

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐỖ THỊ THU

VỀ NỬA NHÓM SỐ THABIT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC  
VỀ NỬA NHÓM SỐ THABIT

*Chuyên ngành:* ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ  
Mã số: 8460104

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. NGUYỄN THỊ HỒNG LOAN  
Học viên thực hiện: ĐỖ THỊ THU

Nghệ An - 2022

## MỤC LỤC

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Mục lục</b>                                                      | <b>2</b>  |
| <b>Mở đầu</b>                                                       | <b>3</b>  |
| <b>1 KIẾN THỨC CHUNG VỀ NỬA NHÓM SỐ</b>                             | <b>6</b>  |
| 1.1. Nửa nhóm số . . . . .                                          | 6         |
| 1.2. Tập Apéry . . . . .                                            | 7         |
| 1.3. Hệ sinh tối tiểu, chiều nhúng của nửa nhóm số . . . . .        | 9         |
| 1.4. Số Frobenius và giống của nửa nhóm số . . . . .                | 9         |
| 1.5. Số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số . . . . .             | 10        |
| <b>2 NỬA NHÓM SỐ THABIT</b>                                         | <b>12</b> |
| 2.1. Nửa nhóm số Thabit và chiều nhúng của nửa nhóm số Thabit . . . | 12        |
| 2.2. Tập Apéry và số Frobenius của nửa nhóm số Thabit . . . . .     | 17        |
| 2.3. Số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số Thabit . . . . .      | 25        |
| 2.4. Giống của nửa nhóm số Thabit . . . . .                         | 28        |
| <b>Kết luận</b>                                                     | <b>34</b> |
| <b>Tài liệu tham khảo</b>                                           | <b>35</b> |

## MỞ ĐẦU

Cho  $S$  là một tập con khác rỗng của tập hợp các số tự nhiên  $\mathbb{N}$ . Nếu  $S$  chứa 0, đóng kín với phép cộng và  $\mathbb{N} \setminus S$  là tập hữu hạn thì  $S$  được gọi là một *nửa nhóm số*.

Cho  $A$  là tập con của tập  $\mathbb{N}$  thỏa  $\gcd(A) = 1$  thì tập hợp

$$S = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

là một nửa nhóm số. Ngược lại, mọi nửa nhóm số đều có dạng này.

Một vấn đề rất cổ điển trong toán học là tìm số nguyên lớn nhất không biểu thị tuyến tính được qua một họ hữu hạn các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với các hệ số nguyên không âm. Vấn đề này do nhà toán học Frobenius đưa ra và được biết đến với tên gọi là *vấn đề Frobenius*. Vấn đề tiếp theo là tìm số các số nguyên không âm không biểu thị tuyến tính được qua một họ hữu hạn các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với các hệ số nguyên không âm. Nếu diễn đạt theo thuật ngữ của nửa nhóm số thì những vấn đề này có thể được phát biểu dưới dạng: tìm số nguyên lớn nhất không thuộc một nửa nhóm số  $S$  và tìm lực lượng của tập hợp  $\mathbb{N} \setminus S$ . Theo hướng nghiên cứu này, người ta đã đề cập đến hai bất biến quan trọng của nửa nhóm số là *số Frobenius* và *giống*.

Sau khi ứng dụng của nửa nhóm số trong Hình học Đại số, Đại số giao hoán và trong Lý thuyết số được các nhà toán học để ý thì lý thuyết về nửa nhóm số có được một bước tiến mới. Trong các nghiên cứu mới, người ta đưa

ra một số bất biến khác như *bội, chiều nhúng, tập Apéry, số giả Frobenius và kiểu*. Mặc dù vậy, các thông tin về các bất biến này không phải lúc nào cũng được giải quyết một cách tổng quát, khi chiều nhúng của nửa nhóm số từ 3 trở lên.

Hai số nguyên dương  $m$  và  $n$  được gọi là *cặp số thân thiện* nếu tổng các ước thực sự (các ước số không bao gồm chính nó) của số này bằng số kia. Một số nguyên dương  $x$  được gọi là *số Thabit* nếu  $x = 3 \cdot 2^n - 1$  với  $n$  là một số nguyên không âm nào đó. Khái niệm này được đặt tên theo tên của nhà toán học, bác sỹ, nhà thiên văn học và dịch giả Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani (826-901). Thabit ibn Qurra là người đầu tiên nghiên cứu những con số này và mối quan hệ của chúng với những cặp số thân thiện. Ông đã phát hiện và chứng minh rằng nếu  $p = 3 \cdot 2^n - 1$ ,  $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$  và  $r = 9 \cdot 2^{n-1} - 1$  là những số nguyên tố thì  $M = 2^n qp$  và  $N = 2^n r$  là một cặp số thân thiện. Do đó với  $n = 2, n = 4$  và  $n = 7$ , ta có các cặp số thân thiện tương ứng là  $(220, 284)$ ,  $(17296, 18416)$  và  $(9363584, 9437056)$ .

Một nửa nhóm số  $S$  được gọi là *nửa nhóm số Thabit* nếu tồn tại số tự nhiên  $n$  sao cho  $S = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$ . Khi đó nửa nhóm số này được ký hiệu bởi  $T(n)$ .

Trong bài báo [4] trên tạp chí Journal of Number Theory ra năm 2015, J.C. Rosales, M.B. Branco và D. Torrão nghiên cứu về nửa nhóm số Thabit. Các kết quả của [4] là một phần trong nội dung luận án tiến sĩ [5] của D. Torrão dưới sự hướng dẫn của hai người thầy, chính là hai tác giả còn lại của bài báo. Trong bài báo [4], các tác giả đã chỉ ra rằng hệ sinh tối tiểu của  $T(n)$  là  $\{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n+1\}\}$  và do đó chiều nhúng của của  $T(n)$  là  $e(T(n)) = n + 2$ . Trong [4], các tác giả cũng chứng minh được rằng số Frobenius của nửa nhóm số  $T(n)$  là  $F(T(n)) = 9 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^n - 1$  và giống của nửa nhóm số  $T(n)$  là  $g(T(n)) = 9 \cdot 2^{2n-1} + (3n - 5)2^{n-1}$ .

Luận văn gồm hai phần chính, phần thứ nhất trình bày các kiến thức

chung về nửa nhóm số, phần thứ hai là nội dung chính của luận văn, trình bày chi tiết các kết quả của bài báo [4] về nửa nhóm số Thabit. Ngoài ra, luận văn còn có phần mở đầu, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS Nguyễn Thị Hồng Loan, người đã tận tình trong suốt quá trình giảng dạy. Tác giả cũng xin được gửi lời tri ân sâu sắc tới các thầy cô giảng viên Khoa Toán, Phòng Đào tạo Sau đại học, Trường Đại học Vinh về những hỗ trợ cần thiết và quý báu trong suốt quá trình học tập. Và tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu Trường Chuyên Lê Quý Đôn Vũng Tàu, gia đình và bạn bè đã luôn quan tâm giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả có thể học tập, nghiên cứu và hoàn thành khóa học này.

*Nghệ An, tháng 6 năm 2022*

**Tác giả**

## CHƯƠNG 1

## KIẾN THỨC CHUNG VỀ NỬA NHÓM SỐ

Trong chương này, chúng tôi sẽ tóm lược lại các khái niệm cơ bản về **nửa nhóm số**. Tất cả các kiến thức này đều được trình bày rất đầy đủ, chi tiết trong cuốn sách của các tác giả J.C. Rosales, P.A. García- Sánchez viết năm 2009: *Numerical semigroups* ([3]) và cũng đã được trình bày trong [1] và [2]. Các kiến thức trong chương này được tham khảo và trình bày lại nhằm phục vụ cho nội dung chính của luận văn ở Chương 2. Chính vì vậy, chúng tôi chỉ nêu kết quả mà không trình bày chứng minh.

## 1.1 Nửa nhóm số

Trước khi giới thiệu khái niệm nửa nhóm số và các bất biến của nó, chúng ta nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị về nửa nhóm. *Nửa nhóm* là một tập hợp  $S$  khác rỗng mà trên đó trang bị một phép toán có tính chất kết hợp. *Nửa nhóm giao hoán* là một nửa nhóm mà phép toán có tính chất giao hoán. Một tập con khác rỗng đóng kín đối với phép toán trên nửa nhóm  $S$  gọi là *nửa nhóm con* của  $S$ . Giao của các nửa nhóm con của nửa nhóm  $S$  là một nửa nhóm con của  $S$ .

Nếu  $A$  là một tập con khác rỗng của nửa nhóm  $S$ , nửa nhóm con bé nhất của  $S$  chứa  $A$  là giao của mọi nửa nhóm con của  $S$  chứa  $A$ , được ký hiệu là  $\langle A \rangle$ .  $\langle A \rangle$  được gọi là *nửa nhóm con sinh bởi  $A$* . Ta có

$$\langle A \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \dots, n \}.$$

Nửa nhóm  $S$  được gọi là *sinh bởi*  $A$  nếu  $S = \langle A \rangle$ . Khi đó,  $A$  được gọi là *hệ sinh* của nửa nhóm  $S$ . Một hệ sinh  $A$  của nửa nhóm  $S$  được gọi là *hệ sinh tối thiểu* của  $S$  nếu mọi tập con thực sự của  $A$  đều không thể sinh ra  $S$ .

Một nửa nhóm  $M$  mà phép toán trên đó có phần tử đơn vị được gọi là một *vị nhóm*. Ví dụ: Tập hợp các số tự nhiên  $\mathbb{N}$  là một vị nhóm với phép cộng. Nửa nhóm con của  $M$  có chứa phần tử đơn vị gọi là *vị nhóm con* của  $M$ . Tương tự như đối với nửa nhóm, giao của các vị nhóm con của  $M$  là một vị nhóm con của  $M$ . Do đó, cho  $A$  là một tập con của  $M$  thì vị nhóm con nhỏ nhất của  $M$  chứa  $A$  chính là vị nhóm con của  $M$  sinh bởi  $A$ .

**1.1.1 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên  $\mathbb{N}$ . Nếu  $\mathbb{N} \setminus S$  là tập hữu hạn thì  $S$  được gọi là *nửa nhóm số*.

Vậy  $S$  là một nửa nhóm số nếu  $S$  là một tập con của  $\mathbb{N}$ , chứa 0, đóng kín đối với phép cộng và  $\mathbb{N} \setminus S$  là tập hữu hạn.

Cho  $A$  là một tập con khác rỗng của  $\mathbb{N}$ . Mệnh đề sau cho ta điều kiện cần và đủ để  $\langle A \rangle$  là một nửa nhóm số.

**1.1.2 Mệnh đề.** Cho  $A$  là một tập con khác rỗng của  $\mathbb{N}$ . Khi đó  $\langle A \rangle$  là một nửa nhóm số khi và chỉ khi  $\gcd(A) = 1$ .

**1.1.3 Mệnh đề.** Cho  $M$  là một vị nhóm con không tầm thường của vị nhóm cộng các số tự nhiên  $\mathbb{N}$ . Khi đó  $M$  đẳng cấu với một nửa nhóm số.

## 1.2 Tập Apéry

Một trong những công cụ tốt nhất để nghiên cứu về nửa nhóm số là tập Apéry, được định nghĩa như sau.

**1.2.1 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số và  $n$  là một phần tử khác 0 của  $S$ . Tập Apéry của  $n$  trong nửa nhóm số  $S$  là tập hợp được xác định bởi

$$\text{Ap}(S, n) = \{h \in S \mid h - n \notin S\}.$$



Từ định nghĩa của tập Apéry, ta có ngay kết quả sau.

**1.2.2 Bổ đề.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số và  $n \in S \setminus \{0\}$ . Nếu  $x, y \in S$  sao cho  $x + y \in \text{Ap}(S, n)$  thì  $\{x, y\} \subseteq \text{Ap}(S, n)$ .

Mệnh đề sau cho thấy  $\text{Ap}(S, n)$  là một hệ thặng dư đầy đủ môđun  $n$  mà các phần tử trong đó là bé nhất thuộc  $S$ . Vì vậy mệnh đề này cho ta cách tìm tập Apéry của một nửa nhóm số.

**1.2.3 Mệnh đề.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số và  $n \in S \setminus \{0\}$ . Khi đó ta có

$$\text{Ap}(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\},$$

trong đó  $w(i)$  là số nhỏ nhất của  $S$  sao cho

$$w(i) \equiv i \pmod{n}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Từ mệnh đề trên ta suy ra  $\text{Ap}(S, n)$  là tập hợp hữu hạn gồm  $n$  phần tử.

**1.2.4 Ví dụ.** Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \rightarrow\}$$

(trong đó ký hiệu  $14 \rightarrow$  nghĩa là các số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 14). Ta tính được

$$\text{Ap}(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\},$$

$$\text{Ap}(S, 7) = \{0, 5, 9, 10, 15, 18, 20\}.$$

Từ Mệnh đề 1.2.3, ta suy ra được kết quả sau đây.

**1.2.5 Bổ đề.** Giả sử  $S$  là một nửa nhóm số và  $n \in S \setminus \{0\}$ . Khi đó, với mỗi  $s \in S$ , tồn tại duy nhất  $(k, w) \in \mathbb{N} \times \text{Ap}(S, n)$  sao cho

$$s = kn + w.$$

### 1.3 Hệ sinh tối thiểu, chiều nhúng của nửa nhóm số

Mỗi nửa nhóm số có thể có nhiều hệ sinh. Với định lý sau đây, ta biết rằng mỗi nửa nhóm số chỉ có duy nhất một hệ sinh hữu hạn.

**1.3.1 Định lý.** *Mỗi nửa nhóm số đều có duy nhất một hệ sinh tối thiểu. Hệ sinh tối thiểu này là hữu hạn.*

Cho  $s_1, \dots, s_n$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó, nửa nhóm số sinh bởi  $s_1, \dots, s_n$  là

$$S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \{ \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \dots, n \}.$$

Định lý 1.3.1 dẫn đến khái niệm sau đây.

**1.3.2 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số và  $s_1, \dots, s_n$  là một hệ sinh tối thiểu của  $S$  sao cho  $s_1 < \dots < s_n$ .

(1). Số tự nhiên bé nhất trong hệ sinh tối thiểu gọi là *số bội* của  $S$ , kí hiệu là  $m(S)$ . Vậy  $m(S) = s_1$ .

(2). Lực lượng của hệ sinh tối thiểu gọi là *chiều nhúng* của  $S$ , kí hiệu là  $e(S)$ . Vậy  $e(S) = n$ .

Số bội  $m(S)$  chính là số nguyên dương nhỏ nhất trong  $S$  và chiều nhúng  $e(S)$  không bao giờ vượt quá số bội  $m(S)$ .

### 1.4 Số Frobenius và giống của nửa nhóm số

Khi nghiên cứu nửa nhóm số, có một bất biến quan trọng và có nhiều ứng dụng là *số Frobenius*. Trong các bài giảng của nhà toán học Frobenius, ông đề cập đến vấn đề đưa ra một công thức xác định số nguyên lớn nhất không biểu thị tuyến tính được qua tập một số nguyên dương có ước chung lớn nhất bằng 1 với các hệ số nguyên không âm. Kết hợp với định nghĩa nửa nhóm số, chúng ta có ngay định nghĩa khá đơn giản về số Frobenius. Ngoài ra, nhắc lại rằng với  $S$  là một nửa nhóm số thì  $\mathbb{N} \setminus S$  là hữu hạn.

**1.4.1 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số.

(1). Số nguyên lớn nhất không thuộc  $S$  được gọi là *số Frobenius của  $S$*  và được ký hiệu là  $F(S)$ .

(2). *Giống* (hay *bậc kỳ dị*) của  $S$ , kí hiệu  $g(S)$  là lực lượng của tập  $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ .

Ký hiệu  $\mathbb{Z}$  là tập hợp số nguyên. Từ định nghĩa trên ta có

$$F(S) = \max(\mathbb{Z} \setminus S).$$

Cho đến nay, chúng ta biết rằng không có công thức tổng quát cho số Frobenius của nửa nhóm số khi chiều nhúng lớn hơn 2. Tuy nhiên, nếu tập Apéry của một phần tử khác không bất kỳ của nửa nhóm số được xác định thì ta có thể tính số Frobenius của một nửa nhóm số thông qua tập Apéry nhờ mệnh đề sau.

**1.4.2 Mệnh đề.** Cho nửa nhóm số  $S$  và  $0 < n \in S$ . Khi đó

- (1).  $F(S) = \max \text{Ap}(S, n) - n$ .
- (2).  $g(S) = \frac{1}{n} \left( \sum_{w \in \text{Ap}(S, n)} w \right) - \frac{n-1}{2}$ .

## 1.5 Số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số

Số giả Frobenius được định nghĩa như sau:

**1.5.1 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số. Khi đó

(1). Số nguyên  $x$  được gọi là *số giả Frobenius* nếu  $x \notin S$  và  $x + s \in S$  với mọi  $s \in S \setminus \{0\}$ .

(2). Tập các số giả Frobenius của  $S$  kí hiệu là  $PF(S)$ . Lực lượng của  $PF(S)$  gọi là *kiểu* của  $S$  và kí hiệu là  $t(S)$ .

**1.5.2 Nhận xét.** Từ định nghĩa trên, ta có vài nhận xét:

- (1)  $PF(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid x + s \in S, \forall s \in S \setminus \{0\}\}$ .
- (2)  $F(S) \in PF(S)$  và  $F(S)$  là số lớn nhất của  $PF(S)$ .

**1.5.3 Chú ý.** Trên nửa nhóm số  $S$ , xét quan hệ hai ngôi  $\leq_S$  xác định bởi:  $a \leq_S b$  nếu  $b - a \in S$ . Dễ dàng chứng minh được, đây là quan hệ thứ tự trên  $\mathbb{Z}$ .

Theo Định nghĩa 1.5.1 thì các số giả Frobenius là các phần tử cực đại trong  $\mathbb{Z} \setminus S$  theo thứ tự  $\leq_S$ .

**1.5.4 Mệnh đề.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số và cho  $x$  là một số nguyên khác không của  $S$ . Khi đó,

$$PF(S) = \{w - x \mid w \in \text{maximals}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, x))\}.$$

Trong đó  $\text{maximals}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, x))$  là kí hiệu tập các phần tử cực đại của tập Apéry  $\text{Ap}(S, x)$  xét theo quan hệ thứ tự  $\leq_S$ .

Ta đã biết, số phần tử của tập  $\text{Ap}(S, n)$  bằng  $n$  và 0 không bao giờ là phần tử cực đại nên từ Mệnh đề 1.5.4 ta có một chặn trên cho kiểu của nửa nhóm số  $S$  trong kết quả sau.

**1.5.5 Hệ quả.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số. Kiểu của  $S$  thỏa mãn

$$t(S) \leq m(S) - 1.$$

## CHƯƠNG 2

**NỬA NHÓM SỐ THABIT**

Một số nguyên dương  $x$  được gọi là số Thabit nếu nó có dạng  $x = 3 \cdot 2^n - 1$ , trong đó  $n$  là một số nguyên không âm nào đó. Một nửa nhóm số được gọi là nửa nhóm số Thabit nếu tồn tại một số nguyên không âm  $n$  sao cho nửa nhóm số đó sinh bởi các số Thabit dạng  $3 \cdot 2^{n+i} - 1$  với  $i \in \mathbb{N}$ . Nửa nhóm số Thabit liên kết với  $n$  được ký hiệu là  $T(n)$ . Vậy

$$T(n) = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle.$$

Trong [4], J.C. Rosales, M.B. Branco và D. Torrão đã nghiên cứu về nửa nhóm số Thabit. Họ đã chỉ ra hệ sinh tối tiểu, chiều nhúng, tập Apéry, số Frobenius, tập số giả Frobenius, kiểu và giống của nửa nhóm số Thabit  $T(n)$ . Trong chương này chúng tôi trình bày về nửa nhóm số Thabit dựa vào [4] và [5].

## **2.1 Nửa nhóm số Thabit và chiều nhúng của nửa nhóm số Thabit**

Cho  $n$  là một số nguyên không âm. Khi đó

$$T(n) = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$$

là một vị nhóm con của  $(\mathbb{N}, +)$ . Hơn nữa

$$\{3 \cdot 2^n - 1, 3 \cdot 2^{n+1} - 1\} \subseteq T(n)$$

và

$$\gcd\{3 \cdot 2^n - 1, 3 \cdot 2^{n+1} - 1\} = \gcd\{3 \cdot 2^n - 1, 2 \cdot (3 \cdot 2^n - 1) + 1\} = 1.$$

Do đó  $\gcd(T(n)) = 1$  và vì vậy theo Mệnh đề 1.1.2 ta có  $T(n)$  là một nửa nhóm số.

**2.1.1 Định nghĩa.** Một nửa nhóm số  $S$  được gọi là *nửa nhóm số Thabit* nếu tồn tại  $n \in \mathbb{N}$  sao cho  $S = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$ .

Cho  $n$  là một số nguyên không âm, ta sẽ ký hiệu  $T(n)$  là nửa nhóm số Thabit liên kết với  $n$ , hay:

$$T(n) = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle.$$

**2.1.2 Bổ đề.** Cho  $A$  là một tập khác rỗng các số nguyên dương và  $M = \langle A \rangle$  là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên  $\mathbb{N}$  sinh bởi  $A$ . Các điều kiện sau là tương đương:

- (1).  $2a + 1 \in M$  với mọi  $a \in A$ ;
- (2).  $2m + 1 \in M$  với mọi  $m \in M \setminus \{0\}$ .

*Chứng minh.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Nếu  $m \in M \setminus \{0\}$  thì tồn tại  $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$  sao cho  $m = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ . Nếu  $k = 1$  thì  $m = a_1$  và do đó có  $2m + 1 = 2a_1 + 1 \in M$ . Nếu  $k \geq 2$ , thì  $2m + 1 = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}) + 2a_k + 1 \in M$  do  $M$  đóng kín với phép cộng.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Hiển nhiên.

□

Mệnh đề tiếp theo là một kết quả quan trọng, nó như chìa khóa để chứng minh các kết quả về nửa nhóm số Thabit.

**2.1.3 Mệnh đề.** Nếu  $n$  là số nguyên không âm thì  $2t + 1 \in T(n)$  với mọi  $t \in T(n) \setminus \{0\}$ .

*Chứng minh.* Cho  $n \in \mathbb{N}$  và  $T(n) = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$ . Rõ ràng

$$2 \cdot (3 \cdot 2^{n+i} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{n+i+1} - 1 \in T(n).$$

Từ Bổ đề 2.1.2, ta có  $2t + 1 \in T(n)$  với mọi  $t \in T(n) \setminus \{0\}$ .

□

Mục tiêu của phần này là chỉ ra hệ sinh tối tiểu của nửa nhóm số Thabit. Để làm được điều này, chúng ta cần các bổ đề sau đây.

**2.1.4 Bổ đề.** Cho  $n$  là một số nguyên không âm và

$$S = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, 2, \dots, n+1\}\} \rangle.$$

Khi đó  $2s + 1 \in S$  với mọi  $s \in S \setminus \{0\}$ .

*Chứng minh.* Nếu  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n+1\}$  thì

$$2(3 \cdot 2^{n+i} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{n+i+1} - 1 \in S$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} 2(3 \cdot 2^{2n+1} - 1) + 1 &= 3 \cdot 2^{2n+2} - 1 \\ &= (3 \cdot 2^n - 1)^2 + (3 \cdot 2^{n+1} - 1) + (3 \cdot 2^{2n} - 1) \in S \end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề 2.1.2, ta được điều phải chứng minh.

□

Kết quả tiếp theo cho ta một hệ sinh của nửa nhóm số Thabit  $T(n)$ .

**2.1.5 Bổ đề.** Nếu  $n$  là số một nguyên không âm thì

$$T(n) = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n+1\}\} \rangle.$$

*Chứng minh.* Cho  $S = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n+1\}\} \rangle$ . Ta cần chứng minh  $T(n) = S$ .

Rõ ràng là  $S \subseteq T(n)$ . Để chứng minh bao hàm ngược lại, ta cần chứng minh rằng  $3 \cdot 2^{n+i} - 1 \in S$  với mọi  $i \in \mathbb{N}$ . Sử dụng quy nạp đối với  $i$ .

Với  $i = 0$ , khẳng định là hiển nhiên đúng. Giả sử, khẳng định đúng với  $i$  và ta chứng minh nó đúng với  $i + 1$ . Vì

$$3.2^{n+i+1} - 1 = 2(3.2^{n+i} - 1) + 1$$

nên theo giả thiết quy nạp và Bổ đề 2.1.4, ta nhận được  $3.2^{n+i+1} - 1 \in S$ .

Do đó  $T(n) = S$  và bổ đề được chứng minh.  $\square$

Bổ đề tiếp theo chỉ ra rằng  $3.2^{2n+1} - 1$  không nằm trong hệ sinh tối tiểu của  $T(n)$ .

**2.1.6 Bổ đề.** *Nếu  $n$  là số nguyên không âm, thì*

$$3.2^{2n+1} - 1 \notin \langle \{3.2^{n+i} - 1 | i \in \{0, 1, \dots, n\}\} \rangle.$$

*Chứng minh.* Giả sử

$$3.2^{2n+1} - 1 \in \langle \{3.2^{n+i} - 1 | i \in \{0, 1, \dots, n\}\} \rangle.$$

Khi đó, tồn tại  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  sao cho

$$\begin{aligned} 3.2^{2n+1} - 1 &= a_0 (3.2^n - 1) + \dots + a_n (3.2^{2n} - 1) \\ &= 3 (a_0.2^n + \dots + a_n.2^{2n}) - (a_0 + \dots + a_n), \end{aligned}$$

do đó

$$(a_0 + \dots + a_n) \equiv 1 \pmod{3.2^n}.$$

Ta suy ra

$$(a_0 + \dots + a_n) = 1 + k.3.2^n, \text{ với } k \in \mathbb{N}.$$

Ngoài ra, rõ ràng là  $k \neq 0$  và do đó

$$a_0 + \dots + a_n \geq 1 + 3.2^n.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} a_0 (3.2^n - 1) + \dots + a_n (3.2^{2n} - 1) &\geq (a_0 + \dots + a_n) (3.2^n - 1) \\ &\geq (1 + 3.2^n) (3.2^n - 1) \\ &= 9.2^{2n} - 1 \\ &> 3.2^{2n+1} - 1. \end{aligned}$$



điều này là vô lý. Vậy bổ đề được chứng minh.  $\square$

Định lý sau đây là kết quả chính trong phần này, chỉ ra hệ sinh tối tiểu của nửa nhóm số Thabit và do đó cũng cho ta thông tin về chiều nhúng của nó.

**2.1.7 Định lý.** *Cho  $n$  là một số nguyên không âm và  $T(n)$  là nửa nhóm số Thabit liên kết với  $n$ . Khi đó*

$$\{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n+1\}\}$$

*là hệ sinh tối tiểu của  $T(n)$  và vì vậy  $e(T(n)) = n+2$ .*

*Chứng minh.* Theo Bổ đề 2.1.5,

$$\{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n+1\}\}$$

là một hệ sinh của  $T(n)$ . Nếu nó không phải hệ sinh tối tiểu của  $T(n)$  thì tồn tại  $h \in \{1, \dots, n+1\}$  sao cho

$$3 \cdot 2^{n+h} - 1 \in \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, h-1\}\} \rangle.$$

Giả sử rằng

$$S = \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, h-1\}\} \rangle.$$

Nếu  $i \in \{0, 1, \dots, h-2\}$  thì

$$2(3 \cdot 2^{n+i} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{n+i+1} - 1 \in S.$$

Hơn nữa, ta có

$$2(3 \cdot 2^{n+h-1} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{n+h} - 1 \in S.$$

Do đó, áp dụng Bổ đề 2.1.2, ta thu được  $2s+1 \in S$  với mọi  $s \in S \setminus \{0\}$ .

Bây giờ, ta sử dụng quy nạp theo  $i$  để chứng minh rằng  $3 \cdot 2^{n+i} - 1 \in S$  với mọi  $i \in \mathbb{N}$ . Với  $i = 0$ , khẳng định là hiển nhiên đúng. Giả sử khẳng định đúng với  $i$ , chúng ta sẽ chứng minh điều đó đúng với  $i + 1$ . Ta có

$$3 \cdot 2^{n+i+1} - 1 = 2(3 \cdot 2^{n+i} - 1) + 1.$$

Từ giả thiết quy nạp ta có  $3 \cdot 2^{n+i} - 1 \in S$  nên cuối cùng ta nhận được  $3 \cdot 2^{n+i+1} - 1 \in S$ . Đặc biệt, ta thu được

$$3 \cdot 2^{2n+1} - 1 \in S \subseteq \langle \{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n\}\} \rangle.$$

Điều này là mâu thuẫn với Bổ đề 2.1.6. Vì vậy giả sử

$$\{3 \cdot 2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n+1\}\}$$

không phải là hệ sinh tối tiểu là sai. Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Các kết quả trong phần này đã chỉ ra rằng, với mỗi số nguyên  $k \geq 2$ , tồn tại duy nhất một nửa nhóm số Thabit  $T(n)$  với chiều nhúng  $k$  (với  $n = k - 2$ ). Chẳng hạn với  $k = 4$ , tồn tại duy nhất nửa nhóm số Thabit

$$T(2) = \langle \{3 \cdot 2^2 - 1, 3 \cdot 2^3 - 1, 3 \cdot 2^4 - 1, 3 \cdot 2^5 - 1\} \rangle = \langle \{11, 23, 47, 95\} \rangle$$

với chiều nhúng bằng 4.

## 2.2 Tập Apéry và số Frobenius của nửa nhóm số Thabit

Như ta đã biết, thông tin về tập Apéry của một nửa nhóm số sẽ cho ta biết thông tin về nửa nhóm số đó. Do đó, mục đích của phần này là mô tả tường minh về các phần tử trong tập Apéry  $\text{Ap}(T(n), 3 \cdot 2^n - 1)$  của nửa nhóm số Thabit  $T(n)$ . Từ bây giờ ta sẽ ký hiệu  $s_i$  thay cho  $3 \cdot 2^{n+i} - 1$  với mỗi  $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ . Do đó, với ký hiệu này, chúng ta có  $\{s_0, s_1, \dots, s_{n+1}\}$  là hệ sinh tối tiểu của  $T(n)$ .

**2.2.1 Bổ đề.** Cho  $n$  là một số nguyên không âm. Khi đó

- (1) Nếu  $0 < i \leq j < n + 1$  thì  $s_i + 2s_j = 2s_{i-1} + s_{j+1}$ ;
- (2) Nếu  $0 < i \leq n + 1$  thì  $s_i + 2s_{n+1} = 2s_{i-1} + s_0^2 + s_1 + s_n$ .

*Chứng minh.* (1) Nếu  $0 < i \leq j < n + 1$  thì ta có:

$$\begin{aligned} s_i + 2s_j &= 3 \cdot 2^{n+i} - 1 + 2(3 \cdot 2^{n+j} - 1) \\ &= 2(3 \cdot 2^{n+i-1} - 1) + 3 \cdot 2^{n+j+1} - 1 \\ &= 2s_{i-1} + s_{j+1}. \end{aligned}$$

(2) Nếu  $0 < i \leq n + 1$  thì ta có:

$$\begin{aligned} s_i + 2s_{n+1} &= 3 \cdot 2^{n+i} - 1 + 2(3 \cdot 2^{2n+1} - 1) \\ &= 3 \cdot 2^{n+i} - 2 + 3 \cdot 2^{2n+2} - 1 \\ &= 2(3 \cdot 2^{2n+i-1} - 1) + (3 \cdot 2^n - 1)^2 + (3 \cdot 2^{n+1} - 1) + (3 \cdot 2^{2n} - 1) \\ &= 2s_{i-1} + s_0^2 + s_1 + s_n. \end{aligned}$$

□

Ký hiệu  $A(n)$  là tập hợp các bộ  $n + 1$  số  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$  sao cho  $a_i \in \{0, 1, 2\}$  với mọi  $i$  và thỏa mãn điều kiện: nếu  $1 \leq i < j \leq n + 1$  và  $a_j = 2$  thì  $a_i = 0$ .

**2.2.2 Bổ đề.** Cho  $n \in \mathbb{N}$  và  $T(n)$  là nửa nhóm số Thabit có hệ sinh tối thiểu là  $\{s_0, s_1, \dots, s_{n+1}\}$ . Khi đó

$$\text{Ap}(T(n), s_0) \subseteq \{a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \mid (a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in A(n)\}.$$

*Chứng minh.* Cho  $x \in \text{Ap}(T(n), s_0)$ . Chúng ta sử dụng quy nạp theo  $x$  để chứng minh rằng

$$x = a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1},$$

với  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in A(n)$ .

Với  $x = 0$  thì  $x = 0 \cdot s_1 + \dots + 0 \cdot s_{n+1}$  nên khẳng định hiển nhiên đúng.

Giả sử với  $x > 0$  và

$$j = \min \{i \in \{0, \dots, n + 1\} \mid x - s_i \in T(n)\}.$$

Vì  $x \in \text{Ap}(T(n), s_0)$  nên  $j \neq 0$  và  $x - s_j \in \text{Ap}(T(n), s_0)$ . Theo giả thiết quy nạp, tồn tại  $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in A(n)$  sao cho

$$x - s_j = a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1}.$$

Do đó

$$x = a_1 s_1 + \dots + (a_j + 1) s_j + \dots + a_{n+1} s_{n+1}.$$

Để kết thúc chứng minh, ta chỉ cần kiểm chứng rằng

$$(a_1, \dots, a_j + 1, \dots, a_{n+1}) \in A(n).$$

Để chứng minh mọi số trong dãy  $(a_1, \dots, a_j + 1, \dots, a_{n+1})$  đều thuộc tập hợp  $\{0, 1, 2\}$ , ta chỉ cần chứng minh  $a_j + 1 \neq 3$ . Thật vậy, giả sử rằng  $a_j + 1 = 3$ . Sử dụng Bổ đề 2.2.1, ta phân biệt hai trường hợp tùy thuộc vào giá trị của  $j$ :

- Nếu  $j < n + 1$  thì  $(a_j + 1) s_j = 3s_j = 2s_{j-1} + s_{j+1}$ ;
- Nếu  $j = n + 1$  thì  $(a_j + 1) s_j = 3s_j = 2s_{j-1} + s_0^2 + s_1 + s_n$ .

Trong cả hai trường hợp, chúng ta đều suy ra rằng  $x - s_{j-1} \in T(n)$ , điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của  $j$ .

Từ tính nhỏ nhất của  $j$  chúng ta có  $a_i = 0$  với  $1 \leq i < j$ . Điều đó cho chúng ta thấy rằng không tồn tại  $k > j$  mà  $a_k = 2$ . Thật vậy, giả sử ngược lại  $a_k = 2$ , dùng Bổ đề 2.2.1 ta có:

- Nếu  $k < n + 1$  thì  $s_j + 2s_k = 2s_{j-1} + s_{k+1}$ ;
- Nếu  $k = n + 1$  thì  $s_j + 2s_k = 2s_{j-1} + s_0^2 + s_1 + s_n$ .

Trong cả hai trường hợp, chúng ta đều có  $x - s_{j-1} \in T(n)$ , điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của  $j$ .

Vì thế,  $(a_1, \dots, a_j + 1, \dots, a_{n+1}) \in A(n)$ . Và bổ đề được chứng minh. □

Chúng ta sẽ thấy trong ví dụ sau đây rằng dấu đẳng thức trong Bổ đề 2.2.2 không đúng trong trường hợp tổng quát.

**2.2.3 Ví dụ.**  $T(1) = \langle \{5, 11, 23\} \rangle$  và  $\text{Ap}(T(1), 5) = \{0, 11, 22, 23, 34\}$

Ta có

$A(1) = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$ ,  $s_1 = 11, s_2 = 23$   
và do đó

$$\{a_1 s_1 + a_2 s_2 \mid (a_1, a_2) \in A(1)\} = \{0, 23, 46, 11, 34, 22, 45\}.$$

Như vậy

$$\text{Ap}(T(1), 5) \neq \{a_1 s_1 + a_2 s_2 \mid (a_1, a_2) \in A(1)\}.$$

Để có được kết quả gần với  $\text{Ap}(S, n)$  hơn, ta tìm tập con  $R(n)$  của  $A(n)$  sao cho trong Bổ đề 2.2.2 ta được đẳng thức khi thay  $A(n)$  bởi  $R(n)$ .

**2.2.4 Bổ đề.** Với những ký hiệu như trên và  $n \in \mathbb{N}$ , nếu  $x \in T(n)$  và  $x \not\equiv 0 \pmod{s_0}$  thì  $x - 1 \in T(n)$ .

*Chứng minh.* Nếu  $x \in T(n)$  thì tồn tại  $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{N}$  sao cho

$$x = a_0 s_0 + \dots + a_{n+1} s_{n+1}.$$

Mặt khác, nếu  $x \not\equiv 0 \pmod{s_0}$  thì tồn tại  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  sao cho  $a_i \neq 0$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} x - 1 &= a_0 s_0 + \dots + (a_i - 1) s_i + \dots + a_{n+1} s_{n+1} + 3 \cdot 2^{n+i} - 2 \\ &= a_0 s_0 + \dots + (a_i - 1) s_i + \dots + a_{n+1} s_{n+1} + 2 (3 \cdot 2^{n+i-1} - 1) \\ &= a_0 s_0 + \dots + (a_{i-1} + 2) s_{i-1} + (a_i - 1) s_i + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \in T(n) \end{aligned}$$

□

Kết quả tiếp theo cho thấy rằng nếu

$$\text{Ap}(T(n), s_0) = \{w(0), w(1), \dots, w(s_0 - 1)\}$$

thì  $w(0) < w(1) < \dots < w(s_0 - 1)$ .

**2.2.5 Bổ đề.** Cho  $n \in \mathbb{N}$  và gọi  $w(i)$  là phần tử nhỏ nhất của  $T(n)$  đồng dư với  $i$  theo môđun  $s_0$  với mọi  $i \in \{0, 1, \dots, s_0 - 1\}$ . Khi đó

$$w(0) < w(1) < \dots < w(s_0 - 1).$$

*Chứng minh.* Ta chứng minh rằng  $w(i) < w(i+1)$  với mọi  $i \in \{0, 1, \dots, s_0 - 2\}$ . Thật vậy, vì  $w(i+1) \in T(n)$  và  $w(i+1) \not\equiv 0 \pmod{s_0}$ , ta có  $w(i+1) - 1 \in T(n)$  theo Bổ đề 2.2.4. Như vậy  $w(i+1) - 1 \equiv i \pmod{s_0}$ , ta có thể suy ra rằng  $w(i) \leq w(i+1) - 1$ .

□

Từ bổ đề trên, ta có  $w(s_0 - 1) = \max(\text{Ap}(T(n), s_0))$ .

**2.2.6 Bổ đề.** Vẫn sử dụng các ký hiệu như trên, nếu  $n \in \mathbb{N}$  thì

$$\max(\text{Ap}(T(n), s_0)) \leq s_n + s_{n+1}.$$

*Chứng minh.* Vì

$$\begin{aligned} s_n + s_{n+1} &= 3 \cdot 2^{2n} - 1 + 3 \cdot 2^{2n+1} - 1 \\ &= 2^n (3 \cdot 2^n - 1) + (2^n - 1) + 2^{n+1} (3 \cdot 2^n - 1) + (2^{n+1} - 1) \\ &= (2^n + 2^{n+1}) s_0 + 2^n - 1 + 2^{n+1} - 1 \\ &= (2^n + 2^{n+1}) s_0 + s_0 - 1 \end{aligned}$$

nên chúng ta có thể kết luận rằng  $s_n + s_{n+1} \equiv s_0 - 1 \pmod{s_0}$ . Do đó  $w(s_0 - 1) \leq s_n + s_{n+1}$  và theo Bổ đề 2.2.5, ta có điều cần phải chứng minh.

□

Từ Bổ đề 2.2.6, chúng ta thu được kết quả sau.

**2.2.7 Bổ đề.** Với các ký hiệu như trên, nếu  $n \in \mathbb{N}$  thì

- (1)  $2s_{n+1} \notin \text{Ap}(T(n), s_0)$ ;
- (2)  $s_n + s_{n+1} + s_i \notin \text{Ap}(T(n), s_0)$  với mọi  $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ .

Từ đây, ta sẽ giả thiết  $n$  là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 1 và ký hiệu  $R(n)$  là tập hợp các dãy  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in A(n)$  thỏa mãn các điều kiện sau:

1.  $a_{n+1} \in \{0, 1\}$ ;
2. Nếu  $a_n = 2$  thì  $a_{n+1} = 0$ ;
3. Nếu  $1 \leq i < n$  và  $a_n = a_{n+1} = 1$  thì  $a_i = 0$ .

Mục tiêu của phần này là chứng minh rằng

$$\text{Ap}(T(n), s_0) = \{a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \mid (a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n)\}.$$

**2.2.8 Nhận xét.** Chú ý rằng nếu  $n \geq 2$  thì  $R(n)$  là tập tất cả các dãy  $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in A(n)$  thỏa mãn các điều kiện sau:

- (1)  $(a_1, \dots, a_{n+1}) \neq (0, \dots, 0, 2)$ ;
- (2)  $(a_1, \dots, a_{n+1}) \neq (0, \dots, 2, 1)$ ;
- (3) Nếu  $a_n = a_{n+1} = 1$  thì  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ .

**2.2.9 Bổ đề.** Sử dụng các ký hiệu trên đây, nếu  $n$  là một số nguyên dương thì  $\#R(n) = 3 \cdot 2^n - 1$  (trong đó  $\#X$  là lực lượng của tập hợp  $X$ ).

*Chứng minh.* Ta xét hai trường hợp sau đây

1) Nếu  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in R(n)$  và  $2 \notin \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$  thì  $a_i \in \{0, 1\}$  với mọi  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  và hơn nữa  $a_n = a_{n+1} = 0$  hoặc  $a_n = 0$  và  $a_{n+1} = 1$  hoặc  $a_n = 1$  và  $a_{n+1} = 0$  hoặc  $(a_1, \dots, a_{n+1}) = (0, \dots, 0, 1, 1)$ . Từ đó ta có

$$\#(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid 2 \notin \{a_1, \dots, a_{n+1}\} = 3 \cdot 2^{n-1} + 1.$$

2) Nếu  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in R(n)$  và  $2 \in \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$  thì tồn tại duy nhất  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sao cho  $a_i = 2$ . Ngoài ra, nếu  $i = n$  thì  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = (0, \dots, 0, 2, 0)$ . Mặt khác, nếu  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  thì  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ ,  $a_{i+1}, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1\}$  và  $a_n = a_{n+1} = 0$  hoặc  $a_n = 0$  và  $a_{n+1} = 1$  hoặc  $a_n = 1$  và  $a_{n+1} = 0$ . Do đó

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid 2 \in \{a_1, \dots, a_{n+1}\}\} = 3 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} + 1.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
 \#R(n) &= 3.2^{n-1} + 1 + 3 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} + 1 \\
 &= 3.2^{n-1} + 1 + 3(2^{n-1} - 1) + 1 \\
 &= 6.2^{n-1} - 1 \\
 &= 3.2^n - 1.
 \end{aligned}$$

□

Kết quả chính của phần này là định lý sau đây

**2.2.10 Định lý.** *Cho  $n$  là một số nguyên dương và  $T(n)$  là nửa nhóm số Thabit với hệ sinh tối thiểu là  $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ . Khi đó*

$$\text{Ap}(T(n), s_0) = \{a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \mid (a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n)\}.$$

*Chứng minh.* Từ Bổ đề 2.2.2 và Bổ đề 2.2.7, ta có

$$\text{Ap}(T(n), s_0) \subseteq \{a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \mid (a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n)\}.$$

Sử dụng Mệnh đề 1.2.3 và Bổ đề 2.2.9, ta có

$$\begin{aligned}
 \#\{a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \mid (a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n)\} &\leq \#R(n) \\
 &= 3.2^n - 1 \\
 &= s_0 \\
 &= \#\text{Ap}(T(n), s_0).
 \end{aligned}$$

Do đó

$$\text{Ap}(T(n), s_0) = \{a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \mid (a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n)\}.$$

□

Từ chứng minh của định lý trên, chúng ta có ngay hệ quả sau:

**2.2.11 Hệ quả.** *Với giả thiết và các ký hiệu như trên, nếu*

$$(a_1, \dots, a_{n+1}), (b_1, \dots, b_{n+1}) \in R(n) \text{ và } (a_1, \dots, a_{n+1}) \neq (b_1, \dots, b_{n+1})$$



thì ta có:

$$a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \neq b_1 s_1 + \dots + b_{n+1} s_{n+1}.$$

Theo Nhận xét 2.2.8, vì  $(0, 0, \dots, 1, 1) \in R(n)$  nên nếu  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  thì  $s_n + s_{n+1} \in \text{Ap}(T(n), s_0)$ . Sử dụng Bổ đề 2.2.6, ta có

$$\max \text{Ap}(T(n), s_0) = s_n + s_{n+1}.$$

Bây giờ, dựa vào Bổ đề 1.4.2, chúng ta thu được kết quả sau, đây là công thức tính số Frobenius của nửa nhóm số Thabit.

**2.2.12 Hệ quả.** Với ký hiệu như trên, nếu  $n$  là một số nguyên dương thì

$$F(T(n)) = s_n + s_{n+1} - s_0 = 9 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^n - 1.$$

Chúng ta minh họa một số kết quả trên bằng ví dụ sau đây.

**2.2.13 Ví dụ.** Xét hai nửa nhóm số

- Cho  $T(1) = \langle \{5, 11, 23\} \rangle$ . Từ Hệ quả 2.2.12, ta có

$$F(T(1)) = 11 + 23 - 5 = 29.$$

Ta có

$$R(1) = \{(0; 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$$

và do đó, theo Định lý 2.2.10,

$$\text{Ap}(T(1), 5) = \{0, 23, 11, 34, 22\}.$$

- Cho  $T(2) = \langle \{11, 23, 47, 95\} \rangle$ . Sử dụng Hệ quả 2.2.12, ta có

$$F(T(2)) = 95 + 47 - 11 = 131.$$

Dễ thấy

$$R(2) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), \\ (1, 1, 0), (2, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$$

Do đó

$$\text{Ap}(T(2), 11) = \{0, 95, 47, 142, 94, 23, 118, 70, 46, 141, 93\}.$$

Giả sử  $S$  là một nửa nhóm số,  $x$  là một phần tử khác 0 của  $S$  và

$$\text{Ap}(S, x) = \{w(0), w(1), \dots, w(x-1)\}$$

trong đó  $w(i)$  là phần tử nhỏ nhất của  $S$  đồng dư với  $i$  theo môđun  $n$ . Khi đó, một số nguyên  $z$  thuộc  $S$  nếu và chỉ nếu  $z \geq w(z \bmod x)$  (trong đó  $z \bmod x$  là số dư trong phép chia  $z$  cho  $x$ ).

Đối với  $T(2)$ , ta có

$$\text{Ap}(T(2), 11) = \{w(0) = 0, w(1) = 23, w(2) = 46, w(3) = 47, w(4) = 70,$$

$$w(5) = 93, w(6) = 94, w(7) = 95, w(8) = 118, w(9) = 141, w(10) = 142\}.$$

Do đó, ta có chẳng hạn  $129 \in T(n)$  và  $119 \notin T(n)$  vì

$$129 \geq w(129 \bmod 11) = w(8) = 118$$

và

$$119 < w(119 \bmod 11) = w(9) = 141.$$

## 2.3 Số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số Thabit

Chú ý rằng nếu  $w, w' \in \text{Ap}(S, x)$  thì  $w' - w \in S$  nếu và chỉ nếu  $w' - w \in \text{Ap}(S, x)$ . Do đó

$$\text{maximals} \leq_s \text{Ap}(S, x) = \{w \in \text{Ap}(S, x) \mid w' - w \notin \text{Ap}(S, x) \setminus \{0\},$$

$$\forall w' \in \text{Ap}(S, x)\}$$

Vì vậy, ta có

$$\text{maximals} \leq_{T(1)} (\text{Ap}(T(1), 5)) = \{22, 34\} \text{ (xem Ví dụ 2.2.3).}$$

Từ Mệnh đề 1.5.4, ta có  $PF(T(1)) = \{17, 29\}$  và vì vậy  $t(T(1)) = 2$ .

Cho  $n$  là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2. Dễ thấy rằng các phần tử cực đại trong  $R(n)$  (đối với quan hệ thứ tự tích) là

$$(2, 1, \dots, 1, 0), (0, 2, 1, \dots, 1, 0), \dots, (0, \dots, 0, 2, 1, 0), (0, \dots, 0, 2, 0) \\ (2, 1, \dots, 1, 0, 1), (0, 2, 1, \dots, 1, 0, 1), \dots, (0, \dots, 0, 2, 0, 1), (0, \dots, 0, 1, 1).$$

Hơn nữa, vì  $2s_i + 1 = s_{i+1}$  với mọi  $i \in \{1, \dots, n\}$ , ta có

$$\{a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \mid (a_1, \dots, a_{n+1}) \\ \in \{(2, 1, \dots, 1, 0), (0, 2, 1, \dots, 1, 0), \dots, (0, \dots, 0, 2, 1, 0), (0, \dots, 0, 2, 0)\}\} \\ = \{2s_n - (n - 1), \dots, 2s_n - 1, 2s_n\}$$

và

$$\{(a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1}) \mid (a_1, \dots, a_{n+1}) \\ \in \{(2, 1, \dots, 1, 0, 1), (0, 2, 1, \dots, 1, 0, 1), \dots, (0, \dots, 0, 2, 0, 1), (0, \dots, 0, 1, 1)\}\} \\ = \{s_n + s_{n+1} - (n - 1), \dots, s_n + s_{n+1} - 1, s_n + s_{n+1}\}.$$

Như một hệ quả của Định lý 2.2.10, ta có phát biểu sau.

**2.3.1 Bổ đề.** *Nếu  $n$  là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 thì*

$$\text{maximals}_{\leq T(n)}(\text{Ap}(T(n), s_0)) = \text{maximals}_{\leq T(n)}\{2s_n, 2s_n - 1, \dots, \\ 2s_n - (n - 1), s_n + s_{n+1}, s_n + s_{n+1} - 1, \dots, s_n + s_{n+1} - (n - 1)\}.$$

Định lý sau đây là kết quả chính của phần này.

**2.3.2 Định lý.** *Cho  $n$  là số một nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 và  $T(n)$  là nửa nhóm số Thabit liên kết với  $n$ . Khi đó*

$$\text{maximals}_{\leq T(n)}(\text{Ap}(T(n), s_0)) \\ = \{2s_n - (n - 1), s_n + s_{n+1}, s_n + s_{n+1} - 1, \dots, s_n + s_{n+1} - (n - 1)\}.$$

*Chứng minh.* Cho  $i \in \{0, \dots, n - 2\}$ . Khi đó

$$s_n + s_{n+1} - (i + 1) - (2s_n - i) = s_n + s_{n+1} - (2s_n + 1) \\ = s_n + s_{n+1} - s_{n+1} \\ = s_n$$

và do đó ta có

$$(2s_n - i) \leq_{T(n)} s_n + s_{n+1} - (i + 1).$$

Từ Bổ đề 2.3.1, ta suy ra

$$\begin{aligned} & \text{maximals} \leq_{T(n)} (\text{Ap}(T(n), s_0)) \\ &= \text{maximals} \leq_{T(n)} \{2s_n - (n-1), s_n + s_{n+1}, s_n + s_{n+1} - 1, \dots, s_n + s_{n+1} - (n-1)\}. \end{aligned}$$

Vì

$$2s_n - (n-1) < s_n + s_{n+1} - (n-1)$$

nên

$$s_n + s_{n+1} - (n-1), \dots, s_n + s_{n+1} - 1, s_n + s_{n+1}$$

là  $n$  số nguyên dương liên tiếp và  $n < 3 \cdot 2^n - 1$ . Do đó

$$\{s_n + s_{n+1} - (n-1), \dots, s_n + s_{n+1} - 1, s_n + s_{n+1}\} \subseteq \text{maximals} \leq_{T(n)} (\text{Ap}(T(n), s_0)).$$

Cuối cùng, ta chứng tỏ rằng  $s_n + s_{n+1} - i - (2s_n - (n-1)) \notin T(n)$  với mọi  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , hoặc nói một cách tương đương là  $s_n + n - i \notin T(n)$  với mọi  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  sao cho  $s_n + n - i \in T(n)$ . Vì

$$s_n + n - i = 3 \cdot 2^{2n} - 1 + n - i = 2^n (3 \cdot 2^n - 1) + 2^n - 1 + n - i$$

và

$$1 \leq 2^n - 1 + n - i < 3 \cdot 2^n - 1,$$

từ Bổ đề 2.2.4, ta suy ra  $s_{n+1} \in T(n)$ . Khi đó tồn tại  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$  sao cho  $s_n + 1 = a_0 s_0 + \dots + a_{n-1} s_{n-1}$ .

Do  $s_n + 1 \not\equiv 0 \pmod{s_0}$ , nên tồn tại  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  sao cho  $a_j \neq 0$ . Do đó

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 s_0 + \dots + (a_j - 1) s_j + \dots + a_{n-1} s_{n-1} + 3 \cdot 2^{n+j} - 2 \\ &= a_0 s_0 + \dots + (a_j - 1) s_j + \dots + a_{n-1} s_{n-1} + 2 (3 \cdot 2^{n+j-2} - 1) \end{aligned}$$

$$= a_0 s_0 + \dots + (a_j - 1) s_j + \dots + a_{n-1} s_{n-1} + 2s_{j-1}.$$

Vì vậy  $s_n \in \langle \{s_0, \dots, s_{n-1}\} \rangle$ , điều này mâu thuẫn với Định lý 2.1.7.

Định lý được chứng minh.  $\square$

Bằng cách áp dụng Mệnh đề 1.5.4 và Hệ quả 2.2.12, ta thu được kết quả sau, chỉ ra tập các số giả Frobenius và kiểu của nửa nhóm số Thabit.

**2.3.3 Hệ quả.** *Cho  $n$  là số một số nguyên dương và  $T(n)$  là nửa nhóm số Thabit liên kết với  $n$ . Khi đó ta có:*

$$PF(T(n)) = \{F(T(n)) - i \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\} \cup \{2s_n - s_0 - (n-1)\}$$

$$\text{và } t(T(n)) = n + 1.$$

**2.3.4 Ví dụ.** Cho  $T(2) = \langle \{11, 23, 47, 95\} \rangle$ .

Từ Hệ quả 2.3.3, ta có  $F(T(2)) = 95 + 47 - 11 = 131$ . Hơn nữa,

$$2s_n - s_0 - (n-1) = 2.47 - 11 - 1 = 82.$$

Bằng cách áp dụng Hệ quả 2.3.3, ta nhận được

$$PF(T(2)) = \{131, 130, 82\}.$$

## 2.4 Giống của nửa nhóm số Thabit

Để chứng minh công thức tính giống của nửa nhóm số Thabit, chúng ta cần các bổ đề sau.

**2.4.1 Bổ đề.** *Cho  $n$  là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 và  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ .*

*Khi đó ta có*

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_i = 2\} = \begin{cases} 3.2^{n-i-1} & \text{khi } i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ 1 & \text{khi } i = n, \\ 0 & \text{khi } i = n+1. \end{cases}$$

*Chứng minh.* Nếu  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n)$  và  $a_i = 2$ , khi đó ta có  $a_1 = a_2 = \dots = a_{i-1} = 0$ ,  $a_{i+1}, \dots, a_{n+1} \in \{0, 1\}$  và hơn nữa  $a_n = 0$  hoặc  $a_{n+1} = 0$ . Từ đó ta có

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_i = 2\} = 3 \cdot 2^{n-i-1}.$$

Mặt khác, rõ ràng là

$$\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_n = 2\} = \{(0, \dots, 0, 2, 0)\}$$

và

$$\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_{n+1} = 2\} = \emptyset.$$

□

**2.4.2 Bổ đề.** Cho  $n$  là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 và  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} & \#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_i = 1\} \\ &= \begin{cases} 3(2^{n-1} - 2^{n-i-1}) & \text{khi } i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ 2^n & \text{khi } i \in \{n, n+1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

*Chứng minh.* Ta xét các trường hợp sau

1) Cho  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Ta chia thành hai trường hợp sau.

1.1) Nếu  $2 \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$  thì  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n+1} \in \{0, 1\}$  và  $a_n = 0$  hoặc  $a_{n+1} = 0$ . Vì vậy

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_i = 1 \text{ và } 2 \notin \{a_1, \dots, a_{n-1}\}\} = 3 \cdot 2^{n-2}.$$

1.2) Nếu  $2 \in \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$  thì  $a_j = 2$  với một chỉ số  $j \in \{1, \dots, i-1\}$  nào đó. Như vậy  $a_1 = \dots = a_{j-1} = 0$ ,  $a_{j+1}, \dots, a_{n+1} \in \{0, 1\}$ ,  $a_i = 1$  và  $a_n = 0$  hoặc  $a_{n+1} = 0$ . Từ đó ta có

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_i = 1 \text{ và } a_j = 2\} = 3 \cdot 2^{n-j-2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_i = 1\} &= 3 \cdot 2^{n-2} + \sum_{j=1}^{i-1} 3 \cdot 2^{n-j-2} \\
&= 3 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-3} + \dots + 3 \cdot 2^{n-i-1} \\
&= 3(2^{n-1} - 2^{n-i-1}).
\end{aligned}$$

2) Cho  $i = n$ . Ta cũng chia thành 2 trường hợp sau.

2.1) Nếu  $2 \notin \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  thì  $a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1} \in \{0, 1\}$ . Ngoài ra nếu  $a_{n+1} = 1$  thì  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ . Do đó

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_n = 1 \text{ và } 2 \notin \{a_1, \dots, a_{n-1}\}\} = 2^{n-1} + 1.$$

2.2) Nếu  $2 \in \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  thì  $a_j = 2$  với một chỉ số  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  nào đó. Trong trường hợp này  $a_1 = \dots = a_{j-1} = 0$ ,  $a_{j+1}, \dots, a_{n+1} \in \{0, 1\}$  và  $a_{n+1} = 0$ . Do đó

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_n = 1 \text{ và } a_j = 2\} = 2^{n-j-1}.$$

Vì vậy ta có

$$\begin{aligned}
\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_n = 1\} &= 2^{n-1} + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{n-j-1} \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^0 + 1 \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

3) Cho  $i = n + 1$ . Ta chia thành hai trường hợp sau đây.

3.1) Nếu  $2 \notin \{a_1, \dots, a_n\}$  thì  $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ . Hơn nữa, nếu  $a_n = 1$  thì  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ . Vì vậy

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_{n+1} = 1 \text{ và } 2 \notin \{a_1, \dots, a_n\}\} = 2^{n-1} + 1.$$

3.2) Bây giờ giả sử rằng  $2 \in \{a_1, \dots, a_n\}$ . Ta suy ra rằng tồn tại  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  sao cho  $a_j = 2$  và do đó  $a_1 = \dots = a_{j-1} = 0$ ,  $a_{j+1}, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1\}$  và  $a_n = 0$  (chú ý rằng trong trường hợp này không tồn tại các phần tử sao cho  $a_n = 2$  và  $a_{n+1} = 1$ ). Do đó

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_{n+1} = 1 \text{ và } a_j = 2\} = 2^{n-j-1}.$$

Vì vậy

$$\#\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n) \mid a_{n+1} = 1\} = 2^{n-1} + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{n-j-1} = 2^n.$$

□

Chúng ta đã sẵn sàng để chứng minh kết quả chính của phần này là định lý sau

**2.4.3 Định lý.** *Cho  $n$  là một số nguyên không âm và  $T(n)$  là nửa nhóm số Thabit liên kết với  $n$ . Khi đó giống của  $T(n)$  là*

$$g(T(n)) = 9 \cdot 2^{2n-1} + (3n - 5)2^{n-1}.$$

*Chứng minh.* Dễ dàng kiểm tra thấy định lý đúng khi  $n \in \{0, 1\}$ .

Bây giờ chúng ta có thể giả sử  $n \geq 2$ . Áp dụng Bổ đề 1.4.2, Định lý 2.2.10 và Hệ quả 2.2.11, ta có

$$g(T(n)) = \frac{1}{s_0} \left( \sum_{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n)} a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \right) - \frac{s_0 - 1}{2}.$$

Rõ ràng

$$\begin{aligned} & \sum_{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n)} a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \\ &= \sum_{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n), a_1=1} s_1 + \sum_{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n), a_1=2} 2s_1 + \dots \\ & \quad \dots + \sum_{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n), a_{n+1}=1} s_{n+1} + \sum_{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n), a_{n+1}=2} 2s_{n+1}. \end{aligned}$$

Bằng cách sử dụng Bổ đề 2.4.1 và Bổ đề 2.4.2, ta nhận được

$$\begin{aligned} & \sum_{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R(n)} a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{n-i-1} 2s_i + 2s_n + \sum_{i=1}^{n-1} 3 \cdot (2^{n-1} - 2^{n-i-1}) s_i + 2^n s_n + 2^n s_{n+1} \\ &= 3 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-1} (3 \cdot 2^{n+i} - 1) + 3 \cdot 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (3 \cdot 2^{n+i} - 1) - 3 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} (3 \cdot 2^{n+i} - 1) \\ & \quad + (2^n + 2) s_n + 2^n s_{n+1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 3 \sum_{i=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{2n} - 3 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i} + 9 \cdot 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n+i} - (n-1)3 \cdot 2^{n-1} - 9 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{2n-1} \\
&\quad + 3 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} + (2^n + 2)s_n + s_{n+1} \\
&= 9(n-1)2^{2n} - 3(2^n - 2) + 9 \cdot 2^{n-1}(2^{2n} - 2^{n+1}) - 3(n-1)2^{n-1} \\
&\quad - 9(n-1)2^{2n-1} + 3(2^{n-1} - 1) + (2^n + 2)(3 \cdot 2^{2n} - 1) + 2^n(3 \cdot 2^{2n+1} - 1) \\
&= 27 \cdot 2^{3n-1} + (9n-15)2^{2n-1} - (3n+4)2^{n-1} + 1 \\
&= (3 \cdot 2^n - 1)(9 \cdot 2^{2n-1} + (3n-2)2^{n-1} - 1).
\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
g(T(n)) &= 9 \cdot 2^{2n-1} + (3n-2)2^{n-1} - 1 - \frac{3 \cdot 2^n - 2}{2} \\
&= 9 \cdot 2^{2n-1} + (3n-5)2^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ sau đây minh họa cho các kết quả quan trọng của chương này.

#### 2.4.4 Ví dụ. Xét nửa nhóm số Thabit $T(3)$ .

Áp dụng Định lý 2.1.7, ta có  $e(T(3)) = 5$  và  $\{23, 47, 95, 191, 383\}$  là hệ sinh tối tiểu của nó.

Từ Hệ quả 2.2.12, ta có  $F(T(3)) = 551$ .

Áp dụng Định lý 2.4.3, ta có  $g(T(3)) = 304$ .

Theo Hệ quả 2.3.3, ta có  $PF(T(3)) = \{551, 550, 549, 357\}$  và  $t(T(3)) = 4$ .

Từ định nghĩa của  $R(n)$  ta có:

$$\begin{aligned}
R(3) = \{ &(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 2, 0), (0, 1, 0, 0), \\
&(0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 0), \\
&(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (2, 0, 0, 0), \\
&(2, 0, 0, 1), (2, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 0) \}
\end{aligned}$$

và theo Định lý 2.2.10, ta có

$$\begin{aligned}
Ap(T(3), 23) = \{ &0, 383, 191, 574, 382, 95, 478, 286, 190, 573, 381, 47, 430, \\
&238, 142, 525, 333, 94, 477, 285, 189, 572, 380 \}.
\end{aligned}$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 2.1.6, xếp theo thứ tự tăng dần, chúng ta có:

$$\begin{aligned}w(0) &= 0, w(1) = 47, w(2) = 94, w(3) = 95, w(4) = 142, w(5) = 189, \\w(6) &= 190, w(7) = 191, w(8) = 238, w(9) = 285, w(10) = 286, \\w(11) &= 333, w(12) = 380, w(13) = 381, w(14) = 382, w(15) = 383, \\w(16) &= 430, w(17) = 477, w(18) = 478, w(19) = 525, w(20) = 572, \\w(21) &= 573, w(22) = 574,\end{aligned}$$

trong đó  $w(i)$  là phần tử nhỏ nhất của  $T(3)$  đồng dư với  $i$  theo môđun 23.

## KẾT LUẬN

Nội dung chính của luận văn là trình bày về nửa nhóm số Thabit dựa vào các tài liệu [4] của J.C. Rosales, M.B. Branco, D. Torrão và [5] của D. Torrão. Cụ thể là chúng tôi đã trình bày được những nội dung sau đây.

1. Hệ sinh tối tiểu và từ đó tính được chiều nhúng của nửa nhóm số Thabit theo  $n$  (Định lý 2.1.7 ).
2. Tập Apéry của nửa nhóm số Thabit, từ đó suy ra công thức tính số Frobenius của nửa nhóm số Thabit (Định lý 2.2.10, Hệ quả 2.2.12).
3. Tập số giả Frobenius và từ đó tính được kiểu của nửa nhóm số Thabit (Định lý 2.3.2, Hệ quả 2.3.3).
4. Công thức tính giống của nửa nhóm số Thabit (Định lý 2.4.3).

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tiếng Việt

- [1] Lương Ngọc Nhật (2017), *Một số bất biến của nửa nhóm số*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.
- [2] Hoàng Thế Toàn (2020), *Về vấn đề số Frobenius cho các nửa nhóm số*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.

### Tiếng Anh

- [3] J.C. Rosales, P.A. García- Sánchez (2009), *Numerical semigroups*, Development in mathematics, **20**, Springer.
- [4] J.C. Rosales, M.B. Branco, D. Torrão (2015), The Frobenius problem for Thabit numerical semigroups, *Journal of Number Theory*.
- [5] Denise Miriam Mendes Torrão (2017), *Combinatory Problems in Numerical Semigroups*, PhD thesis in Mathematics, University of Évora.