BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ THANH MAI

BIỂU DIỄN PHỤ HỢP VÀ ĐỐI PHỤ HỢP CỦA MỘT LỚP ĐẠI SỐ LIE GIẢI ĐƯỢC 7- CHIỀU CÓ CĂN LŨY LINH 5- CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ THANH MAI

BIỂU DIỄN PHỤ HỢP VÀ ĐỐI PHỤ HỢP CỦA MỘT LỚP ĐẠI SỐ LIE GIẢI ĐƯỢC 7- CHIỀU CÓ CĂN LŨY LINH 5- CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 8.46.01.04

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Nguyễn Quốc Thơ

Nghệ An - 2022

Mục lục

Lời cảm ơn

Để hoàn thành chương trình Cao học và viết luận văn, tôi đã nhận được sự dạy dỗ và hướng dẫn nhiệt tình của quý Thầy - Cô trong Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số thuộc Khoa Toán của Trường Sư phạm, Trường Đại học Vinh, sự động viên và giúp đỡ từ gia định và bạn bè.

Trước hết tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới người hướng dẫn khoa học TS. Nguyễn Quốc Thơ, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đắp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn. Nhờ sự hướng dẫn chỉ bảo tận tình của thầy mà luận văn đã được hoàn thành một cách khoa học và đúng tiến độ.

Tác giả xin được cảm ơn quý Thầy - Cô trong Tổ Đại số - Hình học thuộc Khoa Toán của Trường Sư phạm, Trường Đại học Vinh những người đã trực tiếp giảng dạy, truyền thụ kiến thức cho tác giả trong suốt quá trình học cao học.

Tác giả xin được cảm ơn quý Thầy - Cô, đồng nghiệp, bạn bè nơi tác giả đang giảng dạy và công tác đã tạo điều kiện thuận lợi, cổ vũ, động viên và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian tác giả đi học.

Cảm ơn sự hy sinh của gia đình - là niềm tin - là chỗ dựa vững chắc về tinh thần và vật chất để tác giả vượt qua mọi khó khăn, hoàn thành nhiệm vụ học tập của mình.

Nghệ An, ngày 20 tháng 5 năm 2022

Tác giả

Nguyễn Thị Thanh Mai

Lời nói đầu

1. Lý do chọn đề tài

Trong Toán học, *đại số Lie* được đặt tên theo nhà toán học người Na Uy là Marius Sophus Lie (1842 - 1899), là một không gian vectơ $\mathbf{g}$ mà trên đó được trang bị một phép nhân

$$[.,.] : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g}, (x, y) \longmapsto [x, y]$$

(được gọi là *tích Lie* hay *móc Lie*) là toán tử song tuyến tính, phản xứng và thỏa mãn đẳng thức Jacôbi. Mặt khác, một trong những ý tưởng của lý thuyết nhóm Lie là thay thế cấu trúc nhóm toàn cục bởi phiên bản mang tính địa phương của nó hay còn gọi là phiên bản đã được làm tuyến tính hóa mà Marius Sophus Lie gọi đó là nhóm Lie vô cùng bé, sau này người ta cũng gọi đó là *đại số Lie*.

Bài toán nghiên cứu về các đại số Lie tổng quát nói chung và lớp các đại số Lie cụ thể nói riêng là một lĩnh vực nghiên cứu rộng của Toán học, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu và cho thấy nó có nhiều ứng dụng trong các ngành khoa học khác. Ví dụ như sự phân loại các đẳng cấu của các đại số Lie với số chiều thấp là nền tảng và cơ sở ban đầu để hình thành một phương pháp tính các bất biến của đại số Lie bằng cách thay đổi hệ tọa độ.

Phân loại, mô tả biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của nhóm Lie, đại số Lie giải được là một trong những bài toán nghiên cứu về lý thuyết Lie. Trong một công trình của mình, E. E. Levi và I. A. Malcev đã chứng minh được: *Mỗi đại số Lie hữu hạn chiều trên trường có đặc số* 0 *đều phân tích được thành tổng nữa trực tiếp của một đại số nửa đơn với iđêan giải được tối đại của nó*. Do đó, việc phân loại đại số Lie được quy về phân loại các đại số nữa đơn và các đại số giải được.

Nhờ vào ba tính chất *đối xứng, bất biến và không suy biến* mà dạng Killing trở thành một công cụ được sự dụng khá nhiều khi nghiên cứu về đại số Lie nửa đơn. Chẳng hạn tiêu chuẩn Cartan trong bài toán phân loại đại số Lie đã chỉ ra rằng: *Đại số Lie* $\mathbf{g}$ *là đại số Lie nửa đơn khi và chỉ khi dạng Killing không suy biến trên* $\mathbf{g} \times \mathbf{g}$. Tính đến nay, bài toán phân loại các đại số Lie nữa đơn đã được giải quyết triệt để bởi E. Cartan trên trường số phức $\mathbb{C}$ và R. E. Gantmacher trên trường số thực $\mathbb{R}$.

Bên cạnh đó các đại số Lie giải được có cấu trúc không quá phức tạp. Tuy nhiên việc phân loại, mô tả biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của nó thì tương đối phức tạp và theo chúng tôi được biết đến nay thì bài toán này vẫn chưa được giải quyết triệt để. Các kết qủa gần đây cho thấy, bài toán phân loại đại số Lie giải được hầu như thực hiện trên các đại số có số chiều thấp. Ví dụ như, đối với đại Lie lũy linh đã được phân loại cho các đại số có số chiều bằng 8 bởi G. Tsagas (xem [5]), còn đại số Lie giải được đã được phân loại cho các đại số chiều bằng 6 bởi G. Mubarakzyanov (xem [3]) và R.Turkowski (xem [6]).

Đại số Lie $\mathbf{g}$ được gọi là *đại số Lie giải được* nếu *dãy dẫn xuất*

$$D(\mathbf{g}): \qquad \mathbf{g}^0 := \mathbf{g} \supseteq \mathbf{g}^1 := [\mathbf{g}, \mathbf{g}] \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{g}^k := [\mathbf{g}^{k-1}, \mathbf{g}^{k-1}] \supseteq \cdots$$

của nó dừng sau hữu hạn bước, tức là tồn tại số tự nhiên n để $\mathbf{g}^n = \{0\}$. Số n khi đó được gọi là *bậc giải được* của đại số Lie $\mathbf{g}$. *Căn lũy linh* của một đại số Lie giải được $\mathbf{g}$ (được ký hiệu là $N_R(\mathbf{g})$) là iđêan lũy linh lớn nhất của $\mathbf{g}$. Theo G. Mubarakzyanov (xem [3]) thì mọi đại số Lie giải được $\mathbf{g}$ đều có duy nhất một căn lũy linh và số chiều của căn lũy linh (ký hiệu là $\dim(N_R(\mathbf{g}))$) không nhỏ hơn một nửa số chiều của đại số Lie $\mathbf{g}$. Do đó, nếu số chiều của đại số Lie giải được $\mathbf{g}$ bằng 7 (ký hiệu là $\dim(\mathbf{g}) = 7$) thì $\dim(N_R(\mathbf{g})) \geq 4$, tức là $\dim(N_R(\mathbf{g})) \in \{4, 5, 6, 7\}$. Trong các trường hợp $\dim(N_R(\mathbf{g})) \in \{4, 6, 7\}$ đã được phân loại bởi các tác giả R. A. Parry (xem [4]); F. Hindeleh và G. Thompson (xem [2]). Đối với trường hợp còn lại $\dim(N_R(\mathbf{g})) = 5$ thì bài toán phân loại và mô tả biểu diễn phù hợp, đối phù hợp của đại số Lie tương ứng vẫn còn là bài toán mở.

Trong luận văn này chúng tôi tiếp cận đại số Lie giải được, bằng cách xây dựng các đại số Lie thực giải được bất khả phân, có số chiều bằng 7 từ việc chọn trước cho nó căn lũy linh $5-$ chiều. Giả sử cho trước một đại số Lie lũy linh $5-$ chiều **k**, với cơ sở $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$ và tích Lie $[e_i, e_j]$ hoàn toàn xác định với mọi $1 \leq i, j \leq 5$. Khi đó ta mở rộng **k** bằng cách bổ sung thêm hai phần tử $\{u, v\}$ *độc lập tuyến tính lũy linh* để có được đại số Lie giải được bất khả phân $7-$ chiều **g**, với tích Lie được xác định bởi

$$\begin{cases} [u,v] = \sum\limits_{j=1}^{5} \sigma_j e_j \\ [u,e_i] = \sum\limits_{j=1}^{5} a_{ij} e_j \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, 5. \\ [v,e_i] = \sum\limits_{j=1}^{5} b_{ij} e_j \end{cases}$$

Các $\sigma_i, (\forall i = \overline{1,5})$ xác định bởi công thức trên được gọi là *hằng số cấu trúc*. Đặt các ma trận $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$, khi đó A, B gọi là *ma trận cấu trúc*. Với cách đặt như trên thì bài toán phân loại, mô tả biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của đại số Lie **g** lúc này được quy về phân loại và mô tả cặp ma trận cấu trúc A, B và hằng số cấu trúc σ_i.

Bài toán phân loại, mô tả biểu diễn của đại số Lie đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Với mong muốn tìm hiểu về bài toán mô tả biểu diễn của đại số Lie giải được và được sự gợi ý của người hướng dẫn, chúng tôi chọn đề tài: **Biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của một lớp đại số Lie giải được $7-$ chiều có căn lũy linh $5-$ chiều** làm đề tài nghiên cứu của mình.

Mục đích của luận văn là dựa vào các kết quả trong bài báo "*Classification of 7 dimensional solable Lie algebras having 5 dimensional nilradicals,*" arXiv: 2107.03990v1 [math.RA] 8 Jul 2021, của các tác giả Vu A. Le, Tuan a. Nguyen, Tu T. C. Nguyen, Tuyen T. M. Nguyen, Thieu N. Vo và các tài liệu liên quan để đọc hiểu, trình bày một số lớp phân loại và mô tả biểu diễn phụ hợp, đối phụ hợp của đại số Lie giải được $7-$ chiều có căn lũy linh $5-$ chiều.

2. Nội dung nghiên cứu của luận văn

2.1. Trình bày một cách có hệ thống các khái niệm về đại số Lie giải được, đặc biệt lớp các đại số Lie giải được hữu hạn chiều với căn lũy linh của nó cũng có chiều hữu hạn. Chứng minh chi tiết một số kết quả về đại số Lie này.

2.2. Chứng minh chi tiết một số kết quả về đại số giải được $7-$ chiều có căn lũy linh $5-$ chiều. Sử dụng các kết quả trên cho việc phân loại một lớp đại số tương ứng và mô tả chi tiết biểu diễn phụ hợp, đối phụ hợp của nó.

3. Tổng quan và cấu trúc của luận văn

Ngoài phần Lời nói đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo thì nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1: Kiến thức cơ sở. Nội dung chính trong chương này, chúng tôi trình bày khái niệm và một số tính chất của đại số Lie, đại số Lie đơn, đại số Lie giải được, đại số Lie lũy linh và căn lũy linh của một đại số. Các nội dung nói ở trên được trình bày trong các mục sau:

1.1. Đại số Lie giải được.

1.2. Đại số Lie lũy linh.

Chương 2: Biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của một lớp đại số Lie giải được $7-$ chiều có căn lũy linh $5-$ chiều. Nội dung chính của chương này chúng tôi trình bày khái niệm về bài toán phân loại một đại số Lie; bài toán mô tả biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của một đại số Lie. Sử dụng các kết quả đó để phân loại một lớp đại số Lie giải được $7-$ chiều có căn lũy linh $5-$ chiều và tính biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của nó. Các nội dung nói ở trên được trình bày trong các mục sau:

2.1. Phân loại một lớp đại số Lie giải được.

2.2. Biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của một lớp đại số Lie giải được.

Mặc dù có rất nhiều cố gắng trong việc hoàn thành luận văn nhưng do hạn hẹp trong kiến thức, năng lực có hạn nên chắc chắn luận văn vẫn còn có những sai sót không mong muốn. Rất mong nhận được sự đánh giá, nhận xét và phản hồi của các nhà khoa học, quý Thầy - Cô và độc giả để tác giả hoàn thiện luận văn của mình một cách tốt hơn.

Chương 1

Kiến thức cơ sở

Nội dung chính trong chương này, chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất của đại số Lie, đại số nửa đơn, đại số Lie giải được, đại số Lie lũy linh và căn lũy linh của nó.

1.1 Đại số Lie giải được

1.1.1. Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$. Một ánh xạ $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ được gọi là *dạng song tuyến tính* trên V nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \varphi(v_1, w) + \lambda_2 \varphi(v_2, w)$,

ii) $\varphi(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 \varphi(v, w_1) + \beta_2 \varphi(v, w_2)$

với $\forall v_i, w_i \in V; \lambda_i, \beta_i \in \mathbb{K}; i = 1, 2.$

• Dạng song tuyến tính $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ được gọi là:

+) *Đối xứng,* nếu

$$\varphi(v, w) = \varphi(w, v), \forall v, w \in V.$$

+) *Phản đối xứng,* nếu

$$\varphi(v, w) = -\varphi(w, v), \forall v, w \in V.$$

+) *Không suy biến* nếu $V^{\perp} = \{v \in V | \varphi(u, v) = 0, \forall u \in V\} = \{0\}$.

• Vectơ $v \in V$ được gọi là *đẳng hướng* đối với dạng song tuyến tính φ trên không gian vectơ V, nếu $\varphi(v, v) = 0$.

1.1.2. Định lý. *Cho φ là một song tuyến tính trên không gian vectơ V.*

i) Nếu φ không suy biến và U là một không gian con của V thì

$$dim(U) + dim(U^{\perp}) = dim(V).$$

Đặc biệt, nếu $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ thì $V = U \oplus U^{\perp}$ và thu hẹp của φ trên U và trên $U^{\perp}$ là không suy biến.

ii) Nếu φ phản đối xứng và $char(\mathbb{K}) \neq 0$, thì $\forall x \in V$ đều đẳng hướng.

iii) Nếu φ đối xứng thì $\theta_V \in V$ (vectơ không) luôn đẳng hướng đối với φ.

iv) Nếu φ không suy biến và $x \in V$ là vectơ đẳng hướng đối với φ thì $\exists y \in V$ sao cho $\varphi(x, y) \neq 0$.

v) Nếu φ đối xứng, không suy biến. Khi đó tồn tại $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ là một cơ sở của V sao cho $\varphi(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i \neq j \\ \neq 0 \text{ nếu } i = j \end{cases}$

1.1.3. Định nghĩa. Không gian vectơ **g** trên trường $\mathbb{K}$ được gọi là một *đại số Lie* trên $\mathbb{K}$ (hay $\mathbb{K}-$ *đại số Lie*) nếu trên **g** được trang bị một phép nhân gọi là *tích Lie* (hay *móc Lie*)

$$[.,.] : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g}$$
$$(x, y) \longmapsto [x, y]$$

thỏa mãn mãn các điều kiện sau:

$i)$ Là toán tử song tuyến tính, tức là $\forall x, y, z \in$ **g**, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, thì:

$$[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x, z] + \mu[y, z],$$

$$[x, \lambda y + \mu z] = \lambda[x, y] + \mu[x, z].$$

$ii)$ Phản xứng, tức là: $[x, y] = -[y, x], [x, x] = 0, \quad \forall x, y \in$ **g**.

$iii)$ Đẳng thức Jacôbi, tức là:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{g}.$$

+) *Số chiều* của đại số Lie **g** là số chiều của không gian vectơ **g**.

+) Nếu $[x, y] = 0, \forall x, y \in$ **g** thì ta nói tích Lie của đại số Lie là *tầm thường* và đại số Lie **g** được gọi là *giao hoán*.

+) Cho $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ là một cơ sở gồm có $n-$ vectơ của $\mathbb{K}-$ không gian vectơ **g**. Khi đó cấu trúc đại số Lie trên **g** có thể cho bởi tích Lie được xác định như sau:

$$[e_i, e_j] := \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k, \quad 1 \leq i < j \leq n, a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Các hệ số a_{ij}^k được gọi là *hằng số cấu trúc* đại số Lie **g** trong cơ sở đã chọn.

+) Mỗi $\mathbb{K}-$ đại số Lie là một $\mathbb{K}-$ đại số. Câu hỏi đặt ra một $\mathbb{K}-$ đại số có phải là một $\mathbb{K}-$ đại số Lie không? Câu trả lời nói chung là không. Nhưng nếu ta chọn tích Lie là hoán tử thì mỗi đại số trở thành đại số Lie. Định lý sau đây cho phép ta xây dựng một $\mathbb{K}-$ đại số Lie từ một $\mathbb{K}-$ đại số.

1.1.4. Định lý. *Cho **g** là một $\mathbb{K}-$ đại số. Trên **g** định nghĩa phép nhân như sau:*

$$\begin{aligned}[.,.]: \quad & \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} \longrightarrow \boldsymbol{g} \\ & (x, y) \longmapsto [x, y] = xy - yx, \quad \forall x, y \in \boldsymbol{g}.\end{aligned}$$

*Khi đó **g** cùng với phép nhân định nghĩa ở trên trở thành một $\mathbb{K}-$ đại số Lie.*

Đại số Lie **g** xây dựng như trên được gọi là *đại số Lie cảm sinh* từ đại số **g**.

1.1.5. Định nghĩa.i. Không gian vectơ con **h** của đại số Lie **g** được gọi là *đại số Lie con* của **g**, nếu **h** đóng với tích Lie, tức là:

$$\forall x, y \in \mathbf{h} \text{ thì } [x, y] \in \mathbf{h}.$$

ii. Không gian vectơ con **p** của đại số Lie **g** được gọi là *ideal* của **g**, nếu:

$$\forall x \in \mathbf{g}, a \in \mathbf{p} \text{ thì } [x, a] \in \mathbf{p}.$$

iii. Cho **g** là đại số Lie và **p** là một ideal của **g**. Xét không gian vectơ thương $\mathbf{g}/\mathbf{p} = \{x + \mathbf{p} \mid x \in \mathbf{g}\}$. Khi đó $\mathbf{g}/\mathbf{p}$ là một đại số Lie, với tích Lie:

$$[x + \mathbf{p}, y + \mathbf{p}] = [x, y] + \mathbf{p} \quad \forall x + \mathbf{p}, y + \mathbf{p} \in \mathbf{g}/\mathbf{p}.$$

Đại số Lie $\mathbf{g}/\mathbf{p}$ xây dựng như trên được gọi là *đại số Lie thương* của đại số Lie **g** theo ideal **p**.

Ví dụ 1. Cho $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ là hai ideal của đại số Lie $\mathbf{g}$. Khi đó:

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \{x + y \mid x \in \mathbf{p}, y \in \mathbf{q}\}$$

và

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \left\{\sum x_i y_j \mid x_i \in \mathbf{p}, y_j \in \mathbf{q}\right\}$$

là các ideal của $\mathbf{g}$.

Ví dụ 2. Cho $\mathbf{g} = Mat(n, \mathbb{C})$ là đại số các ma trân vuông cấp n phần tử trên $\mathbb{C}$. Dựa vào phép cộng và nhân hai ma trận, ta định nghĩa tích Lie trên $\mathbf{g}$ như sau:

$$[A, B] = A.B - B.A, \quad \forall A, B \in Mat(n, \mathbb{C}).$$

Khi đó $\mathbf{g}$ là một đại số Lie với tích Lie xác định như trên. Đại số $Mat(n, \mathbb{C})$ được ký hiệu là $gl(n, \mathbb{C})$ hoặc là $gl(n)$.

Ví dụ 3. Cho $\mathbf{g}$ là đại số trên trường $\mathbb{C}$ và $End_{\mathbb{C}}(\mathbf{g})$ là đại số các toán tử tuyến tính trên $\mathbf{g}$. Phần tử $\varphi \in End_{\mathbb{C}}(\mathbf{g})$ được gọi là *toán tử vi phân* trên $\mathbf{g}$ nếu:

$$\varphi(x.y) = \varphi(x).y - x.\varphi(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{g}.$$

Ký hiệu $Der(\mathbf{g})$ là tập hợp các toán tử vi phân trên $\mathbf{g}$. Khi đó $Der(\mathbf{g})$ là đại số Lie con của $End_{\mathbb{C}}(\mathbf{g})$.

Thật vậy, $\forall \varphi, \varphi' \in Der(\mathbf{g})$ và $\forall x, y \in \mathbf{g}$, ta có:

$$\begin{aligned}
[\varphi, \varphi'](x.y) &= (\varphi\varphi' - \varphi'\varphi)(x.y) \\
&= \varphi(\varphi'(x).y - x.\varphi'(y)) - \varphi'(\varphi(x).y - x.\varphi(y)) \\
&= (\varphi\varphi' - \varphi'\varphi)(x).y - x.(\varphi\varphi' - \varphi'\varphi)(y) \\
&= [\varphi, \varphi'](x).y - x.[\varphi, \varphi'](y).
\end{aligned}$$

Do đó $[\varphi, \varphi'] \in Der(\mathbf{g})$. Vậy $Der(\mathbf{g})$ là đại số Lie con của $End_{\mathbb{C}}(\mathbf{g})$.

Ví dụ 4. Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie. Đặt $Z(\mathbf{g}) = \{z \in \mathbf{g} \mid zx = xz, \forall x \in \mathbf{g}\}$ gọi là *tâm* của $\mathbf{g}$. Khi đó $Z(\mathbf{g})$ là ideal của $\mathbf{g}$.

Ví dụ 5. Cho $\mathbf{a}$ là đại số con của đại số Lie $\mathbf{g}$. Tập hợp $N_{\mathbf{g}}(\mathbf{a}) = \{x \in \mathbf{g} \mid [x, \mathbf{a}] \subset \mathbf{a}\}$ được gọi là *chuẩn tắc hóa* của $\mathbf{a}$. Khi đó $N_{\mathbf{g}}(\mathbf{a})$ là đại số con của $\mathbf{g}$ và hơn thế nữa nó là đại số con lớn nhất của $\mathbf{g}$ mà chứa $\mathbf{a}$ như là một ideal.

1.1.6. Định nghĩa. Cho $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ là hai $\mathbb{K}-$ đại số Lie. Khi đó, ánh xạ $f : \mathbf{g}_1 \longrightarrow \mathbf{g}_2$ được gọi là *đồng cấu đại số Lie* nếu:

(i) f là ánh xạ $\mathbb{K}-$ tuyến tính,

(ii) f bảo tồn tích Lie, tức là:

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)] \quad \forall x, y \in \mathbf{g}_1.$$

Nếu ánh xạ $f : \mathbf{g}_1 \longrightarrow \mathbf{g}_2$ là đơn ánh (toàn toàn, song ánh) thì đồng cấu đại số Lie ϕ tương ứng được gọi là *đơn cấu* (*toàn cấu, đẳng cấu*) đại số Lie và $Kerf$ là ideal của $\mathbf{g}_1$ còn Imf là đại số con của $\mathbf{g}_2$.

1.1.7. Định nghĩa. Cho V là $\mathbb{K}-$ không gian vectơ và $\mathbf{g}$ là đại số Lie. Một *biểu diễn* của đại số Lie $\mathbf{g}$ trên V là đồng cấu $\varphi : \mathbf{g} \longrightarrow gl(V)$ và được ký hiệu là ký hiệu là (φ, V). Nếu φ là một đơn ánh thì biểu diễn φ được gọi là *khớp*.

1.1.8. Định nghĩa. Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie và $x \in \mathbf{g}$. Khi đó ánh tuyến tính

$$\begin{aligned} ad_x : \ & \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g} \\ & y \longmapsto ad_x(y) = [x, y] \end{aligned}$$

được gọi là *toán tử vi phân trong.*

Ký hiệu $Der(\mathbf{g})$ là tập hợp các toán tử vi phân trên $\mathbf{g}$. Ta xét ánh xạ

$$\begin{aligned} ad: \ & \mathbf{g} \longrightarrow Der(\mathbf{g}) \subset gl(\mathbf{g}) \\ & x \longmapsto ad_x. \end{aligned}$$

Khi đó, với $\forall x, y, z \in \mathbf{g}$ ta có:

$$\begin{aligned} [ad_x, ad_y](z) &= ad_x \circ ad_y(z) - ad_y \circ ad_x(z) \\ &= ad_x([y, z]) - ad_y([x, z]) \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [[x, z], y] \\ &= [[x, y], z] \\ &= ad_{[x,y]}(z). \end{aligned}$$

Do đó ad là một đồng cấu của đại số Lie và hơn thế nữa ad là một biểu diễn.

1.1.9. Định nghĩa. Biểu diễn ad xây dựng như trên gọi là biểu diễn *chính quy* của đại số Lie $\mathbf{g}$.

1.1.10. Định nghĩa. Cho G là nhóm Lie và $\mathbf{g} = Lie(G)$ là đại số Lie của G.

• Với mỗi $g \in G$ ta xét phép tịnh tiến trái $L_g : G \longrightarrow G, x \mapsto gx$ và phép tịnh tiến phải $R_g : G \longrightarrow G, x \mapsto xg$.

Đặt $A_{(g)} = L_g \circ R_{g^{-1}} : G \longrightarrow G, x \longmapsto A_{(g)}(x) := g.x.g^{-1}$. Khi đó ánh xạ $A_{(g)}$ được gọi là *tự đẳng cấu trong của* G *ứng với* $g \in G$. Tự đẳng cấu $A_{(g)}$ cảm sinh ánh xạ

$$\begin{aligned} A_{(g)^*} : \quad & \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g} \\ & x \longmapsto A_{(g)^*}(x) := \frac{d}{dt}[g.exp(tx)g^{-1}]|_{t=0} \end{aligned}$$

và được gọi là *ánh xạ tiếp xúc* tại $A_{(g)}$.

Tác động

$$\begin{aligned} ad : \quad & G \longrightarrow Aut(\mathbf{g}) \\ & g \longmapsto ad(g) := A_{(g)^*} \end{aligned}$$

xác định một biểu diễn của nhóm Lie G trong $\mathbf{g}$ và được gọi là *biểu diễn phụ hợp* của nhóm Lie G trong $\mathbf{g}$.

• Ký hiệu

$$\mathbf{g}^* := Hom(\mathbf{g}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbf{g} \longrightarrow \mathbb{C} | f \text{ là dạng tuyến tính } \}$$

là không gian đối ngẫu của đại số Lie $\mathbf{g}$. Với $g \in G$, xét ánh xạ:

$$\begin{aligned} K_{(g)} : \quad & \mathbf{g}^* \longrightarrow \mathbf{g}^* \\ & f \longmapsto K_{(g)}(f) \end{aligned}$$

trong đó

$$< K_{(g)}f, x >:=< f, Ad(g^{-1})x >, \forall x \in \mathbf{g} \text{ với } Ad(g^{-1}) : \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g}.$$

Khi đó tác động

$$\begin{aligned} ad^* : \quad & G \longrightarrow Aut(\mathbf{g}^*) \\ & g \longmapsto ad^*(g) = K_{(g)} \end{aligned}$$

xác định một biểu diễn của nhóm Lie G trong $\mathbf{g}^*$ và được gọi là *biểu diễn đối phụ hợp* của nhóm Lie G trong $\mathbf{g}^*$.

1.1.11. Mệnh đề. (xem [3]) *Cho* $\mathfrak{g}$ *là một đại số Lie,* V *là một không gian vectơ và* $\varphi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow V$ *là ánh xạ song tuyến tính. Trên không gian vectơ* $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$ *ta định nghĩa phép toán*

$$[X+u, Y+v] = [X,Y] + \varphi(X,Y), \forall X, Y \in \mathfrak{g} \text{ và } u, v \in V.$$

Khi đó không gian vectơ $\overline{\mathfrak{g}}$ *cùng với phép toán định nhĩa ở trên là một đại số Lie khi và chỉ khi* φ *là ánh xạ phản xứng và thỏa mãn điều kiện*

$$\varphi([X,Y],Z) + \varphi([Y,Z],X) + \varphi([Z,X],Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Đại số Lie $\overline{\mathfrak{g}}$ xác định ở trên được gọi là *mở rộng tâm của* $\mathfrak{g}$ *trên* V theo ánh xạ φ.

1.1.12. Mệnh đề. (xem [5]) *Cho* $\mathfrak{g}$ *là một đại số Lie,* V *là một không gian vectơ và* $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$ *là ánh xạ tuyến tính. Trên không gian vectơ* $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$ *ta định nghĩa phép toán*

$$[X+u, Y+v] = [X,Y] + \pi(X)v - \pi(Y)u, \forall X, Y \in \mathfrak{g} \text{ và } u, v \in V.$$

Khi đó không gian vectơ $\overline{\mathfrak{g}}$ *cùng với phép toán định nghĩa ở trên là đại số Lie khi và chỉ khi* π *thỏa mãn điều kiện*

$$\pi([X,Y]) = [\pi(X), \pi(Y)], \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Đại số Lie $\overline{\mathfrak{g}}$ xác định ở trên được gọi là *tích nửa trực tiếp của* $\mathfrak{g}$ *trên* V *bởi biểu diễn* π.

Ví dụ 6. Xét đại số Lie giải được $3-$ chiều $\mathbf{g}_{3,2} = span\{x, y, x\}$, với tích Lie xác định như sau:$[x,y] = y, [x,z] = y + z$. Khi đó:

+) Biểu diễn đối phụ hợp $ad^* : \mathbf{g} \longrightarrow End(\mathbf{g}^*)$ được xác định như sau:

$$ad^*(x)(x^*) = 0, \quad ad^*(y)(x^*) = 0, \quad ad^*(z)(x^*) = 0,$$
$$ad^*(x)(y^*) = -y^* - z^*, \quad ad^*(y)(y^*) = x^*, \quad ad^*(z)(y^*) = x^*,$$
$$ad^*(x)(z^*) = -z^*, \quad ad^*(y)(z^*) = 0, \quad ad^*(z)(z^*) = x^*.$$

+) Tích nửa trực tiếp $\overline{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \oplus \mathbf{g}^*$ của $\mathbf{g}$ với $\mathbf{g}^*$ bởi biểu diễn đối phụ hợp ad^* là $\overline{\mathcal{G}_{3,2}} = span\{x, y, z, x^*, y^*, z^*\}$ có tích Lie được xác định bởi:

$$[x,y] = y, \quad [x,z] = y + z, \quad [x, y^*] = -y^* - z^*,$$
$$[x, z^*] = -z^*, \quad [y, y^*] = [z, y^*] = [z, z^*] = x^*.$$

1.1.13. Định nghĩa. Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie. Khi đó *chuỗi dẫn xuất đạo giảm* $\{D^n(\mathbf{g})\}$, với $D^n(\mathbf{g}) \lhd \mathcal{G}$, trong đó:

$$\begin{aligned} D^0(\mathbf{g}) &= \mathbf{g}, \\ D^1(\mathbf{g}) &= [\mathbf{g}, \mathbf{g}], \\ \cdots \quad &\cdots \quad \cdots \\ D^n(\mathbf{g}) &= [D^{n-1}(\mathbf{g}), D^{n-1}(\mathbf{g})], \quad (n > 1). \end{aligned}$$

Khi đó dãy

$$\mathbf{g} = D^0(\mathbf{g}) \supseteq D^1(\mathbf{g}) \supseteq D^2(\mathbf{g}) \cdots \supseteq D^n(\mathbf{g}) \supseteq \cdots$$

được gọi là *dãy đạo giảm* của đại số Lie $\mathbf{g}$. Đại số Lie $\mathbf{g}$ được gọi là *giải được* nếu dãy đạo giảm của nó dừng sau hữu hạn bước, tức là tồn tại số tự nhiên n để $D^{n-1}(\mathbf{g}) \neq \{0\}$ nhưng $D^n(\mathbf{g}) = \{0\}$. Số n khi đó được gọi là *bậc giải được* của đại số Lie $\mathbf{g}$.

Ví dụ 7. Đại số Lie $\mathbf{g} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ là giải được.

• Với mọi $X = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $Y = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{g}$ ta có:

$$[X, Y] = XY - YX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ 0 & 0 & a_1c_2 - a_2c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó $\mathbf{g}^1 = [\mathbf{g}, \mathbf{g}] =< [X, Y] \mid X, Y \in \mathbf{g} >= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

• Với mọi $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}^1 \Rightarrow [P, Q] = PQ - QP = 0.$

Khi đó $\mathbf{g}^2 = [\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^1] =< [P, Q] \mid P, Q \in \mathbf{g}^1 >= 0$.

Vậy $\mathbf{g}$ là đại số Lie giải được.

1.1.14. Mệnh đề. (xem [8]) *Cho* $\mathbf{g}$ *là đại số Lie. Ta có:*

i) Nếu $\mathbf{g}$ *là giải được và* $\mathbf{a}$ *là đại số con của* $\mathbf{g}$ *thì* $\mathbf{a}$ *giải được.*

ii) Giả sử $\mathbf{q}$ *là ideal của* $\mathbf{g}$. *Nếu* $\mathbf{q}$ *và* $\mathbf{g}/\mathbf{q}$ *là giải được thì* $\mathbf{g}$ *giải được.*

iii) Giả sử $\mathbf{p}$ *và* $\mathbf{q}$ *là hai ideal của* $\mathbf{g}$. *Nếu* $\mathbf{p}$ *và* $\mathbf{q}$ *là giải được thì* $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ *giải được.*

iv) Giả sử $\mathfrak{p}$ là ideal của $\mathfrak{g}$. Khi đó $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ giao hoán khi và chỉ khi $\mathfrak{p}$ chứa $\mathfrak{g}^* = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

v) Nếu $\mathfrak{g}$ là giải được và $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_1$ là một đồng cấu. Khi đó $Im(\mathfrak{g})$ là một đại số Lie giải được.

vi) Nếu $\mathfrak{g}$ hữu hạn chiều. Khi đó, tồn tại duy nhất ideal giải được của $\mathfrak{g}$ chứa mọi ideal giải được của $\mathfrak{g}$. Ideal này gọi là *căn giải được của $\mathfrak{g}$*. Ký hiệu là $Rad(\mathfrak{g})$.

1.1.15. Mệnh đề. *Nếu $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie với các ideal*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_0 \supseteq \mathfrak{i}_1 \supseteq \mathfrak{i}_2 \supseteq \cdots \mathfrak{i}_{n-1} \supseteq \mathfrak{i}_n \supseteq = \{0\}$$

sao cho $\mathfrak{i}_{k-1}/\mathfrak{i}_k$ giao hoán với mọi $1 \leq k \leq n$ thì $\mathfrak{g}$ giải được.

Chứng minh. Theo giả thiết $\mathfrak{i}_{k-1}/\mathfrak{i}_k$ giao hoán với mọi $1 \leq k \leq n \Rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}_1$ giao hoán, khi đó theo Mệnh đề 1.1.14(iv) ta có $\mathfrak{g}^1 \subseteq \mathfrak{i}_1$. Tương tự ta cũng chứng minh được $\mathfrak{g}^2 \subseteq \mathfrak{i}_2$. Giả sử $\mathfrak{g}^{k-1} \subseteq \mathfrak{i}_{k-1}$ với $k \geq 2$. Bây giờ ta chứng minh $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{i}_k$. Thật vậy, vì $\mathfrak{i}_{k-1}/\mathfrak{i}_k$ giao hoán, do đó lập luận tương tự ở trên, ta có: $[\mathfrak{i}_{k-1}, \mathfrak{i}_{k-1}] \subseteq \mathfrak{i}_k$.Mặt khác theo giả thiết quy nạp $\mathfrak{g}^{k-1} \subseteq \mathfrak{i}_{k-1}$ nên $[\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{k-1}] \subseteq [\mathfrak{i}_{k-1}, \mathfrak{i}_{k-1}]$ suy ra $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{i}_k$. Vậy, khi $k = n$ ta có $\mathfrak{g}^n \subseteq \mathfrak{i}_n = \{0\} \Rightarrow \mathfrak{g}^n = \{0\}$. Vậy $\mathfrak{g}$ giải được. □

1.1.16. Tiêu chuẩn giải được. (xem [8]) *Đại số Lie $\mathfrak{g}$ là giải được khi và chỉ khi một trong các điều kiện tương đương sau được thỏa mãn.*

i) Tồn tại số tự nhiên n để sao cho $D^{n+1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

ii) Tồn tại số tự nhiên n để với mọi 2^{n+1} phần tử $X_1, X_2, \cdots, X_{2^{n+1}} \in \mathfrak{g}$, ta có

$$[\cdots[[X_1, X_2], [X_2, X_3]], [[X_5, X_6], [X_7, X_8]], \cdots] = 0.$$

iii) Tồn tại một dãy hữu hạn các ideal giảm

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_0 \supset \mathfrak{i}_1 \supset \cdots \mathfrak{i}_n \supset \mathfrak{i}_{n+1} = \{0\}$$

sao cho $\mathfrak{i}_i/\mathfrak{i}_{i+1}$ là giao hoán, tức là $[\mathfrak{i}_i, \mathfrak{i}_i] \subset \mathfrak{i}_{i+1}$.

1.1.17 . Định nghĩa. *Dạng Killing* của đại số Lie $\mathbf{g}$ là ánh xạ song tuyến tính, đối xứng Γ xác định bởi

$$\begin{aligned}\Gamma : \quad & \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto \Gamma(x, y) = Tr[ad_x \circ ad_y].\end{aligned}$$

+) Dạng Kiling Γ của đại số Lie $\mathbf{g}$ được gọi là *không suy biến* nếu iđêan

$$rad_\Gamma := \{x \in \mathbf{g} \mid \Gamma(x, y) = 0, \forall y \in \mathbf{g}\} = \{0\}.$$

+) Dạng Kiling Γ của đại số Lie $\mathbf{g}$ bất biến qua mọi tự đẳng cấu của $\mathbf{g}$. Tức là

$$\Gamma(\varphi(x), \varphi(y)) = \Gamma(x, y), \forall x, y \in \mathbf{g}$$

và $\forall \varphi$ là một tự đẳng cấu của $\mathbf{g}$.

1.1.18. Tiêu chuẩn Cartan về giải được. (xem [8]) *Đại số Lie* $\boldsymbol{g}$ *là giải được khi và chỉ khi dạng Killing* $\Gamma : \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} \longrightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto tr(ad_X \circ ad_Y)$ *là triệt tiêu trên* $\boldsymbol{g} \times [\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}]$, *tức là* $\Gamma(X, Y) = 0, \forall X \in \boldsymbol{g}, \forall Y \in [\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}]$.

Ví dụ 8. Cho đại số Lie $\mathbf{g} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Khi đó $\mathbf{g}$ giải được.

Chứng minh. Thật vậy, xét cơ sở của đại số Lie $\mathbf{g}$ là:

$$E = \left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Với bất kỳ $X, Y, Z \in \mathbf{g}$ thì $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$ sao cho $\begin{cases} X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 \\ Y = y_1E_1 + y_2E_2 + y_3E_3 \\ Z = z_1E_1 + z_2E_2 + z_3E_3. \end{cases}$

Khi đó bằng cách tính trực tiếp, ta có:

$$M_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \text{ và } M_{[Y,Z]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_2z_1 - y_1z_2 & 0 & 0 \\ y_3z_1 - y_1z_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tương ứng là ma trân của toán tử adX và $ad[Y, Z]$ đối với cơ sở E đã chọn ở trên.

Suy ra $M_X M_{[Y,Z]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1(y_2z_1 - y_1z_2) & 0 & 0 \\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận của toán tử $adX \circ ad[Y, Z]$ đối với cơ sở E.

Từ đây, ta có $\Gamma(X, [Y, Z]) = Tr(adX \circ ad[Y, Z]) = 0, \forall X, Y, Z \in \mathbf{g}$.

Suy ra $\Gamma(\mathbf{g}, \mathbf{g}^1) = 0$. Do đó theo tiêu chuẩn Cartan thì $\mathbf{g}$ là giải được. □

1.2 Đại số Lie lũy linh

1.2.1. Định nghĩa. Cho **g** là đại số Lie. Đặt:

$$\begin{aligned} C^0(\mathbf{g}) &:= \mathbf{g}, \\ C^1(\mathbf{g}) &:= [\mathbf{g}, \mathbf{g}] = \mathbf{g}^1, \\ \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \\ C^n(\mathbf{g}) &:= [\mathbf{g}, C^{n-1}(\mathbf{g})] = [\mathbf{g}, [\mathbf{g}, \cdots [\mathbf{g}, \mathbf{g}] \cdots] = \mathbf{g}^n. \end{aligned}$$

Khi đó dãy

$$C^0(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \supseteq \mathbf{g}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{g}^n \supseteq \cdots$$

được gọi là *dãy tâm giảm* của đại số Lie **g**. Đại số Lie **g** được gọi là *lũy linh* nếu dãy tâm giảm của nó dừng sau hữu hạn bước, tức là tồn tại số tự nhiên n để $C^n(\mathbf{g}) = \{0\}$. Số n khi đó được gọi là *bậc lũy linh* của đại số Lie **g**.

Ví dụ 1. Xét đại số Lie các ma trận tam giác trên, phần tử phức

$$\mathbf{g} = G(n, \mathbb{C}) = \Big\{A = [a_{ij}]_n \in gl(n, \mathbb{C}) \mid a_{ij} = 0, 1 \leq j < i \leq n\Big\}.$$

Khi đó **g** là đại số lũy linh.

Chứng minh. Đặt $\mathbf{a}_m = \{X = [x_{ij}]_n \in gl(n, \mathbb{C}) | x_{ij} = 0, \forall j - i < m\}$. Khi đó với $\forall X = [x_{ij}]_n, Y = [y_{ij}]_n \in \mathbf{a}_m$, ta có:

$$[X, Y] = XY - YX = \sum_{j-i>m, l-j>m} [x_{ij} y_{jl} e_{il}]_n - \sum_{j-i>m, i-k>m} [x_{ij} y_{ki} e_{kj}]_n \in \mathbf{a}_m.$$

Vậy $\mathbf{g}^m \subset \mathbf{a}_m$. Đặc biệt, khi $m = n$ thì $\mathbf{g}^n = 0$ hay **g** là đại số Lie lũy linh. □

Ví dụ 2. Đại số Heisenberg

$$\mathbf{h}_{2n+1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X^t & -Y^t & z \\ 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\}$$

là đại số Lie lũy linh.

1.2.2. Mệnh đề. (xem [8]) *Cho* $\mathbf{g}$ *là đại số Lie. Khi đó ta có:*

i) Nếu $\mathbf{g}$ *là lũy linh thì đại số con và ảnh đồng cấu của* $\mathbf{g}$ *cũng là đại số Lie lũy linh.*

ii) Ký hiệu

$$Z(\mathbf{g}) = \{a \in \mathbf{g} | [a, b] = 0, \forall b \in \mathbf{g}\}$$

là tâm của $\mathbf{g}$. *Nếu* $\mathbf{g}/Z(\mathbf{g})$ *là lũy linh thì* $Z(\mathbf{g})$ *lũy linh.*

iii) Giả sử $\mathbf{g}$ *lũy linh và khác không thì* $Z(\mathbf{g}) \neq \{0\}$.

iv) Nếu $\mathbf{g}$ *lũy linh thì* $\mathbf{g}$ *giải được.*

v) Nếu $\mathbf{g}$ *giải được thì đại số con* $\mathbf{g}_1 = [\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ *lũy linh.*

1.2.3. Định nghĩa. Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie, $x \in \mathbf{g}$ và

$$\begin{aligned} ad_x : \quad & \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g} \\ & y \longmapsto ad_x(y) = [x, y]. \end{aligned}$$

là toán tử vi phân trong. Phần tử x được gọi là $ad-$ *lũy linh* nếu ad_x là tự đồng cấu lũy linh, tức là tồn tại số tự nhiên n sao cho $(ad_x)^n = 0$.

1.2.4. Mệnh đề. *Nếu đại số Lie* $\mathbf{g}$ *là lũy linh thì mọi phần tử của* $\mathbf{g}$ *là* $ad-$ *lũy linh.*

Chứng minh. Theo giả thiết $\mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{g}^n = 0$. Khi đó $\forall x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{g}$, ta có:

$$[x_n, [\ldots [x_2, [x_1, x_0]] \ldots]] = (ad_{x_n})(ad_{x_{n-1}}) \ldots (ad_{x_1})(x_0) = 0.$$

Đặc biệt, khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x \in \mathbf{g}$ thì $(ad_x)^n(x_0) = 0, \forall x_0 \in \mathbf{g}$ nên $(ad_x)^n = 0$ hay x là $ad-$ lũy linh. □

Câu hỏi ngược lại của Mệnh đề 1.2.4 có đúng hay không? Có nghĩa là: *Nếu mọi phần tử của* $\mathbf{g}$ *là* $ad-$ *lũy linh thì* $\mathbf{g}$ *có phải là lũy linh không?* Câu trả lời chính là Định lý Engel được phát biểu sau đây.

1.2.5. Định lý Engel. *Cho* $\mathbf{g}$ *là đại số Lie hữu hạn chiều. Nếu mọi phần tử của* $\mathbf{g}$ *là* $ad-$ *lũy linh thì* $\mathbf{g}$ *lũy linh.*

1.2.6. Tiêu chuẩn lũy linh. (xem [8]) *Đại số Lie* **g** *là lũy linh khi và chỉ khi một trong các điều kiện tương đương sau được thỏa mãn.*

i) Tồn tại số tự nhiên n *để sao cho* $C^n(\boldsymbol{g}) = \{0\}$.

ii) Tồn tại số tự nhiên n *để với mọi phần tử* $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1} \in \boldsymbol{g}$, *ta có*

$$[\cdots[X_1, [X_2, \cdots, [X_n, X_{n+1}], \cdots] = 0.$$

iii) Tồn tại một dãy hữu hạn các ideal giảm

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{i}_0 \supset \boldsymbol{i}_1 \supset \cdots \boldsymbol{i}_n \supset \boldsymbol{i}_{n+1} = \{0\}$$

sao cho $\boldsymbol{i}_i/\boldsymbol{i}_{i+1}$ *chứa trong tâm* $C(\boldsymbol{g}/\boldsymbol{i}_{i+1})$, *tức là* $[\boldsymbol{g}, \boldsymbol{i}_i] \subset \boldsymbol{i}_{i+1}$.

1.2.7. Mệnh đề. (xem [8]) *Nhóm Lie* G *là lũy linh khi và chỉ khi đại số Lie* **g** *của nó là lũy linh.*

1.2.8. Tiêu chuẩn Cartan. (xem [8]) *Đại số Lie* **g** *là lũy linh khi và chỉ khi dạng Killing là triệt tiêu hoàn toàn, tức là* $Tr(ad_x \circ ad_y) = 0, \forall x, y \in \boldsymbol{g}$.

1.2.9. Định nghĩa.i. Đại số Lie **g** được gọi *đơn* nếu **g** không giao hoán và ngoài ideal tầm thường $\{0\}$ và chính nó thì **g** không chứa một ideal tầm thường thực sự nào khác.

ii. Đại số Lie **g** được gọi *nửa đơn* nếu ngoài ideal tầm thường $\{\theta\}$ thì **g** không chứa một ideal thực sự khác không nào.

Vậy từ định nghĩa, ta thấy đại số Lie **g** nửa đơn khi và chỉ khi **g** không có ideal giải được nào khác không, có nghĩa là căn của **g** là $Rad(\mathbf{g}) = 0$.

1.2.10. Tiêu chuẩn Cartan. (xem [8]) *Đại số Lie* **g** *là nửa đơn khi và chỉ khi dạng Killing* $\Gamma : \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \Gamma(x, y) = Tr(ad_x \circ ad_y)$ *là không suy biến.*

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Giả sử **p** là một ideal trong **g**, khi đó

$$Tr(ad_x \circ ad_y) = Tr([x, [y, .]]) = Tr([x, [y, .]])\Big|_{\mathbf{p}}.$$

Xét $\mathbf{p} = Ker(\Gamma)$. Khi đó $(\Gamma(.,.)\Big|_{\mathbf{p}} = 0$. Theo tiêu chuẩn Cartan cho đại số Lie lũy linh thì **p** là lũy linh. Nhưng theo giả thiết **g** là nửa đơn, cho nên $\mathbf{p} = 0$.

Vậy Γ không suy biến.

($\Leftarrow$) Giả sử dạng Killing Γ không suy biến. Nếu **g** không nửa đơn, khi đó tồn tại ideal giao hoán $\mathbf{p} \neq 0$ và với mọi $x, y \in \mathbf{g}$ ta có:

$$\Gamma_{\mathbf{p}}(x, y) = Tr(ad_x \circ ad_y) = Tr([x, [y, .]]) = 0.$$

Do đó Γ suy biến, điều này mâu thuận với giả thiết ở trên, do đó **g** nửa đơn. □

Ví dụ 3. Đại số Lie $\mathbf{g} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ là nửa đơn.

Chứng minh. Giả sử Γ là dạng Killing của **g**. Xét cơ sở

$$E = \left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

của **g**. Khi đó, $\forall X, Y \in \mathbf{g}$, $\exists x_i, y_i \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 \\ Y = y_1E_1 + y_2E_2 + y_3E_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ad_X = x_1ad_{E_1} + x_2ad_{E_2} + x_3ad_{E_3} \\ ad_Y = y_1ad_{E_1} + y_2ad_{E_2} + y_3ad_{E_3}. \end{cases}$$

Thay các ma trận $E_i(i = \overline{1, 3})$ vào và cách tính toán trực tiếp ta thu được:

+)

$$M_X = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } M_Y = \begin{bmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

tương ứng là ma trận biểu diễn của ad_X và ad_Y.

+)

$$M_XM_Y = \begin{bmatrix} -x_3y_3 - x_2y_2 & x_2y_1 & x_3y_1 \\ x_1y_2 & -x_3y_3 - x_1y_1 & x_3y_2 \\ x_1y_3 & -x_2y_3 & -x_2y_2 - x_1y_1 \end{bmatrix}$$

là ma trận biểu diễn của $ad_X \circ ad_Y$.

Vậy

$$\Gamma(X, Y) = Tr(ad_X \circ ad_Y) = -2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$$

Do đó ma trận của Γ là $M_\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow det(M_\Gamma) = -8 \neq 0.$

Vậy theo tiêu chuẩn Cartan suy ra **g** là nửa đơn. □

1.2.11. Định lý. (xem [8]) *Cho* $\boldsymbol{g}$ *là đại số Lie nửa đơn,* $\boldsymbol{q}$ *là ideal của* $\boldsymbol{g}$ *và* $\boldsymbol{q}^{\perp}$ *là phần bù trực giao ứng với dạng Killing* Γ *của* $\boldsymbol{g}$*. Khi đó* $\boldsymbol{q}^{\perp}$ *là một ideal của* $\boldsymbol{g}$ *và* $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{\perp}$ *là tổng trực tiếp, trực giao.*

Chứng minh. Theo định nghĩa phần bù trực giao, ta có:

$$\mathbf{q}^{\perp} = \{y \in \mathbf{g} | \Gamma(x, y) = 0, \forall x \in \mathbf{q}\}.$$

Theo giả thiết $\mathbf{q} \triangleleft \mathbf{g} \Rightarrow \forall z \in \mathbf{g}, \forall x \in \mathbf{q}$ thì $[x, z] \in \mathbf{q}$

$\Rightarrow \Gamma([x, z], Y) = 0, \forall Y \in \mathbf{q}^{\perp}$.

Mặt khác $\Gamma([x, z], y) + \Gamma(x, [y, z]) = 0, \forall z \in \mathbf{g}, \forall x \in \mathbf{q}, \forall y \in \mathbf{q}^{\perp}$

$\Rightarrow \Gamma(x, [y, z]) = 0, \forall x \in \mathbf{q} \Rightarrow [y, z] = 0, \forall z \in \mathbf{g}, \forall y \in \mathbf{q}^{\perp}$.

Do vậy, $\mathbf{q}^{\perp}$ là một ideal của $\mathbf{g}$.

Một mặt theo tiêu chuẩn Cartan thì $\mathbf{q} \cap \mathbf{q}^{\perp}$ là giải được, suy ra $\mathbf{q} \cap \mathbf{q}^{\perp} = \{0\}$ và theo định nghĩa phần bù trực giao ta có $\mathbf{g} = \mathbf{q} \cap \mathbf{q}^{\perp}$.

Vậy $\mathbf{g} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^{\perp}$ là tổng trực tiếp, trực giao. □

1.2.12. Hệ quả .(xem [8]) *Cho đại số Lie* $\boldsymbol{g}$*. Khi đó:*

+) $\boldsymbol{g}$ *nửa đơn khi và chỉ khi* $[\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}] = \boldsymbol{g}$*.*

+) Nếu $\boldsymbol{g}$ *là nửa đơn và* $\boldsymbol{g}_i$ *là các đại số Lie đơn thì* $\boldsymbol{g} = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{g}_i$*.*

1.2.13. Định lý H. Weyl. (xem [8]) *Nếu đại số Lie* $\boldsymbol{g}$ *là nửa đơn thì mọi* $\boldsymbol{g}-$ *module* V *là khả quy hoàn toàn.*

Định lý sau đây cho ta phân tích một đại số Lie bất kỳ thành tích nửa trực tiếp của đại số Lie giải được và nửa đơn.

1.2.14. Định lý Cartan - Levi - Malsev. (xem [8]) *Giả sử* $\varphi : \boldsymbol{g} \longrightarrow \boldsymbol{s}$ *là một toàn cấu từ đại số Lie* $\boldsymbol{g}$ *bất kỳ lên đại số Lie nửa đơn* $\boldsymbol{s}$*. Khi đó tồn tại duy nhất (chính xác đến một tự đẳng cấu của đại số Lie* $\boldsymbol{g}$*)* ψ *là nghịch đảo phải của* φ *(tức là tồn tại một đồng cấu đại số Lie* $\psi : \boldsymbol{s} \longrightarrow \boldsymbol{g}$ *sao cho* $\varphi \circ \psi = id_{\boldsymbol{s}}$*) sao cho* $\boldsymbol{g} \cong \boldsymbol{s} \oplus \boldsymbol{a}$*, trong đó* $\boldsymbol{a} = Ker(\varphi)$*.*

Chương 2

Biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của một lớp đại số Lie giải được $7-$ chiều có căn lũy linh $5-$ chiều

Nội dung chính của chương này chúng tôi trình bày khái niệm về bài toán phân loại một đại số Lie; bài toán mô tả biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của một đại số Lie. Sử dụng các kết quả đó để phân loại một lớp đại số Lie giải được $7-$ chiều có căn lũy linh $5-$ chiều, từ việc phân loại đó mô tả biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của nó.

2.1 Phân loại một lớp đại số Lie giải được.

2.1.1. Định nghĩa. Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie giải được. *Căn lũy linh* của $\mathbf{g}$ là iđêan lũy linh lớn nhất của $\mathbf{g}$ và được ký hiệu là $N_R(\mathbf{g})$.

Nếu ta cho trước một đại số Lie giải được $\mathbf{g}$ thì căn lũy linh của $\mathbf{g}$ là duy nhất và số chiều của căn lũy linh không nhỏ hơn một nửa số chiều của $\mathbf{g}$, có nghĩa là $\dim(N_R(\mathbf{g})) \geq \frac{1}{2}\dim(\mathbf{g})$.

2.1.2. Định nghĩa. • Cho **g** là đại số Lie giải được và $a \in \mathbf{g}$. Phần tử a được gọi là *lũy linh* trong **g** nếu

$$[\ldots[[x, a], a]\ldots, a] = 0, \quad \forall x \in \mathbf{g}.$$

• Họ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ các phần tử của đại số Lie giải được **g** được gọi là *độc lập tuyến tính lũy linh* nếu không có tổ hợp tuyến tính không tầm thường nào của A là lũy linh trong **g**.

• Họ $\Delta = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ các ma trận được gọi là *độc lập tuyến tính lũy linh* nếu không có tổ hợp tuyến tính không tầm thường nào của Δ là ma trận lũy linh.

Giả sử **h** một đại số Lie lũy linh $5-$ chiều, với cơ sở $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$ và tích Lie $[e_i, e_j]$ hoàn toàn xác định với mọi $1 \leq i, j \leq 5$. Mục đích đặt ra là, ta sẽ mở rộng **h** để có được một đại số Lie giải được $7-$ chiều, bất khả phân **g** nhận **h** làm căn lũy linh. Cụ thể ta mở rộng **h** bằng cách bổ sung thêm hai phần tử $\{U, V\}$ *độc lập tuyến tính lũy linh* để có được đại số Lie giải được bất khả phân $7-$ chiều **g**. Để có được một đại số Lie mới **g** như vậy, thì chúng ta cần xác định tích Lie

$$[U, V], \qquad [U, e_i], \qquad [V, e_j] \qquad \text{với } i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Vì **g** giải được, nên đại số dẫn xuất $[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ nằm trong căn lũy linh **h** của **g**. Do đó có thể xác định tích Lie trên **g** như sau:

$$\begin{cases} [U, V] = \sum\limits_{j=1}^{5} \sigma_j e_j \\ [U, e_i] = \sum\limits_{j=1}^{5} a_{ij} e_j \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, 5. \\ [V, e_i] = \sum\limits_{j=1}^{5} b_{ij} e_j \end{cases}$$

Khi đó $\sigma_i, (\forall i = \overline{1, 5})$ xác định ở trên gọi là các *hằng số cấu trúc*. Nếu từ các phần tử a_{ij} và $b_{ij}, (\forall i, j = \overline{1, 5})$ ta thiết lập các ma trận $A = [a_{ij}]_5$ và $B = [b_{ij}]_5$ thì A, B gọi là *ma trận cấu trúc*. Với cách xây dựng như trên thì bài toán phân loại các đại số Lie **g** lúc này được quy về phân loại và mô tả cặp ma trận cấu trúc A, B và hằng số cấu trúc σ_i. Trong qua trình phân loại, một trong những kĩ thuật được sử dụng nhiều đó là kĩ thuật đổi cơ sở thích hợp nhằm đơn giản hóa cấu trúc của đại số Lie đang xét.

Với định nghĩa và cách xác định ma trận cấu trúc như ở trên, ta thấy cặp hai phần tử $\{U, V\}$ độc lập tuyến tính lũy linh khi và chỉ khi cặp hai ma trận cấu trúc $\{A, B\}$ tương ứng là độc lập tuyến tính lũy linh.

Mục đích trước hết ở đây là chúng tôi sẽ tính toán cụ thể cho trường hợp căn lũy linh là đại số Lie lũy linh $5-$ chiều $\mathbf{h} = \mathbf{g}_{5,3}$. Tiếp theo sử dụng kết quả vừa tính ở trên để mô tả đại số Lie thực giải được $7-$ chiều, bất khả phân có căn lũy linh là đại số Lie lũy linh $5-$ chiều $\mathbf{h} = \mathbf{g}_{5,3}$.

Xét đại số Lũy linh $\mathbf{h} = \mathbf{g}_{5,3}$ với cơ sở $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$ và tích Lie không tầm thường là

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = e_5. \tag{1}$$

Ta sẽ mở rộng $\mathbf{h}$ để được một đại số Lie giải được bất khả phân $7-$ chiều $\mathbf{g}$ nhận $\mathbf{h}$ làm căn lũy linh, bằng cách bổ sung thêm hai phần tử $\{U, V\}$ độc lập tuyến tính lũy linh. Vì $\mathbf{g}$ giải được, nên đại số dẫn xuất $[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ nằm trong căn lũy linh $\mathbf{h}$ của $\mathbf{g}$. Khi đó ta có:

$$[U, e_i] = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} e_j \text{ và } [V, e_i] = \sum_{j=1}^{5} b_{ij} e_j \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Ta áp dụng đẳng thức Jacôbi cho 10 bộ ba vectơ $(U, e_i, e_j), 1 \leq i < j \leq 5$, ta có

$$[[U, e_i], e_j] + [[e_i, e_j], U] + [[e_j, U], e_i] = 0$$

$$\Rightarrow [\sum_{j=1}^{5} a_{ij} e_j, e_j] + [[e_i, e_j], U] + [-\sum_{i=1}^{5} a_{ji} e_i, e_i] = 0.$$

Khi đó ta xác định được các phần tử $a_{ij}, 1 \leq i < j \leq 5$. Từ đây ta thu được ma trận cấu trúc A có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{13} + a_{45} & a_{25} \\ 0 & 0 & 2a_{11} & -a_{12} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} + a_{22} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{11} + a_{22} \end{bmatrix}$$

Tương tự, ta cũng áp dụng đẳng thức Jacôbi cho 10 bộ ba vectơ (V, e_i, e_j), $1 \leq i < j \leq 5$, ta thu được ma trận cấu trúc B có dạng:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{13} + b_{45} & b_{25} \\ 0 & 0 & 2b_{11} & -b_{12} & b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} + b_{22} & b_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_{11} + b_{22} \end{bmatrix}$$

- Bây giờ ta thực hiện phép đổi cơ sở lần thứ nhất:

$$\begin{cases} U := U - a_{45}e_1 - a_{35}e_2 + a_{25}e_3 + a_{15}e_4 \\ V := V - b_{45}e_1 - b_{35}e_2 + b_{25}e_3 + b_{15}e_4. \end{cases}$$

Khi đó tính toán trực tiếp, ta thấy tích Lie $[P, Q]$ không đổi so với tích Lie ban đầu. Trong khi đó cặp ma trận cấu trúc A, B tiếp tục được đơn giản thành:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} + a_{35} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{11} & -a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} + a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{11} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} + b_{35} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2b_{11} & -b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} + b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_{11} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Để đơn giản trong quá trình biến đổi, nên ta đặt:

$$\begin{cases} a = a_{11}, \quad b = a_{22}, \quad c = a_{12}, \\ d = a_{13}, \quad e = a_{14} + a_{35}, \quad f = a_{23}. \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} u = b_{11}, \quad v = b_{22}, \quad w = b_{12}, \\ p = b_{13}, \quad q = b_{14} + b_{35}, \quad r = b_{23}. \end{cases}$$

Với cách đặt như trên, thì ma trận cấu trúc A, B được viết đơn giản như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a & c & d & e & 0 \\ 0 & b & f & d & 0 \\ 0 & 0 & 2a & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} u & w & p & q & 0 \\ 0 & v & r & p & 0 \\ 0 & 0 & 2u & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u+v \end{bmatrix}$$

Tiếp tục sử dụng đẳng thức Jacobi

$$[[U,V],e_i]+[[e_i,V],U]+[[e_i,U],V]=0$$

cho 5 bộ ba số (U,V,e_i), $\quad (1 \leq i \leq 5)$ ta thu được

$$\begin{cases} \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=0 \\ (a-b)w=(u-v)c \\ (2a-b)r=(2u-v)f \\ ap+wf=cr+du \\ 2cp+ev=2dw+bq. \end{cases} \qquad (2)$$

Mặt khác, ta thấy để cặp $\{A,B\}$ độc lập tuyến tính lũy linh thì mọi tổ hợp tuyến tính không tầm thường t_1A+t_2B không phải là ma trận lũy linh, trong đó

$$A=\begin{bmatrix} a & c & d & e & 0 \\ 0 & b & f & d & 0 \\ 0 & 0 & 2a & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} u & w & p & q & 0 \\ 0 & v & r & p & 0 \\ 0 & 0 & 2u & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u+v \end{bmatrix}.$$

Vậy tính toán trực tiếp ta tìm được điều kiện để cặp $\{A,B\}$ độc lập tuyến tính lũy linh là $rank\left(\begin{bmatrix} a & u \\ b & v \end{bmatrix}\right)=2.$ $\qquad (3)$

● Thực hiện đổi cơ sở lần thứ hai $\begin{cases} U := U+\gamma e_5 \\ V := V+\delta e_5. \end{cases}$

Khi đó tích Lie $[U,V]$ mới sẽ được thay đổi so với tích Lie ban đầu và được xác định như sau:

$$[U,V]=[\sigma_5+\delta(2a+b)-\gamma(2u+v),e_5],$$

trong khi đó cặp ma trận cấu trúc A,B không bị thay đổi.

Vì $rank\left(\begin{bmatrix} a & u \\ b & v \end{bmatrix}\right)=2 \Rightarrow av \neq bu$. Mà

$$[U,V]=[\sigma_5+\delta(2a+b)-\gamma(2u+v),e_5]\neq 0$$

$\Rightarrow (2a+b)^2+(2u+v)^2 \neq 0$, có nghĩa ta luôn chọn được hai giá trị γ và δ thích hợp để làm triệt tiêu hằng số cấu trúc σ_5.

Từ sự xác định cặp ma trận cấu trúc (A,B) như ở trên, do đó để làm đơn giản hóa cặp ma trận cấu trúc đó ta nghiên cứu bài toán trên các trường hợp dựa vào dạng của A và B. Các trường hợp đó chính là kết quả của các mệnh đề sau.

2.1.3. Mệnh đề. *Nếu A và B có dạng chéo thì khi đó*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

và tích Lie $[U, V] = 0$.

Chứng minh. Vì cặp ma trận cấu trúc A, B có dạng chéo, có nghĩa là A vàB được viết dưới dạng chéo, do đó nó có một hệ $5-$ vectơ riêng độc lập tuyến tính . Vậy nếu ta áp dụng đẳng thức Jacobi

$$[[U, V], e_i] + [[e_i, V], U] + [[e_i, U], V] = 0$$

cho 5 bộ ba vectơ $(P, Q, e_i), i = \overline{1, 5}$ ta thu được đẳng thức $\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0 \\ (a-b)w = (u-v)c \\ (2a-b)r = (2u-v)f \\ ap + wf = cr + du \\ 2cp + ev = 2dw + bq. \end{cases}$

Mặt khác, vì cặp ma trận cấu trúc A, B độc lập tuyến lũy linh, nên

$$(2a+b)^2 + (2u+v)^2 \neq 0 \Rightarrow a^2 + u^2 \neq 0.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \neq 0$. Do đó, ta thực hiện phép đổi cơ sở X

• Thực hiện đổi cơ sở lần thứ nhất: $\begin{cases} U := \dfrac{1}{a} U \\ V := V - \dfrac{u}{a} U \end{cases}$.

Khi đó tích Lie $[U, V]$ thu được không thay đổi, nhưng cặp ma trận cấu trúc (A, B) thay đổi và ta tính dược A, B có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+x \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \end{bmatrix}, \text{ với } x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0.$$

• Thực hiện đổi cơ sở lần thứ hai: $\begin{cases} U := U - \dfrac{x}{y} V \\ V := V - \dfrac{1}{y} V \end{cases}$.

Khi đó ta thu được đại số Lie có các ma trận cấu trúc (A, B)và tích Lie được xác định như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

và $[U, V] = 0$. □

2.1.4. Mệnh đề. *Nếu A hoặc B có dạng chéo thì khi đó cặp ma trận (A, B) biến đổi thành (GAG^{-1}, GBG^{-1}), trong đó*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 \\ 0 & 1 & g_4 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -g_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (g_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 4}; g_1 g_4 = 0).$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử A có dạng chéo và B không có dạng chéo. Khi đó hệ phương trình (2) trở thành $\begin{cases} (a-b)w = 0 \\ (2a-b)r = 0 \\ ap = 0 \\ bq = 0 \end{cases}$.   (4)

Nhằm mục đích đưa các phần tử nằm ngoài đường chéo chính của ma trận cấu trúc B về không, ta thực hiện phép biến đổi cơ sở một cách thích hợp trong nội bộ căn lũy linh $\mathbf{g}_{5,3}$, sao cho các tích Lie $[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = e_5$ không thay đổi. Ký hiệu các phép biến đổi cơ sở đó là $(\mathcal{G})$. Cụ thể, nếu ta đặt $N^{'} := GN$, trong đó

$$N = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix}, \quad N^{'} = \begin{bmatrix} e_1^{'} \\ e_2^{'} \\ e_3^{'} \\ e_4^{'} \\ e_5^{'} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 \\ 0 & 1 & g_4 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -g_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (g_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 4}; g_1 g_4 = 0)$$

thì cặp ma trận (A, B) biến đổi thành (GAG^{-1}, GBG^{-1}). Xuất phát từ hệ phương trình (4), ta xét hai trường hợp sau đây.

Trường hợp 1. Nếu $w \neq 0$.

Vì $w \neq 0$, nên từ hệ phương trình (4) suy ra $a = b$ và $p = q = r = 0$. Bây giờ ta thực hiện phép đổi $(\mathcal{G})$ với $g_2 = g_3 = g_4 = 0$ thì ma trận A không đổi, còn ma trận B chỉ thay đổi w thành $w' = w - (v-u)g_1$.

Nếu $v \neq u$ thì ta chọn $g_1 = \dfrac{-w}{v-u}$, khi đó ma trận B được đưa về dạng chéo. Ngược lại, nếu $u = v$ thì mâu thuận với điều kiền $rank\left(\begin{bmatrix} a & u \\ b & v \end{bmatrix}\right) = 2$ đã được chỉ ra ở trên.

Trường hợp 2. Nếu $w = 0$.

Ta thực hiện phép biến đổi $(\mathcal{G})$ với $g_1 = 0$. Khi đó ma trận A và B tương ứng được đưa về dạng

$$A = \begin{bmatrix} a & ag_2 & bg_3 & 0 & 0 \\ 0 & b & (2a-b)g_4 & ag_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} u & p' & q' & 0 & 0 \\ 0 & v & r' & p' & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u+v \end{bmatrix}$$

trong đó $\begin{cases} p' = p + ug_2 \\ q' = q + vg_3 \\ r' = r + (2u-v)g_4 \end{cases}$.

Do điều kiện (3) nên $u^2 + v^2 \neq 0$. Vậy ta chỉ xét các khả năng sau đây đối với u và v.

Khả năng 1. Nếu $u = 0$ và $v \neq 0$, khi đó ta chọn $g_2 = 0, g_3 = -\dfrac{q}{v}$ và $g_4 = \dfrac{r}{v}$. Với cách chọn như vậy thì ma trận B có dạng $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}$

Mặt khác vì $u = 0$ và kết hợp với điều kiện (3) suy ra $a \neq 0$, đồng thời kết hợp với điều kiện (4) suy ra $p = 0$. Khi đó $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}$ là ma trận đường chéo.

Khả năng 2. Nếu $u \neq 0$ và $v = 0$, khi đó ta chọn $g_2 = -\dfrac{p}{u}$ và $g_4 = -\dfrac{r}{2u}$. Với cách chọn như trên thì ma trận B có dạng $B = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u \end{bmatrix}$

Mặt khác vì $v = 0$ và kết hợp với điều kiện (3) suy ra $b \neq 0$, đồng thời kết hợp với điều kiện (4) suy ra $q = 0$. Khi đó $B = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u \end{bmatrix}$ là ma trận đường chéo.

Khả năng 3. Nếu $2u = v \neq 0$, khi đó ta chọn $g_2 = -\dfrac{p}{u}$ và $g_3 = -\dfrac{q}{v}$ và $g_4 = 0$. Với cách chọn như trên thì ma trận B có dạng $B = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2u & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4u \end{bmatrix}$

Nếu $r \neq 0$, khi đó từ hệ phương trình (4) suy ra $2a = b$, điều này mâu thuận với diều kiện (3). Vậy $r = 0$, có nghĩa ma trận B được đưa về ma trận đường chéo có dạng $B = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4u \end{bmatrix}$.

Khả năng 4. Nếu $2u \neq v \neq 0$, thì ta chọn $g_2 = -\dfrac{p}{u}$, $g_3 = -\dfrac{q}{v}$ và $g_4 = -\dfrac{r}{2u - v}$. Khi đó ma trận B có dạng $B = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u + v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u + v \end{bmatrix}$.

Do đó B đưa được về dạng chéo.

Vì hệ phương trình (4), nên phép biến đổi cơ sở $(\mathcal{G})$ trong cả 4 khả năng vừa xét ở trên không làm thay đổi ma trận A. Như vậy Mệnh đề 2.1.4 này được quy về Mệnh đề 2.1.3. □

2.1.5. Mệnh đề. *Nếu cả hai ma trận A và B không có dạng chéo thì phép biến đổi cơ sở $(\mathcal{G})$ luôn đưa A và B về dạng chéo.*

Chứng minh. Thực hiện giống như cách chứng minh Mệnh đề 2.1.4, ta chia thành hai trường hợp.

Trường hợp 1. Theo Mệnh đề 2.1.4 khi $w = 0$, nếu ta thực hiện phép biến đổi $(\mathcal{G})$ với $g_1 = 0$ thì ma trận Bcó dạng $B = \begin{bmatrix} u & p' & q' & 0 & 0 \\ 0 & v & r' & p' & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u+v \end{bmatrix}$,

trong đó $\begin{cases} p' = p + ug_2 \\ q' = q + vg_3 \\ r' = r + (2u - v)g_4 \end{cases}$. Do đó ta xét các khả năng sau.

Khả năng 1. Nếu $u = 0$ và $v \neq 0$. Khi đó theo Mệnh đề 2.1.4 thì ma trận B có dạng $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}$. Mặt khách từ hệ phương trình (2) ta có $ap = 0$. Mà $u = 0$ và kết hợp với điều kiện (3) ta có $a \neq 0 \Rightarrow p = 0$.

Vậy dạng đường chéo của B là $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}$.

Khả năng 2. Nếu $u \neq 0$ và $v = 0$. Từ Mệnh đề 2.1.4 thì ma trận B có dạng $B = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u \end{bmatrix}$. Từ hệ phương trình (2) ta có $bq = 0$. Mà $v = 0$ và kết hợp với điều kiện (3) ta có $b \neq 0 \Rightarrow q = 0$.

Vậy dạng chéo của B là $B = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u \end{bmatrix}$.

Khả năng 3. Nếu $2u = v \neq 0$. Từ Mệnh đề 2.1.4 ta có dạng của ma trận B là $B = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2u & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4u \end{bmatrix}$.

Từ hệ phương trình (2) ta có $(2a-b)r=0$. Mà $2u=v$ và kết hợp với điều kiện (3) ta có $2a-b\neq 0 \Rightarrow q=0$.

Vậy B được đưa về dạng chéo là $B=\begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4u \end{bmatrix}$.

Khả năng 4. Nếu $2u\neq v\neq 0$. Chứng minh tương tự như Mệnh đề 2.1.4, ta chọn $g_2=-\dfrac{p}{u}$, $g_3=-\dfrac{q}{v}$ và $g_4=-\dfrac{r}{2u-v}$.

Khi đó B đưa về ma trận chéo có dạng $B=\begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u+v \end{bmatrix}$.

Trường hợp 2. Nếu $w\neq 0$. Trước hết ta nhận thấy, nếu $c=0$ thì làm tương tự như đối với ma trận B, ta luôn đưa ma trận A về dạng chéo. Do đó, ta chỉ xét trường hợp $cw\neq 0$. Lúc này, nếu $u-v=0$ thì từ hệ phương trình (2) suy ra $a-b=0$. Điều này mâu thuận với điều kiện (3). Vậy $u-v\neq 0$. Thực hiện phép biến đổi $\mathcal{G}$ với $g_2=g_3=g_4=0$, khi đó ta luôn chọn được g_1 để $w=0$ và trở lại Trường hợp 1. $\square$

Tóm lại: Mệnh đề 2.1.5 này được quy về Mệnh đề 2.1.4. Do đó qua kết quả của ba mệnh đề trên, ta thấy chỉ còn lại đại số Lie thực giải được bất khả phân $7-$ chiều có căn lũy linh $5-$ chiều $\mathbf{h}_{5,3}$ được xây dựng trong Mệnh đề 2.1.3. Tức là đại số Lie có các ma trận cấu trúc (A,B) là

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

và tích Lie $[U,V]=0$.

Từ các kết quả của ba mệnh đề trên đã giúp ta mô tả được đại số Lie thực giải được $7-$ chiều, bất khả phân, có căn lũy linh là đại số Lie lũy linh $5-$ chiều $\mathbf{h}_{5,3}$. Bài toán mô tả này được thể hiện bởi đinh lý sau đây.

2.1.6. Định lý. *Cho* $\mathbf{g}$ *là đại số Lie thực giải được* $7-$ *chiều, bất khả phân, có căn lũy linh là đại số Lie lũy linh* $5-$ *chiều* $\mathbf{h}_{5,3}$. *Khi đó* $\mathbf{g}$ *đẳng cấu với đại số Lie* $\boldsymbol{k} = span\{u_1, u_2, \ldots, u_7\}$ *với các tích Lie không tầm thường xác định như sau:*

$$
\begin{array}{llll}
[u_1, u_2] = u_4 & [u_1, u_4] = u_5 & [u_2, u_3] = u_5 & \\
[u_6, u_1] = u_1 & [u_6, u_4] = u_4 & [u_6, u_3] = 2u_3 & [u_6, u_5] = 2u_5 \\
[u_7, u_2] = u_2 & [u_7, u_4] = u_4 & [u_7, u_5] = u_5. &
\end{array}
$$

Chứng minh. Việc chứng minh định lý này đã được thực hiện từng bước trong việc tính toán và chứng minh ba mệnh đề trên. □

2.2 Biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của một lớp đại số Lie giải được $7-$ chiều có căn lũy linh $5-$ chiều.

Như ta đã biết biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp là một trong những biểu diễn khá quan trọng trong biểu diễn đại số Lie. Phần còn lại của luận văn chúng tôi trình bày cách mô tả biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của đại số Lie **k** đã được xây dựng trong Định lý 2.1.6. Cụ thể trước hết chúng tôi mô tả biểu diễn phụ hợp của **k** trên chính nó và biểu diễn đối phụ hợp của **k** trên không gian đối ngẫu $\mathbf{k}^*$ của **k**.

Với đại số Lie **k** và $x \in \mathbf{k}$. Khi đó ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned} ad_x: \ \ \mathbf{k} &\longrightarrow \mathbf{k} \\ y &\longmapsto ad_x(y) = [x, y] \end{aligned}$$

là một vi phân, có nghĩa là:

$$ad_x[y, z] = [ad_x(y), z] + [y, ad_x(z)].$$

Các vi phân của **k** có dạng ad_x được gọi là *vi phân trong.*
Ta xét ánh xạ

$$\begin{aligned} ad\text{:} \ \ \mathbf{k} &\longrightarrow gl(\mathbf{k}) \\ x &\longmapsto ad_x. \end{aligned}$$

Khi đó, ánh xạ ad là một đồng cấu của đại số Lie, vì:

$$\begin{aligned} [ad_x, ad_y](z) &= ad_x \circ ad_y(z) - ad_y \circ ad_x(z) \\ &= ad_x([y, z]) - ad_y([x, z]) \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [[x, z], y] \\ &= [[x, y], z] \\ &= ad_{[x,y]}(z). \end{aligned}$$

Đồng cấu đại số Lie $ad : \mathbf{k} \longrightarrow gl(\mathbf{k})$ xác định như trên được gọi là *biểu diễn phụ hợp* của **k**.

Bây giờ ta xét đại số Lie **k** được xây dưng trong Định lý 2.1.6.

2.2.1. Định lý. *Cho đại số Lie* $\mathbf{k} = span\{u_1, u_2, \ldots, u_7\}$ *với các tích Lie không tầm thường là:*

$$[u_1, u_2] = u_4 \quad [u_1, u_4] = u_5 \quad [u_2, u_3] = u_5$$
$$[u_6, u_1] = u_1 \quad [u_6, u_4] = u_4 \quad [u_6, u_3] = 2u_3 \quad [u_6, u_5] = 2u_5$$
$$[u_7, u_2] = u_2 \quad [u_7, u_4] = u_4 \quad [u_7, u_5] = u_5.$$

Giả sử ad *là biểu diễn phụ hợp của đại số Lie* $7-$ *chiều* **k**. *Khi đó ma trận của* ad *đối với cơ sở* $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_7\}$ *là*

$$P_{ad} = \begin{bmatrix} x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t_1 & 0 \\ 0 & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t_2 \\ 0 & 0 & 2t_6 & 0 & 0 & -2t_3 & 0 \\ -t_2 & t_1 & 0 & t_6 + t_7 & 0 & -t_4 & -t_4 \\ -t_4 & -t_3 & t_2 & t_1 & 2t_6 + t_7 & -2t_5 & -t_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chứng minh. Theo trên, biểu diễn phụ hợp của **k** là đồng cấu đại số Lie

$$ad\colon\ \mathbf{k} \longrightarrow gl(\mathbf{k})$$
$$x \longmapsto ad_x,$$

trong đó

$$ad_x :\ \mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k}$$
$$y \longmapsto ad_x(y) = [x, y].$$

Ta có

$$Ker(ad) = \{x \in \mathbf{k} \mid ad(x) = 0\}.$$

Vậy $x \in Ker(ad) \Leftrightarrow ad(x) = 0 \Leftrightarrow ad(x)(y) = ad_x(y) = 0, \forall y \in \mathbf{k}$
$\Leftrightarrow [x, y] = xy - yx = 0, \forall y \in \mathbf{k} \Rightarrow xy = yx, \forall y \in \mathbf{k} \Rightarrow y \in Z(\mathbf{k})$ (tâm của **k**)
$\Rightarrow Ker(ad) \subseteq Z(\mathbf{k})$ và hiển nhiên $Z(\mathbf{k}) \subseteq Ker(ad)$. Do đó $Ker(ad) = Z(\mathbf{k})$.
Mặt khác ta cũng dễ dàng chứng minh được $Ker(ad) = Z(\mathbf{k}) = \{0\}$.
Vậy biểu diễn phụ hợp ad của **k** là biểu diễn trung thành.

Lấy $g \in \mathbf{k}$ và vì $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_7\}$ là cơ sở của **k** nên tồn tại $t_i \in \mathbb{R}(i = \overline{1,7})$ sao cho $g = \sum\limits_{i=1}^{7} t_i u_i$. Bây giờ ta kết hợp với tích Lie

$$
\begin{array}{llll}
[u_1, u_2] = u_4 & [u_1, u_4] = u_5 & [u_2, u_3] = u_5 & \\
[u_6, u_1] = u_1 & [u_6, u_4] = u_4 & [u_6, u_3] = 2u_3 & [u_6, u_5] = 2u_5 \\
[u_7, u_2] = u_2 & [u_7, u_4] = u_4 & [u_7, u_5] = u_5. &
\end{array}
$$

để tìm ảnh của các vectơ trong cơ sở U qua biểu diễn ad.

$$
\begin{aligned}
ad_g(u_1) &= [g, u_1] = gu_1 - u_1 g = \sum_{i=1}^{7} t_i u_i u_1 - u_1 \sum_{i=1}^{7} t_i u_i \\
&= (t_1u_1 + t_2u_2 + \cdots + t_7u_7)u_1 - u_1(t_1u_1 + t_2u_2 + \ldots + t_7u_7) \\
&= t_6u_1 - t_2u_4 - t_4u_5.
\end{aligned}
$$

Tính tương tự ta có:

$$
\begin{aligned}
ad_g(u_2) &= [g, u_2] = gu_2 - u_2 g = t_7u_2 + t_1u_4 - t_3u_5 \\
ad_g(u_3) &= [g, u_3] = gu_3 - u_3 g = 2t_6u_3 + t_2u_5 \\
ad_g(u_4) &= [g, u_4] = gu_4 - u_4 g = (t_6 + t_7)u_4 + t_1u_5 \\
ad_g(u_5) &= [g, u_5] = gu_5 - u_5 g = (2t_6 + t_7)u_5 \\
ad_g(u_6) &= [g, u_6] = gu_6 - u_6 g = -t_1u_1 - 2t_3u_3 - t_4u_4 - 2t_5u_5 \\
ad_g(u_7) &= [g, u_7] = gu_7 - u_7 g = -t_2u_2 - t_4u_4 - t_5u_5.
\end{aligned}
$$

Vậy, từ sự biểu thị tuyến tính trên, ta có ma trận của biểu diễn phụ hợp ad của **k** đối với cơ sở U là:

$$
P_{ad} = \begin{bmatrix}
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t_1 & 0 \\
0 & t_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t_2 \\
0 & 0 & 2t_6 & 0 & 0 & -2t_3 & 0 \\
-t_2 & t_1 & 0 & t_6 + t_7 & 0 & -t_4 & -t_4 \\
-t_4 & -t_3 & t_2 & t_1 & 2t_6 + t_7 & -2t_5 & -t_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

$\square$

Với đại số Lie **k** trên trường số thực $\mathbb{R}$. Ký hiệu

$$\mathbf{k}^* = Hom(\mathbf{k}, \mathbb{R}) = \{\phi : \mathbf{k} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ là dạng tuyến tính } \}$$

là không gian đối ngẫu của **k**. Khi đó biểu diễn đối phụ hợp ad^* của **k** trên không gian đối ngẫu $\mathbf{k}^*$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} ad^* : \quad & \mathbf{k} \longrightarrow gl(\mathbf{k}^*) \\ & g \longmapsto ad^*(g) = ad^*_g, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} ad^*_g : \quad & \mathbf{k}^* \longrightarrow \mathbf{k}^* \\ & f \longmapsto ad^*_g(f) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} ad^*_g(f) : \quad & \mathbf{k} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & h \longmapsto ad^*_g(f)(h) =< ad^*_g(f), h >:=< f, -ad_g(h) >=< f, -[g,h] > . \end{aligned}$$

Vậy, để xác định biểu diễn đối phụ hợp ad^* của đại số Lie **k** trên không gian đối ngẫu $\mathbf{k}^*$ ta chỉ cần lấy đối ngẫu và đổi dấu của biểu diễn phụ hợp ad.

Từ cách xây dựng biểu diễn đối phụ hợp ad^* như ở trên, ta dễ dàng chứng minh được $Ker(ad) = Z(\mathbf{k}) = \{0\}$. Vậy cũng giống như biểu diễn phụ hợp ad thì biểu diễn đối phụ hợp ad^* cũng là biểu diễn trung thành.

Bây giờ ta xét đại số Lie **k** được xây dưng trong Định lý 2.1.6.

2.2.2. Định lý. *Cho đại số Lie* $\mathbf{k} = span\{u_1, u_2, \ldots, u_7\}$ *với các tích Lie không tầm thường là:*

$$\begin{array}{llll} [u_1, u_2] = u_4 & [u_1, u_4] = u_5 & [u_2, u_3] = u_5 & \\ [u_6, u_1] = u_1 & [u_6, u_4] = u_4 & [u_6, u_3] = 2u_3 & [u_6, u_5] = 2u_5 \\ [u_7, u_2] = u_2 & [u_7, u_4] = u_4 & [u_7, u_5] = u_5. & \end{array}$$

Giả sử ad^* *là biểu diễn đối phụ hợp của đại số Lie* **k** *trên không gian đối ngẫu* $\mathbf{k}^*$.

Khi đó ma trận của ad^* *đối với cơ sở đối ngẫu* $U^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_7^*\}$ *là*

$$P_{ad^*} = \begin{bmatrix} -t_6 & 0 & 0 & t_2 & t_4 & 0 & 0 \\ 0 & -t_7 & 0 & -t_1 & t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2t_6 & 0 & -t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(t_6+t_7) & -t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(2t_6+t_7) & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 2t_3 & t_4 & 2t_5 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & t_4 & t_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Lấy $g \in \mathbf{k}$ và vì $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_7\}$ là cơ sở của $\mathbf{k}$ nên tồn tại $t_i \in \mathbb{R}$ sao cho $g = \sum\limits_{i=1}^{7} t_i u_i$. Chọn cơ sở đối ngẫu $U^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_7^*\}$ cho $\mathbf{k}^*$. Giả sử P_{ad} là ma trận của biểu diễn phụ hợp ad đối với cơ sở đối ngẫu U và P_{ad^*} là ma trận của biểu diễn đối phụ hợp ad^* đối với cơ sở đối ngẫu U^*. Khi đó theo định nghĩa biểu diễn đối phụ hợp, ta có $P_{ad^*} = -(P_{ad})^T$. Do đó theo Định lý 2.2.1, ta có

$$P_{ad^*} = \begin{bmatrix} -t_6 & 0 & 0 & t_2 & t_4 & 0 & 0 \\ 0 & -t_7 & 0 & -t_1 & t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2t_6 & 0 & -t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(t_6+t_7) & -t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(2t_6+t_7) & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 2t_3 & t_4 & 2t_5 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & t_4 & t_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Kết luận

Luận văn có mục đích tìm tòi, nghiên cứu một số tính chất về lớp các đại số Lie giải được hữu hạn chiều. Cụ thể chúng tôi đã trình bày được một số vấn đề sau:

1. Trình bày một cách có hệ thống định nghĩa và các tính chất về đại số Lie, đại số Lie giải được, đặc biệt lớp các đại số Lie giải được hữu hạn chiều với căn lũy linh của nó cũng có chiều hữu hạn.

2. Trình bày cách xây dựng mở rộng một đại số lũy linh $5-$ chiều để được một đại số Lie giải được bất khả $7-$ chiều nhận nó làm căn lũy linh. Cụ thể từ đại số lũy linh $5-$ chiều $\mathbf{h} = \mathbf{g}_{5,3}$ đã xây dựng được duy nhất (sai khác một đẳng cấu) một đại số Lie thực bất khả phân $7-$ chiều $\mathbf{g}$ nhận $\mathbf{h}$ làm căn lũy linh. Kết quả này được trình bày trong Mệnh đề 2.1.3, Mệnh đề 2.1.4, Mệnh đề 2.1.5 và đặc biệt là Định lý 2.1.6.

3. Mô tả được biểu diễn phụ hợp của đại số Lie $\mathbf{k}$ (đã xây dựng ở trên) trên chính nó, biểu diễn đối phụ hợp của $\mathbf{g}$ trên không gian đối ngẫu $\mathbf{k}^*$. Các kết quả này được thể hiện trong Định lý 2.2.1 và Định lý 2.2.2.

Tài liệu tham khảo

[1]. P. M. Gong (1998), "Classification of Nilpotent Lie algebras of Dimension 7 (Over Algebraically Closed Fields and $\mathbb{R}$)". *PhD. Thesis. University of Waterloo, Ontario, Canada.*

[2]. F. Hindeleh and G. Thompson (2008), "Seven dimensional Lie algebras with a fourdimensional nilradical". *Algebras, Groups and Geometries,* **25(3)**, 243 - 265.

[3]. G. M. Mubarakzyanov (1963). "Classification of solvable Lie algebras of dimension 6 with one nonnilpotent basis elemennt". *Izv. Vyssh Uchebn. Zaved. Mat*, **4**, 104 -116.

[4]. R. A. Parry (2007). "A classification og real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals". *Master Thesis.* Utah State University, Logan, Utah.

[5]. G. Tsagas (1999). "Classification of nilpotent Lie algebras of dimension eigh". *J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser*, **12(3)**, 179 - 183.

[6] R. Turkowski (1990) "Solvable Lie algebras of dimension six". *J. Math. Phys*, **31(6)**, 1344 - 1350.

[7]. Vu A. Le, Tuan A. Nguyen, Tu T. C. Nguyen, Tuyen T. M. Nguyen, Thieu N. Vo (2021). "Classification of 7 dimensional solable Lie algebras having 5 dimensional nilradicals". *arXiv: 2107.03990v1 [math.RA] 8 Jul 2021.*

[8]. V. Kac (1985), *Infinite - dimensional Lie algebras*, Cambrigde University Press, New York.