

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐÀO THỊ LÊ HOÀN

VỀ MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG ĐỒNG NHẤT
CỦA HÀM NHÂN TRONG LÝ THUYẾT SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐÀO THỊ LÊ HOÀN

VỀ MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG ĐỒNG NHẤT
CỦA HÀM NHÂN TRONG LÝ THUYẾT SỐ

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 846 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. NGUYỄN THÀNH QUANG

Nghệ An - 2022

MỤC LỤC

Mục lục	2
Mở đầu	5
1 VỀ ĐẶC TRƯNG ĐỒNG NHẤT CỦA HÀM NHÂN	8
1.1. Kiến thức chuẩn bị	8
1.2. Giới thiệu một số đặc trưng đồng nhất của hàm nhân	15
1.3. Một đặc trưng đồng nhất của hàm nhân	17
2 VỀ ĐẶC TRƯNG ĐỒNG NHẤT CỦA HÀM NHÂN HOÀN TOÀN	25
2.1. Phương trình hàm xác định đặc trưng đồng nhất của hàm nhân hoàn toàn	25
2.2. Một đặc trưng đồng nhất của hàm nhân hoàn toàn	26
Tài liệu tham khảo	31

LỜI CẢM ƠN

Tác giả bày tỏ lòng kính trọng và tri ân sâu sắc tới PGS.TS Nguyễn Thành Quang - thầy giáo hướng dẫn khoa học - đã dành nhiều thời gian và công sức để lựa chọn tài liệu tham khảo và đặt ra đề tài cũng như giúp đỡ cho chúng tôi hoàn thành nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn.

Tác giả gửi lời cảm ơn trân trọng đến các nhà giáo, nhà khoa học thuộc Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, Khoa Toán học, Trường Sư phạm - Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho chúng tôi hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu.

Xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Trường Trung học phổ thông Trần Nguyên Hãn, Thành phố Vũng Tàu nhà trường công tác của tác giả, đã hỗ trợ nhiều về thời gian, tinh thần và vật chất cho chúng tôi để hoàn thành nhiệm vụ học tập sau đại học.

Nội dung của luận văn có ý nghĩa khoa học thực sự và mới mẻ đối với bản thân tác giả - một giáo viên dạy toán ở trường trung học phổ thông. Dù đã hết sức cố gắng đọc, hiểu, suy nghĩ và nghiền ngẫm song việc trình bày một cách chi tiết những nội dung chuyên sâu thuộc về lĩnh vực lý thuyết số một cách chặt chẽ sẽ chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót.

Tác giả rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô giáo và của các bạn học viên lớp sau đại học ngành toán để chúng tôi thu được một bản luận văn hoàn thiện hơn.

Nghệ An, tháng 6 năm 2022

Tác giả

Đào Thị Lê Hoàn

MỘT SỐ KÝ HIỆU DÙNG TRONG LUẬN VĂN

Thứ tự	Ký hiệu	Tên gọi
1	M	Tập hợp các hàm nhân f sao cho $f(1) = 1$.
2	M^*	Tập hợp các hàm nhân hoàn toàn f sao cho $f(1) = 1$.
3	$\mathbb{N}^*$	Tập hợp các số tự nhiên khác 0
4	P	Tập hợp các số nguyên tố
5	$\mathbb{Z}^+$	Tập hợp các số nguyên dương
6	$\mathbb{C}$	Tập hợp các số phức
7	$\#X$	Số phần tử của tập hợp X
8	p, q, r, π	Các số nguyên tố
9	$\nu_p(n)$	Số mũ của số nguyên tố p trong dạng phân tích tiêu chuẩn của số nguyên dương $n > 1$
10	$a \mid b$	Số nguyên a là ước của số nguyên b
11	$\gcd(a, b)$	Ước chung lớn nhất của hai số nguyên a, b
12	$f(mn) = f(m)f(n),$ $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+, \gcd(m, n) = 1$	Tính chất nhân của hàm số số học f
13	$f(mn) = f(m)f(n),$ $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$	Tính chất nhân hoàn toàn của hàm số số học f
14	$f(p+q) = f(p) + f(q),$ $\forall p, q \in P$	Điều kiện cộng tính trên hai số nguyên tố p, q của hàm nhân f
15	$\left(\frac{a}{p}\right)$	Ký hiệu Legendre, trong đó p là số nguyên tố và a là số nguyên sao cho $\gcd(a, p) = 1$

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong toán học, hàm đồng nhất còn gọi là quan hệ đồng nhất, ánh xạ đồng nhất hay phép biến đổi đồng nhất, là một hàm số luôn luôn nhận giá trị bằng chính đối số của nó. Cụ thể, hàm đồng nhất f trong lý thuyết số là hàm số thỏa mãn $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Hàm đồng nhất là phần tử đơn vị của phép nhân các hàm số, do đó nó có vai trò quan trọng trong các cấu trúc đại số trên tập hợp các hàm số số học. Hơn nữa, trong lý thuyết số hàm đồng nhất là một hàm nhân hoàn toàn, vì vậy đã có nhiều nghiên cứu về các đặc trưng đồng nhất của hàm nhân này. Về hướng nghiên cứu, có thể liệt kê một số công trình của C. Spiro, J. M. D. Koninck, M. Katai, Phạm Văn Dũng, Bùi Minh Phong, Kang - Kang Chen, Yong - Gao Chen, Jin - Hui Fang, Pingzhi Yuan, Yueping Zheng,...(xem [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]).

Trong luận văn này, dựa vào các bài báo [7] và [8] của tác giả Bùi Minh Phong (Trường Đại học Tổng hợp Budapest, Hungari) chúng tôi lựa chọn đề tài nghiên cứu nhằm tìm hiểu sâu hơn về những đặc trưng đồng nhất của các hàm nhân và hàm hoàn toàn nhân trong lý thuyết các hàm số số học.

2. Mục đích nghiên cứu

- Hệ thống khái niệm, tính chất và ứng dụng của các hàm số số học.
- Tìm hiểu lý thuyết tập xác định duy nhất đối với các hàm nhân - một lĩnh vực có liên quan trực tiếp đến các giả thuyết Goldbach trong số học.
- Khảo sát đặc trưng đồng nhất bởi các phương trình hàm cộng tính trên các số nguyên tố lẻ, số chính phương của hàm số số học đồng nhất.

- Học hỏi một số kỹ thuật và phương pháp chứng minh trên đối tượng hàm số số học.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Đọc và trình bày lại một số kết quả nghiên cứu trong 2 bài báo tiếng Anh thuộc lĩnh vực lý thuyết số liên quan đến các hàm số số học của tác giả Bùi Minh Phong.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Điều kiện cộng tính trên các số nguyên tố lẻ.
- Hàm số số học, hàm nhân, hàm hoàn toàn nhân, hàm đồng nhất.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Tham khảo bài báo [7], [8] của tác giả Bùi Minh Phong cũng như đối chiếu với bài báo [6] của Claudia A. Spiro và tìm hiểu 5 bài báo khác.
- Khai thác sự biểu diễn số nguyên qua tổng hai số nguyên tố.
- Sử dụng tính chất của hàm nhân, hàm hoàn toàn nhân.
- Khai thác tính chất duy nhất cộng tính của tập hợp các số nguyên tố lẻ, số chính phương đối với các hàm nhân, hàm hoàn toàn nhân.
- Sử dụng nguyên lý cực tiểu của tập hợp các số tự nhiên và ký hiệu Legendre trong một vài chứng minh toán học.

6. Nội dung chính và kết quả mới của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận văn này gồm có hai chương.

Chương 1 trình bày các khái niệm và kết quả của các hàm nhân; giới thiệu một đặc trưng đồng nhất của các hàm nhân bởi phương trình

$$f(n^2 + m^2 + 3) = f(n^2 + 1) + f(m^2 + 2), \forall n, m \in \mathbb{Z}^+.$$

Chương 2 trình bày một đặc trưng của hàm nhân hoàn toàn bởi phương trình hàm

$$f(p+1) = g(p) + 1, \quad f(p+q^2) = g(p) + g(q^2), \quad \forall p, q \in P.$$

Một số kết quả và kỹ thuật chứng minh trình bày trong luận văn có thể đưa vào nội dung giới thiệu và giảng dạy trong học phần số học cho sinh viên ngành sư phạm toán và chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông.

CHƯƠNG 1

VỀ ĐẶC TRƯNG ĐỒNG NHẤT CỦA HÀM NHÂN

Trong toàn bộ Chương 1, chúng ta ký hiệu M là tập hợp các hàm nhân nhận giá trị phức f sao cho $f(1) = 1$.

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một kết quả chính của tác giả Bùi Minh Phong trong [7] nói rằng: *Nếu một hàm nhân f thỏa mãn phương trình*

$$f(n^2 + m^2 + 3) = f(n^2 + 1) + f(m^2 + 2)$$

với mọi số nguyên dương m và n thì hoặc $f(n)$ là hàm đồng nhất hoặc

$$f(n^2 + m^2 + 3) = f(n^2 + 1) = f(m^2 + 2) = 0$$

với mọi số nguyên dương m và n .

Từ đó tác giả Bùi Minh Phong [7] thu được một hệ quả như là một đặc trưng của hàm đồng nhất trong tập hợp các hàm nhân: *Nếu $f \in M$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(n^2 + m^2 + 3) = f(n^2 + 1) + f(m^2 + 2)$$

với mọi số nguyên dương m, n và $f(n_0^2 + 1) \neq 0$ với một số nguyên dương n_0 nào đó thì f là hàm đồng nhất.

1.1 Kiến thức chuẩn bị

1.1.1 Hàm nhân

Mỗi hàm số $f(n)$ xác định với mọi số nguyên dương n và nhận giá trị phức được gọi là một *hàm số số học*.

Hàm số số học $f(n)$ được gọi là *hàm nhân* nếu

$$f(nm) = f(n)f(m),, n, m \in \mathbb{Z}^+, \gcd(n, m) = 1.$$

Hàm số học $f(n)$ được gọi là *hàm nhân hoàn toàn* nếu

$$f(nm) = f(n)f(m), \forall n, m \in \mathbb{Z}^+.$$

Ví dụ

* Các hàm số sau là hàm nhân

1. Hàm số tính số các ước $\tau(n) = \sum_{d|n} 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ là hàm nhân.

2. Hàm số tổng các ước $\sigma(n) = \sum_{d|n} d, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ là hàm nhân.

3. Hàm số Euler $\varphi(n) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \gcd(n,m)=1}} 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ là hàm nhân.

* Các hàm số sau là hàm nhân hoàn toàn

1. Hàm số đồng nhất $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ là hàm nhân hoàn toàn.

2. Hàm số đơn vị $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ là hàm nhân hoàn toàn.

3. Hàm số lũy thừa $f(n) = n^\alpha, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ trong đó α là một số thực, là hàm nhân hoàn toàn.

1.1.2. Hàm cộng tính

Giả sử E là một tập hợp con của tập các số nguyên dương. Khi đó, hàm số học được gọi là *hàm cộng tính* trên E nếu

$$f(n+m) = f(n) + f(m), \forall n, m \in E.$$

Ví dụ

Hàm nhân $g(n)$ được xác định như sau: $g(n) = 0$ với n là số nguyên dương chẵn và $g(n) = 1$ với n là số nguyên dương lẻ thỏa mãn điều kiện cộng tính trên tập hợp các số nguyên dương chẵn, bởi vì

$$g(m+n) = g(m) + g(n) = 0, \forall m, n \in 2\mathbb{Z}^+.$$

1.1.3. Các tính chất

1. Nếu $f(n)$ là hàm nhân và tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho $f(n_0) \neq 0$ thì $f(1) = 1$.

Chứng minh. Ta có $f(n_0) = f(1 \times n_0) = f(1)f(n_0)$. Do $f(n_0) \neq 0$ nên $f(1) = 1$. $\square$

2. Nếu $f(n)$ là hàm nhân thỏa mãn tính chất cộng tính trên tập hợp các số nguyên tố và tồn tại một số nguyên tố p sao cho $f(p) \neq 0$ thì $f(2) = 2$.

Chứng minh. Ta có $f(7) = f(2 + 5) = f(2)f(5)$. Do đó, nếu $f(p) = 0$ với mọi số nguyên tố lẻ p thì $f(2) = 0$ và do đó $f(p) = 0$ với mọi số nguyên tố p . Điều này, trái với giả thiết tồn tại một số nguyên tố p sao cho $f(p) \neq 0$. Như vậy, ta có thể giả thiết p là số nguyên tố lẻ hay $\gcd(2, p) = 1$. Sử dụng tính chất nhân và tính chất cộng tính trên tập các số nguyên tố của hàm f ta có

$$f(2)f(p) = f(2p) = f(p+p) = f(p) + f(p) = 2f(p).$$

Giả ước hai vế cho $f(p) \neq 0$ ta có $f(2) = 2$. $\square$

3. Nếu $f(n)$ là hàm nhân và $m_1, \dots, m_k$ là các số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau từng đôi một thì $f(m_1 \cdots m_k) = f(m_1) \cdots f(m_k)$.

Chứng minh. Với $k = 2$ ta có $\gcd(m_1, m_2) = 1$ do đó theo định nghĩa hàm nhân ta có $f(m_1 m_2) = f(m_1)f(m_2)$. Giả thiết quy nạp rằng

$$f(m_1 \cdots m_{k-1}) = f(m_1) \cdots f(m_{k-1}).$$

Khi đó, do

$$\begin{aligned} \gcd(m_1 m_2 \cdots m_{k-1}, m_k) &= \gcd(m_2 \cdots m_{k-1}, m_k) \\ &= \cdots = \gcd(m_{k-1}, m_k) = 1 \end{aligned}$$

nên sử dụng giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} f(m_1 \cdots m_k) &= f((m_1 \cdots m_{k-1}) m_k) = f(m_1 \cdots m_{k-1}) f(m_k) \\ &= f(m_1) \cdots f(m_{k-1}) f(m_k). \end{aligned}$$

$\square$

4. Nếu $f(n)$ là hàm nhân hoàn toàn và $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ là dạng phân tích tiêu chuẩn của số nguyên dương $n > 1$ thì $f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \cdots f(p_k)^{\alpha_k}$.

Chứng minh. Ta có

$$\gcd(p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j}) = 1, \quad 1 \leq i \neq j \leq k.$$

Do đó theo tính chất (3) ta có

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_k^{\alpha_k}).$$

Sử dụng tính chất nhân hoàn toàn của hàm f ta có

$$f(p^\alpha) = f(p)^\alpha, \quad \forall p \in P, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^+.$$

Vì vậy, $f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \cdots f(p_k)^{\alpha_k}$. □

1.1.4. Thặng dư bậc hai

Giả sử p là số nguyên tố lẻ và a là số nguyên sao cho $\gcd(a, p) = 1$. Chúng ta xét phương trình đồng dư bậc hai một ẩn sau

$$x^2 \equiv a \pmod{p}.$$

Ta gọi a là một *thặng dư bậc hai môđun p* nếu phương trình đồng dư $x^2 \equiv a \pmod{p}$ là có nghiệm, nghĩa là tồn tại số nguyên x_0 sao cho $x_0^2 \equiv a \pmod{p}$. Ta gọi a là một *bất thặng dư bậc hai môđun p* nếu phương trình đồng dư $x^2 \equiv a \pmod{p}$ là không có nghiệm.

Ví dụ

2 là một thặng dư bậc hai môđun 7 vì ba lý do:

- i) 7 là số nguyên tố lẻ;
- ii) 2 và 7 nguyên tố cùng nhau;
- iii) phương trình đồng dư bậc hai $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$ có nghiệm, đó là các nghiệm $x \equiv 3 \pmod{7}$ và $x \equiv 4 \pmod{7}$.

Số nguyên 3 là một bất thặng dư bậc hai môđun 7 vì 3 và 7 nguyên tố cùng nhau và phương trình $x^2 \equiv 3 \pmod{7}$ không có nghiệm.

Nhận xét

Nếu số nguyên a là một thặng dư bậc hai môđun p thì mọi số nguyên đồng dư với a theo môđun p cũng là thặng dư bậc hai môđun p .

1.1.5. Định lý

1. Nếu số nguyên a là một thặng dư bậc hai môđun p thì

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

2. Nếu số nguyên a là một bất thặng dư bậc hai môđun p thì

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Chứng minh. 1) Nếu a là một thặng dư bậc hai môđun p thì tồn tại số nguyên x_0 sao cho $\gcd(x_0, p) = 1$, $x_0^2 \equiv a \pmod{p}$. Do đó sử dụng tính chất của đồng dư thức lũy thừa cả hai vế ta thu được

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv x_0^{p-1} \pmod{p}.$$

Vì $\gcd(x_0, p) = 1$ nên theo Định lý Fermat bé ta có

$$x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Do đó

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

2) Theo chứng minh phần 1) của định lý ta suy ra rằng: Mỗi thặng dư bậc hai môđun p đều là nghiệm của phương trình

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Vì a không phải là thặng dư bậc hai môđun p nên a không nghiệm đúng phương trình này, nghĩa là $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ không là bội của p hay

$$\gcd\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1, p\right) = 1.$$

Do $\gcd(a, p) = 1$ nên theo Định lý Fermat bé ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Do đó

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Từ đó chia hai vế đồng dư thức cho $\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$ ta suy ra

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Vì vậy $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$. □

1.1.6. Ký hiệu Legendre

Adrien - Marie Legendre (1752 - 1833) là một nhà toán học người Pháp. Ông có nhiều đóng góp quan trọng vào thống kê, số học, đại số trừu tượng và giải tích. Ký hiệu Legendre được giới thiệu bởi Adrien-Marie Legendre vào năm 1798 trong quá trình chứng minh định luật đối ứng bậc hai.

Ký hiệu Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{p}\right) &= 1 \text{ nếu } a \text{ là một thặng dư bậc hai môđun } p. \\ \left(\frac{a}{p}\right) &= -1 \text{ nếu } a \text{ không phải là một thặng dư bậc hai môđun } p. \end{aligned}$$

Ví dụ

$$\left(\frac{2}{7}\right) = 1; \quad \left(\frac{3}{7}\right) = -1.$$

1.1.7. Mệnh đề. $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp:

i) Nếu a là thặng dư bậc hai môđun p thì theo định nghĩa của ký hiệu Legendre ta có $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Mặt khác, vì số nguyên a là một thặng dư bậc hai nên phương trình đồng dư bậc hai $x^2 \equiv a \pmod{p}$ có nghiệm nghĩa là tồn tại số nguyên x_0 nguyên tố cùng nhau với p sao cho $x_0^2 \equiv a \pmod{p}$. Do đó, lũy thừa hai vế đồng dư thức này lên $\frac{p-1}{2}$ lần (p lẻ) ta có $x_0^{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. Áp dụng Định lý Fermat bé ta có

$$x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

hay

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Vì vậy, sử dụng tính chất bắc cầu của đồng dư thức ta có

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

ii) Nếu a là bất thặng dư bậc hai môđun p thì theo định nghĩa của ký hiệu Legendre ta có $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. Mặt khác, do số nguyên a là một bất thặng dư bậc hai nên $\gcd(a, p) = 1$ và phương trình đồng dư bậc hai $x^2 \equiv a \pmod{p}$ vô nghiệm. Tương tự như trên ta chứng minh được

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Do đó, trong trường hợp này ta vẫn có

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

1.1.8. Mệnh đề. Nếu $a \equiv b \pmod{p}$ thì $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

Chứng minh. Theo nhận xét, nếu số nguyên a là một thặng dư bậc hai môđun p thì mọi số nguyên đồng dư với a theo môđun p cũng là thặng dư bậc hai môđun p , chúng ta suy ra đẳng thức cần chứng minh. □

1.1.9. Mệnh đề. $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ với mọi số nguyên tố p lẻ.

Chứng minh. Phương trình đồng dư bậc hai $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ có nghiệm $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$ nên 1 là một thặng dư bậc hai môđun p . Do đó, theo định nghĩa của ký hiệu Legendre chúng ta suy ra đẳng thức cần chứng minh. □

1.1.10. Mệnh đề. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ với mọi số nguyên tố p lẻ.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.1.7 ta có

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Nhận thấy rằng, hai vế của đồng dư thức này chỉ nhận giá trị 1 hoặc -1. Nhưng vì do p là số nguyên tố lẻ nên 1 và -1 không đồng dư với nhau theo môđun p , do đó hai vế phải đồng thời bằng 1 hoặc -1, nghĩa là

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

□

1.2 Giới thiệu một số đặc trưng đồng nhất của hàm nhân

1.2.1. Đặc trưng đồng nhất của Claudia Spiro

Năm 1992, Claudia Spiro [9] chứng minh rằng: *Nếu $f \in M$ là một hàm sao cho*

$$f(p+q) = f(p) + f(q)$$

với mọi số nguyên tố p và q thì $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Như vậy, C. Spiro đã đặc trưng hàm đồng nhất bởi phương trình cộng tính trên tập các số nguyên tố.

Bài báo của C. Spiro [9] đã truyền cảm hứng cho rất nhiều nhà toán học khác công bố các công trình có liên quan về chủ đề này: Phạm Văn Chung (1996), Phạm Văn Chung và Bùi Minh Phong (1999), Kang - Kang Chen và Yong - Gao Chen (2010), J. H. Fang (2011), Artubas Dubickas và Paulius (2013), Poo – Sung Park (2020),...

1.2.2. Đặc trưng đồng nhất của Phạm Văn Chung

Năm 1996, theo một kết quả của [1], Phạm Văn Chung đã chỉ ra rằng: *Một hàm nhân f thỏa mãn phương trình*

$$f(m^2 + n^2) = f(m^2) + f(n^2)$$

với mọi số nguyên dương m và n khi và chỉ khi $f(2) = 2$, $f(p) = p$ với mọi số nguyên tố $p \equiv 1 \pmod{4}$ và $f(q) = q$ hoặc $f(q) = -q$ với mọi số nguyên tố $q \equiv 3 \pmod{4}$.

1.2.3. Đặc trưng đồng nhất của J. M. Koninck, I. Katai và Bùi Minh Phong

Năm 1997, trong bài báo [5], J. M. Koninck, I. Katai và Bùi Minh Phong đã chứng minh rằng: *Nếu hàm nhân $f \in M$ và*

$$f(p + n^2) = f(p) + f(n^2)$$

thỏa mãn với mọi số nguyên tố p và mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $f(n)$ là hàm đồng nhất.

1.2.4. Đặc trưng đồng nhất của Kang - Kang Chen và Yong - Gao Chen

Năm 2010, hai nhà toán học Trung Quốc là Kang - Kang Chen và Yong - Gao Chen [1] đã chứng minh rằng: *Một hàm nhân f là hàm số đồng nhất khi và chỉ khi $f(3) = 3$ và*

$$f(p + q) = f(p) + f(q)$$

với mọi số nguyên tố lẻ p và q .

Như vậy, Kang - Kang Chen và Yong - Gao Chen đã đặc trưng hàm đồng nhất bởi phương trình cộng tính trên tập hợp các số nguyên tố lẻ với $f(3) = 3$.

1.2.5. Đặc trưng đồng nhất của Jin - Hui Fang

Năm 2011, Jin - Hui Fang (xem [8]) nhà toán học Hàn Quốc đã đưa ra một đặc trưng đồng nhất khác cho hàm nhân khác không bởi điều kiện cộng tính trên tổng ba số nguyên tố, nghĩa là

$$f(p + q + r) = f(p) + f(q) + f(r), \forall p, q, r \in P.$$

Như vậy, Jin - Hui Fang đã đặc trưng hàm đồng nhất bởi phương trình 3-cộng tính trên tập hợp các số nguyên tố.

1.2.6. Đặc trưng đồng nhất bởi phương trình cộng tính trên các số tam giác

Trong một tiền án phẩm gần đây, Poo - Sung Park nhà toán học Hàn Quốc đã thông báo một đặc trưng của hàm số đồng nhất trên tập hợp T các

số tam giác có dạng $T_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1$. Cụ thể là định lý sau:

Nếu hàm nhân f thỏa mãn

$$f(a + b + c) = f(a) + f(b) + f(c), \forall a, b, c \in T,$$

thì f là hàm số đồng nhất.

1.3 Một đặc trưng đồng nhất của hàm nhân

Ký hiệu M là tập hợp các hàm nhân nhận giá trị phức f sao cho

$$f(1) = 1.$$

1.3.1 Định lý. (xem [7]). *Giả sử $f \in M$ thỏa mãn điều kiện*

$$(1.1) \quad f(n^2 + m^2 + 3) = f(n^2 + 1) + f(m^2 + 2), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Khi đó, hoặc là

$$(1.2) \quad f(n^2 + m^2 + 3) = f(n^2 + 1) = f(m^2 + 2) = 0, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

hoặc là $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Chú ý rằng nếu hàm nhân f thỏa mãn giả thiết (1.1) thì ta nhận được nhiều hệ thức cộng tính bằng số cụ thể. Chẳng hạn, những hệ thức sau đây:

$$\begin{aligned} f(5) &= f(1^2 + 1^2 + 3) = f(1^2 + 1) + f(1^2 + 2) = f(2) + f(3), \\ f(8) &= f(1^2 + 2^2 + 3) = f(1^2 + 1) + f(2^2 + 2) = f(2) + f(6), \\ f(11) &= f(2^2 + 2^2 + 3) = f(2^2 + 1) + f(2^2 + 2) = f(5) + f(6), \\ f(13) &= f(1^2 + 3^2 + 3) = f(1^2 + 1) + f(3^2 + 2) = f(2) + f(11), \\ f(21) &= f(3^2 + 3^2 + 3) = f(3^2 + 1) + f(3^2 + 2) = f(10) + f(11), \\ f(37) &= f(5^2 + 3^2 + 3) = f(5^2 + 1) + f(3^2 + 2) = f(26) + f(11). \end{aligned}$$

Từ Định lý 1.3.1 ở trên ta thu được hệ quả sau như là một đặc trưng của hàm số số học đồng nhất.

1.3.2 Hệ quả. (xem [7]). *Nếu $f \in M$ thỏa mãn điều kiện (1.1) và $f(n_0^2 + 1) \neq 0$ với một số nguyên dương n_0 nào đó thì f là hàm đồng nhất.*

Để chứng minh Định lý 1.3.1 trước hết ta cần có bổ đề sau.

1.3.3 Bổ đề. (xem [7]). *Giả sử rằng các điều kiện của Định lý 1.3.1 được thỏa mãn. Khi đó hoặc (1.2) thỏa mãn với mọi số nguyên dương n và m hoặc các điều kiện*

$$(1.3) \quad \begin{cases} f(n^2 + 1) = n^2 + 1 \\ f(m^2 + 2) = m^2 + 2 \\ f(n^2 + m^2 + 3) = n^2 + m^2 + 3 \end{cases}$$

đồng thời thỏa mãn với mọi số nguyên dương n và m .

Chứng minh. Từ giả thiết (1.1) ta có

$$f(n^2 + 1) + f(m^2 + 2) = f(m^2 + 1) + f(n^2 + 2) = f(n^2 + m^2 + 3)$$

với mọi số nguyên dương m, n . Do đó

$$f(n^2 + 2) - f(n^2 + 1) = f(m^2 + 2) - f(m^2 + 1).$$

với mọi số nguyên dương m, n . Chọn $m = 1$ ta có

$$(1.4) \quad f(n^2 + 2) - f(n^2 + 1) = f(3) - f(2) : = D.$$

Như vậy, từ hệ thức (1.4) cùng với giả thiết (1.1) suy ra

$$(1.5) \quad f(n^2 + m^2 + 3) = f(n^2 + 1) + f(m^2 + 1) + D$$

với mọi số nguyên dương m, n . Giả sử $S_j := f(j^2 + 1)$. Từ (1.5) suy ra rằng, nếu k, l, u, v là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $k^2 + l^2 = u^2 + v^2$ thì

$$f(k^2 + 1) + f(l^2 + 1) + D = f(u^2 + 1) + f(v^2 + 1) + D.$$

Từ đây suy ra

$$(1.6) \quad k^2 + l^2 = u^2 + v^2 \Rightarrow S_k + S_l = S_u + S_v.$$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng

$$(1.7) \quad S_{n+12} = S_{n+9} + S_{n+8} + S_{n+7} - S_{n+5} - S_{n+4} - S_{n+3} + S_n$$

thỏa mãn với mọi số nguyên dương n .

Bởi vì

$$\begin{aligned}(2j+1)^2 + (j-2)^2 &= (2j-1)^2 + (j+2)^2 \\ (2j+1)^2 + (j-7)^2 &= (2j-5)^2 + (j+5)^2\end{aligned}$$

Nên từ (1.6) chúng ta nhận được

$$(1.8) \quad \begin{cases} S_{2j+1} + S_{j-2} = S_{2j-1} + S_{j+2} \\ S_{2j+1} + S_{j-7} = S_{2j-5} + S_{j+5}. \end{cases}$$

Từ (1.8) suy ra rằng

$$\begin{aligned}S_{j+5} - S_{j+2} + S_{j-2} - S_{j-7} &= S_{2j-1} - S_{2j-5} \\ &= S_{j+1} - S_{j-3} + S_{2j-3} - S_{2j-5} \\ &= S_{j+1} - S_{j-3} + S_j - S_{j-4}.\end{aligned}$$

Điều này chứng minh hệ thức (1.7) với $n = j - 7$. Sử dụng (1.8) ta có

$$\begin{aligned}S_7 &= S_{2 \times 3 + 1} = 2S_5 - S_1, \\ S_9 &= S_{2 \times 4 + 1} = S_7 + S_6 - S_2 = S_6 + 2S_5 - S_2 - S_1 \\ S_{11} &= S_{2 \times 5 + 1} = S_9 + S_7 - S_3 = S_6 + 4S_5 - S_3 - S_2 - 2S_1.\end{aligned}$$

Bằng cách sử dụng (1.6) và các dữ kiện

$$8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2, \quad 10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2, \quad 12^2 + 1^2 = 9^2 + 8^2,$$

ta có

$$\begin{aligned}S_8 &= S_7 + S_4 - S_1 = 2S_5 + S_4 - 2S_1, \\ S_{10} &= S_{11} + S_2 - S_5 = S_6 + 3S_5 - S_3 - 2S_1 \\ S_{12} &= S_9 + S_8 - S_1 = S_6 + 4S_5 + S_4 - S_2 - 4S_1.\end{aligned}$$

Do đó, để hoàn thành việc chứng minh bổ đề này, bằng cách sử dụng (1.1), (1.4), (1.5) và (1.7) ta cần chứng minh rằng hoặc

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = 0$$

hoặc

$$(1.9) \quad S_j = j^2 + 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Lặp lại (1.1) và sử dụng tính chất nhân của hàm f cho ta

$$S_1 = f(1^2 + 1) = f(2)$$

$$(1.10) \quad S_2 = f(2^2 + 1) = f(5) = f(1^2 + 1^2 + 3) = f(2) + f(3).$$

$$(1.11) \quad S_3 = f(3^2 + 1) = f(10) = f(2)f(5) = f(2)^2 + f(2)f(3).$$

Vì vậy, sử dụng (1.1) ta có

$$f(11) = f(2^2 + 2^2 + 3) = f(5) + f(6) = f(2) + f(3) + f(2)f(3).$$

Mặt khác từ (1.4) suy ra rằng

$$\begin{aligned} f(11) &= f(3^2 + 2) = f(10) + D = f(2)f(5) + D \\ &= f(2)^2 + f(2)f(3) + f(3) - f(2). \end{aligned}$$

Cùng với hệ thức cuối cùng dẫn đến

$$(1.12) \quad f(2)^2 = 2f(2),$$

và sử dụng (1.1) ta có

$$f(13) = f(1^2 + 3^2 + 3) = f(2) + f(11) = 2f(2) + f(2)f(3) + f(3).$$

Cuối cùng từ hệ thức (1.10) cùng với các sự kiện

$$f(8) = f(1^2 + 2^2 + 3) = f(1^2 + 1) + f(2^2 + 2) = f(2) + f(6) = f(3) + f(5)$$

ta suy ra

$$(1.13) \quad f(2)f(3) = 2f(3).$$

Hơn nữa

$$(1.14) \quad S_5 = f(5^2 + 1) = f(26) = f(2)f(13) = 4f(2) + 6f(3),$$

$$\begin{aligned} (1.15) \quad S_6 &= f(6^2 + 1) = f(37) = f(3^2 + 5^2 + 3) = f(11) + f(26) \\ &= 5f(2) + 9f(3), \end{aligned}$$

$$(1.16) \quad 2f(17) = f(4^2 + 4^2 + 3) - D = f(35) - D = f(5)f(7) - D,$$

$$(1.17) \quad f(3)f(7) = f(21) = f(3^2 + 3^2 + 3) = 2f(10) + D = 3f(2) + 5f(3).$$

Phương trình (1.12) cho ta $f(2) = 0$ hoặc $f(2) = 2$. Giả sử $f(2) = 0$. Khi đó từ (1.13) suy ra $f(3) = 0$ và do đó sử dụng các hệ thức từ (1.10) đến (1.17) ta có

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = 0.$$

Điều này suy ra kết quả (1.2) là đúng. Bây giờ giả sử $f(2) = 2$. Trong trường hợp này ta có

$$f(5) = f(2) + f(3), \quad f(8) = 2 + f(3).$$

Chúng ta sẽ chứng minh $f(3) = 3$. Từ hệ thức (1.15) và sử dụng đẳng thức

$$f(37) = f(1^2 + 6^2 + 3) - f(3) = f(5)f(8) - f(3) = 2f(3)^2 + 5f(3) + 4$$

ta suy ra

$$(1.18) \quad 2f(3)^2 - 4f(3) - 6 = 0.$$

Mặt khác từ (1.4) suy ra rằng

$$f(6)f(11) - f(3)f(13) = f(66) - f(65) = f(3) - f(2),$$

do đó

$$3f(3)^2 - 7f(3) - 6 = 0.$$

Kết hợp với (1.18) suy ra $f(3) = 3$. Vì vậy, sử dụng các hệ thức từ (1.10) đến (1.17) ta suy ra

$$S_j = j^2 + 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Kết quả này kết thúc việc chứng minh (1.9) và do đó bổ đề được chứng minh. $\square$

1.3.4. Chứng minh Định lý 1.3.1

Chứng minh. Trong phần chứng minh của định lý, sử dụng Bổ đề 1.3.3, chúng ta có thể giả sử rằng (1.3) được thỏa mãn, nghĩa là

$$(1.19) \quad \begin{cases} f(n^2 + 1) = n^2 + 1 \\ f(m^2 + 2) = m^2 + 2 \\ f(n^2 + m^2 + 3) = n^2 + m^2 + 3. \end{cases}$$

Một điều rõ ràng từ (1.19) là $f(n) = n$, $n \leq 7$. Thật vậy, trước hết $f(1) = 1$ là do giả thiết $f \in M$. Tiếp theo, dựa vào hai hệ thức đầu trong (1.19) lần

lượt cho ta

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2 \\ f(3) &= f(1^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3 \\ f(5) &= f(2^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5 \\ f(6) &= f(2^2 + 2) = 2^2 + 2 = 6. \end{aligned}$$

Ngoài ra, dựa vào hệ thức thứ ba trong (1.19) ta có

$$3f(7) = f(3)f(7) = f(21) = f(3^2 + 3^2 + 3) = 3^2 + 3^2 + 3 = 21,$$

do đó $f(7) = 7$. Tương tự

$$5f(4) = f(5)f(4) = f(20) = f(1^2 + 4^2 + 3) = 1^2 + 4^2 + 3 = 20,$$

do đó $f(4) = 4$.

Giả sử rằng $f(n) = n$ với mọi $n < T$, trong đó $T > 7$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $f(T) = T$. Rõ ràng T phải là một lũy thừa nguyên tố, tức là $T = q^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ và q là một số nguyên tố nào đó.

Dễ thấy rằng, nếu $\alpha = 1$ thì $q > 7$ và tồn tại các số nguyên dương $n, m \leq \frac{q-1}{2}$ sao cho $n^2 + m^2 + 3 = qN$, $\gcd(q, N) = 1$, $q < N$. Vì vậy, chúng ta có $f(q) = q$.

Bây giờ, giả sử rằng $\alpha \geq 2$, $q > 3$. Chúng ta xem xét đồng dư thức

$$n^2 + m^2 + 3 \equiv 0 \pmod{q^\alpha}.$$

Giả sử

$$A_q(3) := \left\{ 1 \leq m \leq q-1 : \left(\frac{-m^2-3}{q} \right) = 1 \right\}.$$

Ở đây, $\left(\frac{-m^2-3}{q} \right)$ là ký hiệu Legendre theo số nguyên tố lẻ q (xem Định nghĩa 1.1.6). Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \#A_q(3) &= \sum_{\substack{m=1 \\ \gcd(m^2+3, q)=1}}^{q-1} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{-m^2-3}{q} \right) \right) \\ &= \sum_{m=0}^{q-1} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{-m^2-3}{q} \right) \right) - \sum_{\substack{m=0 \\ q|m^2+3}}^{q-1} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{-m^2-3}{q} \right) \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{-3}{q} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(q - \left(\frac{-1}{q} \right) - 2 - 2 \left(\frac{-3}{q} \right) \right). \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp của chúng ta, hệ thức cuối cùng suy ra rằng

$$\#A_q(3) \geq 1.$$

Do đó, có các số nguyên $m \in \{1, \dots, q-1\}$, $1 \leq n_1 \leq q^\alpha - 1$, $\gcd(n_1, q) = 1$ và $1 \leq n_2 := q^\alpha - n_1 \leq q^\alpha - 1$ sao cho

$$n_i^2 + m^2 + 3 = q^\alpha N_i \quad (i = 1, 2).$$

Từ đó suy ra

$$q^\alpha (N_2 - N_1) = (q^\alpha - n_1)^2 - n_1^2 = q^{2\alpha} - 2q^\alpha n_1,$$

nghĩa là $N_2 - N_1 = q^\alpha - 2n_1$. Vì $\gcd(n_1, q) = 1$, chúng ta thu được ít nhất một trong hai số N_1 hoặc N_2 là nguyên tố cùng nhau với q . Giả sử $n \in \{n_1, n_2\}$ và $N \in \{N_1, N_2\}$ sao cho $n^2 + m^2 + 3 = q^\alpha N$, $\gcd(N, q) = 1$. Khi đó từ $\alpha \geq 2$ suy ra rằng

$$N \leq \frac{1}{q^\alpha} \left[(q^\alpha - 1)^2 + (q - 1)^2 + 3 \right] < q^\alpha.$$

Do đó

$$Nf(q^\alpha) = f(N)f(q^\alpha) = f(Nq^\alpha) = f(n^2 + m^2 + 3) = n^2 + m^2 + 3 = Nq^\alpha.$$

Từ đây suy ra $f(q^\alpha) = q^\alpha$ là hệ thức chúng ta cần thiết lập.

Để hoàn thành việc chứng minh Định lý 1.3.1, vẫn phải xem xét các trường hợp còn lại $q = 2$ và $q = 3$. Cho $q = 2$ và $T = 2^\alpha$, trong đó $\alpha \geq 3$. Vì $-7 \equiv 1 \pmod{8}$, nên chúng ta có -7 là một thặng dư bậc hai môđun 2^α và do đó tồn tại $n_\alpha \in [0, 2^{\alpha-1} - 1]$ sao cho $n_\alpha^2 + 7 = n_\alpha^2 + 2^2 + 3 \equiv 0 \pmod{2^\alpha}$ và

$$(n_\alpha + 2^{\alpha-1})^2 + 7 \equiv 0 \pmod{2^\alpha}.$$

Xác định N_1 và N_2 bởi $n_\alpha^2 + 7 = 2^\alpha N_1$ và $(n_\alpha + 2^{\alpha-1})^2 + 7 = 2^\alpha N_2$. Từ hai phương trình này và từ bất đẳng thức $7 < T = 2^\alpha$ ta suy ra

$$N_1 < 2^\alpha, \quad N_2 < 2^\alpha, \quad N_2 - N_1 = n_\alpha + 2^{\alpha-2}.$$

Từ hệ thức cuối cùng và do 2 không chia hết n_α suy ra N_1 hoặc N_2 là số lẻ, và do đó $f(2^\alpha) = 2^\alpha$.

Cuối cùng, cho $q = 3$ và $T = 3^\alpha$, trong đó $\alpha > 1$. Ta xét đồng dư thức

$$n^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3^\alpha}.$$

Tương tự như trên, ta suy ra rằng tồn tại các số nguyên dương n, N sao cho $n^2 + 2 = 3^\alpha N$, $\gcd(3, N) = 1$, $N < 3^\alpha$. Vì vậy, những điều này cùng với (1.19) suy ra được rằng $f(3^\alpha) = 3^\alpha$. Định lý 1.3.1 được chứng minh. $\square$

CHƯƠNG 2

VỀ ĐẶC TRƯNG ĐỒNG NHẤT CỦA HÀM NHÂN HOÀN TOÀN

Trong toàn bộ chương 2, chúng ta ký hiệu: M là tập hợp tất cả các hàm nhân f thỏa mãn $f(1) = 1$. M^* là tập hợp tất cả các hàm nhân hoàn toàn f thỏa mãn $f(1) = 1$.

2.1 Phương trình hàm xác định đặc trưng đồng nhất của hàm nhân hoàn toàn

Năm 1992, C. Spiro [9] đã chỉ ra rằng nếu hàm $f \in M$ thỏa mãn

$$f(p+q) = f(p) + f(q), \quad \forall p, q \in P$$

thì $f(n) = n$ với mọi số nguyên dương n .

Claudia Spiro [9] đã khởi xướng và truyền cảm hứng cho nhiều nhà toán học trong việc tìm kiếm những đặc trưng mới cho hàm số số học đồng nhất. Trong hướng nghiên cứu thời sự ấy, năm 2010 tác giả Bùi Minh Phong đã thu được một kết quả công bố trong bài báo [8] bởi các phương trình hàm sau:

Giả sử $f, g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ là các hàm nhân hoàn toàn sao cho

$$f(p+1) = g(p) + 1 \text{ và } f(p+q^2) = g(p) + g(q^2)$$

thỏa mãn với mọi số nguyên tố p và q . Khi đó

hoặc $f(p+1) = f(p+q^2) = 0, g(\pi) = -1$ với mọi số nguyên tố p, q, π ,

hoặc $f(n) = g(n) = n$ với mọi số nguyên dương n .

2.2 Một đặc trưng đồng nhất của hàm nhân hoàn toàn

2.2.1 Định lý. ([8]). Nếu $f, g \in M^*$ thỏa mãn các phương trình sau

$$(2.1) \quad f(p+1) = g(p) + 1, \quad f(p+q^2) = g(p) + g(q^2), \quad \forall p, q \in P,$$

thì hoặc

$$(2.2) \quad f(p+1) = f(p+q^2) = 0, \quad g(\pi) = -1, \quad \forall p, q, \pi \in P,$$

hoặc

$$(2.3) \quad f(n) = g(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Chứng minh. Quá trình phép chứng minh Định lý 2.2.1 của chúng ta sẽ bắt đầu từ Bổ đề 2.2.2 tới Bổ đề 2.2.4 dưới đây.

2.2.2 Bổ đề. ([8]). Giả sử $f, g \in M^*$ thỏa mãn (2.1). Khi đó, hoặc

$$(2.4) \quad f(2) = 0, \quad g(2) = -1,$$

hoặc

$$(2.5) \quad f(2) = g(2) = 2.$$

Chứng minh. Đầu tiên chúng ta suy ra từ (2.1) rằng

$$(2.6) \quad (f(p) - g(p))(g(p) + 1) = 0, \quad \forall p \in P.$$

Thật vậy, sử dụng các phương trình (2.1) cho trường hợp $p = q$ cho ta

$$\begin{aligned} f(p)(g(p) + 1) &= f(p)f(p+1) = f(p(p+1)) = f(p^2 + p) \\ &= g(p^2) + g(p) = (g(p))^2 + g(p) = g(p)(g(p) + 1). \end{aligned}$$

Từ đẳng thức này suy ra được hệ thức (2.6) dưới đây:

$$(f(p) - g(p))(g(p) + 1) = 0, \quad \forall p \in P.$$

Do đó trong trường hợp $p = 2$ ta có

$$(f(2) - g(2))(g(2) + 1) = 0.$$

Khi đó, hoặc $g(2) = -1$, hoặc $f(2) = g(2)$, $g(2) \neq -1$.

Trường hợp 1: $g(2) = -1$. Đặt $x := f(2)$. Sử dụng (2.1) ta có

$$g(3) = f(3+1) - 1 = f(4) - 1 = f(2)^2 - 1 = x^2 - 1,$$

$$g(7) = f(7+1) - 1 = f(8) - 1 = f(2^3) - 1 = f(2)^3 - 1 = x^3 - 1,$$

$$\begin{aligned} x^4 &= f(2)^4 = f(2^4) = f(3^2 + 7) = g(3^2) + g(7) \\ &= g(3)^2 + g(7) = (x^2 - 1)^2 + (x^3 - 1). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$(2.7) \quad x^2(x-2) = 0.$$

Mặt khác sử dụng (2.1) và điều kiện $g(2) = -1$, ta có

$$\begin{aligned} f(3) &= f(2+1) = g(2) + 1 = 0, \\ g(5) &= f(6) - 1 = f(2)f(3) - 1 = -1. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} x^5 &= f(2)^5 = f(2^5) = f(32) = f(5^2 + 7) = g(5^2) + g(7) \\ &= g(5)^2 + g(7) = 1 + (x^3 - 1) = x^3. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$(2.8) \quad x^5 = x^3.$$

Từ (2.7) và (2.8) suy ra $x = f(2) = 0$. Việc chứng minh (2.4) được hoàn thành.

Trường hợp 2: $g(2) \neq -1$, $f(2) = g(2)$.

Trong trường hợp này ta đặt

$$x = f(2) = g(2) \neq -1.$$

Khi đó từ giả thiết (2.1) ta có

$$f(3) = f(2+1) = g(2) + 1 = x + 1$$

$$g(5) = f(6) - 1 = f(2)f(3) - 1 = x(x+1) - 1$$

$$(x+1)^2 = f(3)^2 = f(9) = f(2^2 + 5) = g(2^2) + g(5) = x^2 + x(x+1) - 1.$$

Do đó

$$(x+1)(x-2)=0.$$

Từ điều kiện $x \neq 1$ ta suy ra $x=2$. Như vậy, hệ thức (2.5) và Bổ đề 2.2.2 được chứng minh. $\square$

2.2.3 Bổ đề. ([8]). *Giả sử $f, g \in M^*$ thỏa mãn (2.1). Nếu*

$$f(2)=0, g(2)=-1,$$

thì (2.2) đúng, nghĩa là

$$f(p+1)=f(p+q^2)=0, g(\pi)=-1, \forall p, q, \pi \in P.$$

Chứng minh. Vì $g(2)=-1$ nên ta sẽ chứng minh rằng, $g(\pi)=-1, \pi \in P, \pi \neq 2$. Thật vậy, giả sử $\pi \in P, \pi \neq 2$. Sử dụng giả thiết (2.1) và $f(2)=0$ ta suy ra

$$0=f(2)=f(2)f\left(\frac{\pi+1}{2}\right)=f(\pi+1)=g(\pi)+1.$$

Từ đó suy ra $g(\pi)=-1, \forall \pi \in P, \pi \neq 2$. Như vậy, $g(\pi)=-1, \forall \pi \in P$. Cuối cùng, từ (2.1) cho ta

$$f(p+1)=g(p)+1=(-1)+1=0.$$

$$f(p+q^2)=g(p)+g(q^2)=g(p)+g(q)^2=(-1)+(-1)^2=0, \forall p, q \in P.$$

Bổ đề 2.2.3 được chứng minh. $\square$

2.2.4 Bổ đề. ([8]). *Giả sử $f, g \in M^*$ thỏa mãn (2.1). Nếu*

$$f(2)=g(2)=2,$$

thì

$$f(n)=g(n)=n, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Chứng minh. Rõ ràng là Bổ đề 2.2.4 sẽ đúng nếu chúng ta chứng minh được điều sau: Nếu T là số nguyên sao cho $f(n) = g(n) = n$ với mọi $n < T$ thì $f(T) = T$.

Giả sử đầu tiên rằng T không phải là số nguyên tố. Do đó, chúng ta có thể viết $T = AB$ với $1 < A \leq B < T$, trong trường hợp đó ta có

$$f(T) = f(AB) = f(A)f(B) = AB = T$$

$$g(T) = g(AB) = g(A)g(B) = AB = T.$$

Bây giờ giả sử rằng $T \in P$. Vì $f(2) = g(2) = 2$, chúng ta có thể giả sử rằng $T \in P$ và $T \geq 3$. Khi đó $2 < T$ và $\frac{T+1}{2} < T$. Do đó, từ giả thiết (2.1) và giả thiết quy nạp chúng ta nhận được

$$T + 1 = 2 \frac{T + 1}{2} = f(2) f\left(\frac{T + 1}{2}\right) = f(T + 1) = g(T) + 1.$$

Từ đó dẫn tới $g(T) = T$.

Cuối cùng từ (2.6) ta có

$$0 = (f(T) - g(T))(g(T) + 1) = (f(T) - g(T))(T + 1).$$

Hệ thức này suy ra $f(T) - g(T) = 0$ hay $f(T) = g(T) = T$.

Bổ đề 2.2.4 được chứng minh và do đó Định lý 2.2.1 được chứng minh hoàn toàn. $\square$

KẾT LUẬN

Với mục tiêu đi sâu nghiên cứu, tìm hiểu các đặc trưng của hàm số số học đồng nhất trong tập hợp các hàm nhân – một bài toán có liên hệ chặt chẽ với giả thuyết Goldbach, luận văn giới thiệu hai định lý chính cùng với các chứng minh chi tiết trong hai bài báo tiếng Anh của tác giả Bùi Minh Phong (xem [7], [8]). Với nhiệm vụ đặt ra như trên, nội dung đã thực hiện được của luận văn chủ yếu bao gồm:

1. Hệ thống lại các khái niệm và kết quả của lý thuyết hàm nhân, hàm hoàn toàn nhân.
2. Giới thiệu ký hiệu Legendre về thặng dư bậc hai theo môđun nguyên tố làm công cụ trong phép chứng minh của Định lý 1.3.1.
3. Trình bày chi tiết các chứng minh của các bổ đề và Định lý 1.3.1 nói về tính chất của hàm nhân f bởi phương trình hàm

$$f(n^2 + m^2 + 3) = f(n^2 + 1) + f(m^2 + 2), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Từ đó giới thiệu hệ quả như là một đặc trưng của hàm số số học đồng nhất trong tập hợp các hàm nhân (Hệ quả 1.3.2).

4. Trình bày các chứng minh chi tiết ba bổ đề, để từ đó thu được một đặc trưng (Định lý 2.2.1) của hàm đồng nhất trong tập các hàm nhân hoàn toàn f bởi các phương trình hàm

$$f(p+1) = g(p) + 1, \quad f(p+q^2) = g(p) + g(q^2), \quad \forall p, q \in P.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Kang - Kang Chen and Yong - Gao Chen (2010), On $f(p+q) = f(p) + f(q)$ for all odd primes p and q , *Publ. Math. Debrecen*, **76/4**, 425-430.
- [2] Yong - Gao Chen, Jin - Hui Fang, Pingzhi Yuan, Yueping Zheng (2016), On multiplicative functions with $f(p+q+n_0) = f(p) + f(q) + f(n_0)$, *J. Number Theory*, **165**, 270-289.
- [3] P. V. Chung (1996), Multiplicative functions satisfying the equation $f(m^2+n^2) = f(m^2) + f(n^2)$, *Math. Slovaca*, **46**, No. 2-3, 165-171.
- [4] P. V. Chung and B. M. Phong (1999), Additive uniqueness sets for multiplicative functions, *Publ. Math. Debrecen*, **55**, 237-243.
- [5] J. M. De Koninck, I. Katai and B. M. Phong (1997), A new characteristic of the identity function, *J. Number Theory*, **63**, 325-338.
- [6] B. M. Phong, A characterization of the identity function with an equation of Hosszu type (2006), *Publ. Math. Debrecen*, **69**, 219-226.
- [7] B. M. Phong (1997), A characterization of the identity function, *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae*, **24**, 3-9.
- [8] B. M. Phong (2010), A characterization of the identity function with functional equations, *Annales Univ. Sci. Budapest.*, Sect. Comp. **32**, 247-252.
- [9] C. Spiro (1992), Additive uniqueness sets for arithmetic functions, *Journal of Number Theory*, **42**, 232-246.