Vì vậy với mỗi mặt phẳng π chứa Λ luôn có những điểm thuộc K nằm trên π.

Ta lấy hai mặt phẳng được xác định bằng $\sum\limits_{\alpha=1}^{3} a_\alpha u_\alpha = 0$ và $\sum\limits_{\alpha=1}^{3} b_\alpha u_\alpha = 0$ trong đó giả sử rằng $[a] = (a_1, a_2, a_3)$ và $[b] = (b_1, b_2, b_3)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình, biến số u_1, u_2, u_3,

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \eta_\alpha . u_\alpha = 0. \tag{2.2}$$

Khi đó $[a]$ và $[b]$ chính là cơ sở của tập nghiệm của phương trình (2.2), do đó với bất kì cặp số thực $(\lambda, \mu) \neq (0; 0)$ thì dạng bậc hai

$$g(x) = \sum_{\alpha=1}^{3} (\lambda a_\alpha + \mu b_\alpha) f_\alpha(x) \tag{2.3}$$

bằng 0 với các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho $F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)))$ nằm trên mặt phẳng

$$\left\{ (u) = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 | \sum_{\alpha=1}^{3} (\lambda a_\alpha + \mu b_\alpha) u_\alpha = 0 \right\} \tag{2.4}$$

chứa nửa đường thẳng Λ sinh bởi (η_1, η_2, η_3).

Mặt khác, với mỗi cặp (λ, μ) thì mặt phẳng (2.4) nhận các điểm của K nằm trên mỗi mặt của nó, do đó dạng bậc hai $g(x)$ trong (2.3) bằng 0 với cặp (λ, μ).

Mặt khác, đường thẳng sinh bởi Λ luôn giao với hình nón K chỉ tại điểm gốc, vì $\Lambda \cap K = \{0\}$ và $K \setminus \{0\}$ nằm trong nửa không gian mở, trong khi đó $-\Lambda$ nằm trong nửa không gian còn lại. Do đó hai dạng bậc hai $\sum\limits_{\alpha=1}^{3} a_\alpha f_\alpha(x)$ và $\sum\limits_{\alpha=1}^{3} b_\alpha f_\alpha(x)$ không có điểm làm bằng 0 chung ngoại trừ $x = 0$. Điều này mâu thuẫn với Định lý chính của [4], thấy rằng [7] cũng đề cập đến tính chất này, rằng nếu hai dạng bậc hai trong $\mathbb{R}^n$, với $n \neq 2, n < \infty$ chỉ có duy nhất 0 là không vector, khi đó tồn tại tổ hợp tuyến tính của chúng sao cho xác định dương. Vì vậy, khi $n < \infty$ chúng ta chứng minh được rằng hình nón ảnh là lồi.
Trong trường hợp không gian tuyến tính vô hạn chiều $\mathbb{R}^\infty$, với bất kì cấu trúc Tôpô nào, kết luận trên đều đúng, vì hình nón ảnh qua ánh xạ F của bất kì không gian vector vô hạn chiều nào cũng lồi. Định lý được chứng minh. □

Hai ví dụ sau đây sẽ chỉ ra rằng tính chất lồi của tập ảnh của ánh xạ đa thức thuần nhất bậc hai có thể sẽ không còn đúng cho trường hợp tổng quát, tức với giả thiết yếu hơn giả thiết của Định lý trên hoặc với $k > 3$, $F(\mathbb{R}^n)$ chưa chắc đã lồi.

Ví dụ 2.1.2. Trong không gian $\mathbb{R}^n (3 \le n < \infty)$, xét ba dạng bậc hai

$$f_1(x) = (x_1)^2, f_2(x) = x_1 x_2, f_3(x) = (x_2)^2 - \sum_{j=3}^{n} (x_j)^2$$

thấy rằng $f_1(x)$ nửa xác định dương, nhưng hình nón ảnh qua ánh xạ $F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ là tập:

$$F(\mathbb{R}^3) = \left\{(u) | u_1 > 0, u_1 u_3 \le (u_2)^2\right\} \cup \{(u) | u_1 = u_2 = 0\}$$

không lồi vì $(1, 1, 1) \in F(\mathbb{R}^n), (0, 0, 4) \in F(\mathbb{R}^n)$ nhưng trung điểm của chúng $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ không thuộc $F(\mathbb{R}^n)$.

Ví dụ 2.1.3. Trong không gian $\mathbb{R}^n(3 \leq n < \infty)$, xét bốn dạng bậc hai

$$f_1(x) = (x_1)^2 + \sum_{j=3}^{n}(x_j)^2, f_2(x) = (x_1)^2 - (x_2)^2, f_3(x) = 2x_1x_2, f_4(x) = (x_2)^2 - \sum_{j=3}^{n}(x_j)^2,$$

ta thấy rằng $2f_1 + f_4$ xác định dương, nhưng hình nón ảnh qua ánh xạ $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ là tập nửa đại số ba chiều:

$$F(\mathbb{R}^3) = \left\{ (u) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1 + u_4 = \sqrt{(u_2)^2 + (u_3)^2} \\ u_1 \geq |u_2 + u_4| \\ u_1 \geq u_2 + |u_4| \end{array} \right\}$$

không lồi vì $(5, -3, 4, 0) \in F(\mathbb{R}^n), (5, 3, 4, 0) \in F(\mathbb{R}^n)$ nhưng trung điểm của chúng $(5, 0, 4, 0)$ không thuộc $F(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Bài toán sự có nghiệm của hệ bất phương trình

Định lí 2.2.1 (Bổ đề S cho 3 hàm)**.** *Giả sử* $n \geq 3$ *và tồn tại* $\mu \in \mathbb{R}^2, x^0 \in \mathbb{R}^n$ *sao cho*

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 \succ 0, \tag{2.5}$$

$$f_1\left(x^0\right) < \alpha_1, \quad f_2\left(x^0\right) < \alpha_2. \tag{2.6}$$

Khi đó, hệ $\{f_0(x) > \alpha_0, f_1(x) \geq \alpha_1, f_2(x) \geq \alpha_2\}$ *vô nghiệm khi và chỉ khi tồn tại* $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ *sao cho*

$$A_0 \preceq \tau_1 A_1 + \tau_2 A_2, \tag{2.7}$$

$$\alpha_0 \geq \tau_1 \alpha_1 + \tau_2 \alpha_2. \tag{2.8}$$

Chứng minh. Xét ánh xạ đa thức sau

$$F = \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}, \quad f(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x))^T.$$

Các giả thiết của Định lý 2.1.1 được thỏa mãn, do đó $F(\mathbb{R}^n)$ là một tập lồi. Ta xét một tập khác trong $\mathbb{R}^3$ như sau:

$$S = \left\{f \in \mathbb{R}^3 : f_0 > \alpha_0, f_1 \le \alpha_1, f_2 \le \alpha_2\right\},$$

tập này cũng lồi. Do đó hệ đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $F(\mathbb{R}^n) \cap S$ là một tập rỗng. Áp dụng Định lý tách các tập lồi, suy ra tồn tại một siêu phẳng tách chúng. Tức là

$$\exists c \neq 0 : \langle c, f\rangle \ge 0, \forall f \in F(\mathbb{R}^n), \text{ và } \langle c, f\rangle \le 0, \forall f \in S.$$

Từ bất phương trình thứ 2 ở trên suy ra rằng

$$c_0 \le 0, \quad c_1 \ge 0, \quad c_2 \ge 0,$$

và

$$c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \le 0.$$

Trong khi đó bất phương trình thứ nhất cho ta

$$c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \ge 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Thay thế $x = x^0$ vào bất phương trình trên và kết hợp với điều kiện (2.6), ta suy ra rằng $c_0 \neq 0$. Chia các bất phương trình trên cho c_0 và ký hiệu

$$\tau_i = -c_i/c_0, \quad i = 1, 2$$

ta có các kết luận (2.7), (2.8).

Chiều ngược lại khá hiển nhiên vì: nếu $f_i(x) \le \alpha_i, i = 1, 2$ và (2.7), (2.8) là đúng, thì với $\tau_i \ge 0, i = 1, 2$, ta có

$$f_0(x) \le \tau_1 f_1(x) + \tau_2 f_2(x) \le \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 \le \alpha_0$$

do đó (2.7), (2.8) suy ra hệ đã cho vô nghiệm. □

Bổ đề sau đây nói về một rở rộng đơn giản của Định lý 2.1.1.

Bổ đề 2.2.2. *Giả sử* $F(x) = (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x))$,

$$f_i(x) = x^T Ax, i = 0, 1, .., m$$

là các hàm bậc hai thuần nhất trong $\mathbb{R}^n$ *với* $n \geq 3$*, trong đó* $A_i \in S^n$ *và* $\{A_i : i = 0, ..., m\}$ *là tổ hợp tuyến tính của* $\{B_0, B_1, B_2\}$*, và:*

$$\omega_0 B_0 + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 \succ 0$$

với các vô hướng $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ *cho trước. Khi đó* $F(\mathbb{R}^n)$ *là một tập lồi.*

Chứng minh. Đặt

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \left\{ \left(x^T B_1 x, x^T B_2 x, x^T B_3 x \right) : x \in \mathbb{R}^n \right\}, \\
\Omega &= \left\{ \left(x^T A_0 x, x^T A_q x, \cdots, x^T A_m x \right) : x \in \mathbb{R}^n \right\} = F(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Vì $\{A_i : i = 0, \cdots, m\}$ là tổ hợp tuyến tính của $\{B_1, B_2, B_3\}$, nên tồn tại $r_{ij} (i = 0, \cdots, m, j = 1, 2, 3)$ sao cho

$$A_i = r_{i1} B_1 + r_{i2} B_2 + r_{i3} B_3, i = 0, \cdots, m.$$

Đặt $Q = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 3}$. Thì ta có

$$\Omega = \Omega_0 Q^T. \tag{2.9}$$

Theo Định lý 2.1.1 thì Ω_0 là một nón lồi. Do đó ảnh của nó qua một ánh xạ tuyến tính, (2.9), cũng lồi, tức $\Omega = F(\mathbb{R}^n)$ là lồi. □

Định lí 2.2.3 (Mở rộng Bổ đề S cho nhiều hàm)**.** *Giả sử:*

$$f_i(x) = x^T A_i x, i = 0, 1, \ldots, m$$

là các hàm bậc hai thuần nhất trong $\mathbb{R}^n$ *với* $n \geq 3$*, trong đó* $A_i \in S^n$ *và* $\{A_i : i = 0, ..., m\}$ *là tổ hợp tuyến tính của* $\{B_0, B_1, B_2\}$*, và:*

$$\omega_0 B_0 + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 \succ 0$$

với các vô hướng $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ cho trước. Với các hàm lồi $q_0(z), ..., q_m(z)$ được xác định trong tập lồi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Giả sử tồn tại $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{z} \in relint(\Omega)$, phần trong tương đối của Ω, sao cho:

$$f_i(\tilde{x}) + q_i(\tilde{z}) < 0, i = 1, .., m.$$

Khi đó hai mệnh đề dưới đây là tương đương:

(i) Hệ phương trình $f_0(x) + q_0(z) < 0, f_i(x) + q_i(z) \leq 0, i = 1, .., m, z \in \Omega$ vô nghiệm.

(ii) Tồn tại $\mu_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m$ sao cho:

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x) + q_0(z) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i q_i(z) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, z \in \Omega.$$

Chứng minh. Ta chỉ ra rằng (i) suy ra (ii) vì điều ngược lại là hiển nhiên. Theo Bổ đề 2.2.2, khi đó tập:

$$M_1 = \{(f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x))\, x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$$

là một tập lồi. Ta định nghĩa

$$M_2 = \left\{ (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m) \;\middle|\; \begin{matrix} v_0 + q_0(z) < 0 \\ v_i + q_i(z) \leq 0 \end{matrix} \quad i = 1, .., m, z \in \Omega \right\} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}.$$

Vì Ω là tập lồi và $q_i(z)\,(i = 0, 1, ..., m)$ là các hàm lồi, do đó tập M_2 lồi. Giả sử rằng mệnh đề (i) đúng, khi đó tập M_1 và M_2 không có điểm chung. Theo Định lý tách các tập lồi, tồn tại:

$$\gamma = (\gamma_0, ..., \gamma_m) \neq 0$$

sao cho

$$\sum_{i=0}^{m} \gamma_i v_i \leq \sum_{i=0}^{m} \gamma_i f_i(x)\ \forall (v_0, v_1, ..., v_m) \in M_2, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

Đầu tiên chúng ta có $\gamma_i \geq 0$ với mọi $i = 0, ..., m$. Ngược lại, giả sử tồn tại giá trị i sao cho $\gamma_i < 0$, khi đó ta lấy $v_i \to -\infty$ ta thu được điều vô lý.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng $\gamma_0 > 0$. Giả sử $\gamma_0 = 0$. Khi đó (2.10) trở thành

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i v_i \leq \sum_{i=0}^{m} \gamma_i f_i(x) \ \forall (v_0, v_1, ..., v_m) \in M_2, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Đặt:

$$v_i = -q_i(z), i = 1, .., m, x = \tilde{x}.$$

Khi đó (2.10) trở thành:

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \left(f_i(\tilde{x}) + q_i(\tilde{z}) \right) \geq 0. \tag{2.11}$$

Vì $f_i(\tilde{x}) + q_i(\tilde{z}) < 0$ và $\gamma_i \geq 0$ nên $\gamma_i \left(f_i(\tilde{x}) + q_i(\tilde{z}) \right) \leq 0 \ i = 1, ..., m$, do đó ta thu được

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \left(f_i(\tilde{x}) + q_i(\tilde{z}) \right) \leq 0. \tag{2.12}$$

Dễ dàng thấy rằng (2.11) và (2.12) xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_i = 0, i = 1, ..., m$, điều này mâu thuẫn (vì $\gamma = 0$). Vậy ta có $\gamma_0 > 0$.
Đặt $v_0 = -q_0(z) - \epsilon$ với mọi $\epsilon > 0, v_i = -q_i(z)(i = 1, ..., m), z \in \Omega$. Chia cả hai vế của (2.10) cho γ_0, ta thu được:

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x) + q_0(z) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i q_i(z) + \epsilon \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, z \in \Omega.$$

trong đó $\mu_i = \dfrac{\gamma_i}{\gamma_0}$. Lấy giới hạn $\epsilon \to 0$, khi đó

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x) + q_0(z) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i q_i(z) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, z \in \Omega.$$

Định lý hoàn toàn được chứng minh. $\square$

2.3 Các bài toán mở

Sau đây chúng tôi trình bày hai vấn đề đang là bài toán mở được nhiều nhà toán học quan tâm.

Bài toán 1. Nếu tồn tại t, s, w sao cho $tA + sB + wC \succeq 0$ và $\text{rank}(tA + sB + wC) \geq 3$ thì tập sau là lồi trong $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x^T Ax, x^T Bx, x^T Cx) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Bài toán 2. Nếu $n \geq 4$ và tồn tại một tập mở U sao cho sao cho $tA + sB + wC + zD \succ 0$ với mọi $(t, s, w, z) \in U$ thì tập sau là lồi trong $\mathbb{R}^4$:

$$\{(x^T Ax, x^T Bx, x^T Cx, x^T Dx) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

KẾT LUẬN

Trong luận văn này chúng tôi đã làm được những việc sau:

- Trình bày một cách đầy đủ và ngắn ngọn về một số khái niệm và tính chất cơ bản về ma trận, hàm bậc hai thuần nhất, hàm lồi. Các tính chất này làm cơ sở cho việc trình bày các khái niệm và các tính chất ở Chương 2.

- Chúng tôi đã trình bày lại và giải thích chi tiết các chứng minh cho Định lý 2.1.1, Định lý 2.2.1 và Định lý 2.2.3.

- Giới thiệu một vài vấn đề mở, các bài toán này phù hợp cho các học viên cao học và nghiên cứu sinh chuyên ngành đại số và lý thuyết số.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Phạm Ngọc Bội (2015), *Hình học lồi*. Bài giảng dành cho cao học. Trường Đại học Vinh.

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2006), *Đại số và Hình học giải tích*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

Tiếng Anh

[3] Brickman L. (1961), *On the field of values of a matrix*. Proceedings of the American Mathematical Society, 12, pp. 61–66.

[4] Calabi E. (1964), *Systems of real quadratic forms*. Proceedings of the American Mathematical Society, 15(5), 844–846.

[5] Calabi E. (1982), *Linear Systems of Real Quadratic Forms. II*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 84, No. 3, pp. 331–334.

[6] Dines L. (1941), *On the Mapping of Quadratic Forms*, Bull. Amer. Math. Soc., 47, pp. 494–498.

[7] Finsler P. (1937), *Über das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen und Scharen quadratischer Formen*, Comment. Math. Helv., 9, pp. 188–192.