

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

LÊ THỊ NAM

ĐA THỨC DUY NHẤT MẠNH
CHO HỌ CÁC HÀM PHÂN HÌNH KHÁC HẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGHỆ AN - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

LÊ THỊ NAM

ĐA THỨC DUY NHẤT MẠNH
CHO HỌ CÁC HÀM PHÂN HÌNH KHÁC HẰNG

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN THỊ NGỌC DIỆP

NGHỆ AN - 2022

Mục lục

MỞ ĐẦU	2
CHƯƠNG 1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	4
1.1 Trường định chuẩn	4
1.2 Đa tạp trong không gian afin và không gian xạ ảnh	7
1.3 Đường cong phẳng trong mặt phẳng afin	10
CHƯƠNG 2 ĐA THỨC DUY NHẤT MẠNH CHO HỌ CÁC HÀM PHÂN HÌNH KHÁC HẰNG	14
2.1 Thành phần bất khả quy của các đường cong	14
2.2 Đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình khác hằng	21
KẾT LUẬN	30
TÀI LIỆU THAM KHẢO	31

MỞ ĐẦU

Giả sử K là trường đóng đại số, đầy đủ với giá trị tuyệt đối không Acsimet. Ký hiệu $\mathcal{H}^*(K)$ là tập các hàm phân hình khác hằng xác định trên trường K và $\mathcal{F}$ là tập con khác rỗng của $\mathcal{H}^*(K)$.

Đa thức một biến P trên trường K được gọi là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm $\mathcal{F}$ nếu với mọi hàm khác hằng $f, g \in \mathcal{F}$ và hằng số c khác không thỏa mãn $P(f) = cP(g)$ thì $c = 1$ và $f = g$. Đa thức duy nhất mạnh đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Năm 2003, trong bài báo [4], các tác giả T. T. H. An, J. T. Y. Wang và P. M. Wong đã chỉ ra một lớp các đa thức đặc biệt là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình bằng cách xây dựng các 1–dạng chính quy kiểu Wronski. Tiếp tục hướng nghiên cứu về đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình, năm 2005, nhóm tác giả này xem xét những lớp đa thức tổng quát hơn.

Trong luận văn này, chúng tôi tập trung tìm hiểu đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình khác hằng. Nội dung chính của luận văn là tìm hiểu và trình bày một cách chi tiết những kết quả trong bài báo “Unique range sets and uniqueness polynomials in positive characteristic II” của các tác giả T. T. H. An, J. T. Y. Wang và P. M. Wong trên tạp chí Acta Arithmetica [5].

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được chia thành hai chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản nhằm mục đích làm cơ sở cho việc trình bày nội dung của Chương 2. Ngoài ra chúng

tôi còn trích dẫn một số kết quả đã có nhằm phục vụ cho các chứng minh ở phần sau.

Chương 2. Đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình khác hằng

Trong chương này chúng tôi trình bày một cách chi tiết những kết quả trong bài báo "Unique range sets and uniqueness polynomials in positive characteristic II" của các tác giả T. T. H. An, J. T. Y. Wang và P. M. Wong. Cụ thể chúng tôi trình bày các vấn đề sau:

2.1. Thành phần bất khả quy của các đường cong

2.2. Đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình khác hằng

Để hoàn thành luận văn này, tôi xin chân thành cảm ơn sự hướng dẫn tận tình, chu đáo của TS. Nguyễn Thị Ngọc Diệp và tất cả Thầy giáo, Cô giáo thuộc chuyên ngành Đại số - Lý thuyết số – Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập. Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn có thể còn có những thiếu sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý của các Thầy Cô và các bạn học viên.

Nghệ An, tháng 06 năm 2022

Tác giả

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi trình bày những kiến thức cơ bản nhằm mục đích làm cơ sở cho việc trình bày nội dung của Chương 2. Ngoài ra chúng tôi còn trích dẫn một số kết quả đã có nhằm phục vụ cho các chứng minh ở phần sau. Những nội dung này chủ yếu được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [3] và [8].

1.1 Trường định chuẩn

1.1.1 Định nghĩa. Trường K cùng với ánh xạ $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *một trường định chuẩn* nếu các điều kiện sau đây thỏa mãn:

- (1) $\varphi(u) \geq 0, \forall u \in K, \varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0,$
- (2) $\varphi(u + v) \leq \varphi(u) + \varphi(v), \forall u, v \in K,$
- (3) $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v), \forall u, v \in K.$

Nếu thay điều kiện thứ hai bằng điều kiện sau

- (4) $\varphi(u + v) \leq \max\{\varphi(u), \varphi(v)\}, \forall u, v \in K$

thì trường định chuẩn (K, φ) được gọi là *trường định chuẩn không Acsimet*.

1.1.2 Ví dụ. (1) Trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, trường số thực $\mathbb{R}$ với chuẩn giá trị tuyệt đối thông thường là những trường định chuẩn.

(2) Trường số phức $\mathbb{C}$ với chuẩn môđun là trường định chuẩn

$$\varphi(x + yi) = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall x + yi \in \mathbb{C}.$$

1.1.3 Định nghĩa. Cho p là một số nguyên tố cố định. Mỗi số hữu tỷ $u \neq 0$ đều có thể viết được một cách duy nhất dưới dạng

$$u = \frac{a}{b}p^n, \quad a, b, n \in \mathbb{Z},$$

a, b không chia hết cho p . Chuẩn p -adic $|\cdot|_p$ trên trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ là hàm số $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi_p(0) = |0|_p = 0; \quad \varphi_p(u) = |u|_p = p^{-n}.$$

Khi đó trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ với chuẩn p -adic là chuẩn không Acsimet.

1.1.4 Mệnh đề. Cho (K, φ) là một trường định chuẩn. Khi đó:

$$i) \quad \varphi(1) = \varphi(-1) = 1.$$

$$ii) \quad \varphi(u) = \varphi(-u), \quad \forall u \in K.$$

$$iii) \quad |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \varphi(u - v), \quad \forall u, v \in K.$$

$$iv) \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(u_i).$$

$$v) \quad \varphi(u^{-1}) = \varphi(u)^{-1} = \frac{1}{\varphi(u)}, \quad \forall u \in K, \quad u \neq 0.$$

$$vi) \quad \varphi(uv^{-1}) = \frac{\varphi(u)}{\varphi(v)}, \quad \forall u, v \in K, \quad v \neq 0.$$

1.1.5 Định nghĩa. Giả sử (K, φ) là một trường định chuẩn. Một dãy các phần tử $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ của trường định chuẩn K , được gọi là *hội tụ* về phần tử $u \in K$ theo chuẩn φ , nếu với mỗi số thực $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\varphi(u_n - u) < \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Ta ký hiệu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u.$$

Dãy các phần tử $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ của trường định chuẩn K được gọi là một *dãy không* (theo chuẩn φ) nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Một dãy các phần tử $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ của trường định chuẩn K được gọi là *dãy cơ bản* hay *dãy Cauchy* (theo chuẩn φ) nếu với mỗi số thực $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\varphi(u_n - u_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m > n_0.$$

Trường định chuẩn (K, φ) được gọi là *trường định chuẩn đầy đủ theo chuẩn φ* nếu mọi dãy cơ bản trong K đều là dãy hội tụ theo chuẩn φ .

1.1.6 Mệnh đề. Mọi dãy hội tụ trong trường định chuẩn (K, ψ) đều là dãy cơ bản. Điều ngược lại không đúng.

1.1.7 Định lý. Chuẩn ψ trên trường định chuẩn K là chuẩn không Acsimet khi và chỉ khi $\psi(m) \leq 1$, với mọi số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$.

1.1.8 Định nghĩa. Ta nói rằng các chuẩn φ và ψ trên cùng một trường K là *tương đương* với nhau nếu φ và ψ xác định trên K cùng một tính hội tụ, nghĩa là $\varphi(u_n - u) \rightarrow 0$ khi và chỉ khi $\psi(u_n - u) \rightarrow 0$ theo chuẩn giá trị tuyệt đối trong trường số thực $\mathbb{R}$.

1.1.9 Mệnh đề. Hai chuẩn φ và ψ trên trường K tương đương với nhau khi và chỉ khi:

$$\forall u \in K \quad (\varphi(u) < 1 \Leftrightarrow \psi(u) < 1).$$

1.1.10 Mệnh đề. Trên một trường hữu hạn $\mathcal{F}$ chỉ có duy nhất một chuẩn tầm thường.

1.1.11 Mệnh đề. Cho φ là chuẩn không Acsimet trên trường định chuẩn K . Nếu các giá trị thực $\varphi(u)$ và $\psi(v)$ khác nhau thì

$$\varphi(u + v) = \max\{\varphi(u), \varphi(v)\}, \quad \forall u, v \in K.$$

1.2 Đa tập trong không gian afin và không gian xạ ảnh

Trong suốt chương này ta ký hiệu k là một trường.

1.2.1 Định nghĩa. Cho đa thức $E(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$. Một điểm

$$W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{A}^n(k)$$

được gọi là *không điểm* của đa thức $E(x_1, \dots, x_n)$ nếu

$$E(W) = E(w_1, \dots, w_n) = 0.$$

Nếu E không là hằng thì tập hợp các không điểm của E được gọi là *siêu mặt* xác định bởi E , ký hiệu là $Z(E)$. Như vậy

$$Z(E) = \{ W \in \mathbb{A}^n(k) \mid E(W) = 0 \}.$$

1.2.2 Định nghĩa. Giả sử $\mathcal{A}$ là tập các đa thức bất kỳ trong vành đa thức $k[x_1, \dots, x_n]$. Khi đó tập hợp

$$Z(\mathcal{A}) = \{ W \in \mathbb{A}^n(k) \mid E(W) = 0, \forall E \in \mathcal{A} \}$$

được gọi là *tập đại số* trong $\mathbb{A}^n(k)$.

1.2.3 Ví dụ. (1) Tập rỗng $\emptyset$ là tập đại số vì $\emptyset$ là tập nghiệm của phương trình $h = 0$, với mọi $h \in k$, $h \neq 0$.

(2) Mỗi điểm $W = (w_1, \dots, w_n)$ trong không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$ là một tập đại số vì W là tập nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - w_1 = 0 \\ x_2 - w_2 = 0 \\ \dots \\ x_n - w_n = 0 \end{cases}$$

nghĩa là

$$W = Z(x_1 - w_1, x_2 - w_2, \dots, x_n - w_n).$$

(3) Tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính là tập đại số và được gọi là *đa tập tuyến tính*.

(4) Không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$ là tập đại số trong $\mathbb{A}^n(k)$ vì $\mathbb{A}^n(k)$ là tập nghiệm của phương trình $0 = 0$.

1.2.4 Mệnh đề. *i) Cho $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ là các hệ đa thức trong vành đa thức $k[x_1, \dots, x_n]$. Nếu $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$ thì $Z(\mathcal{A}_1) \subseteq Z(\mathcal{A}_2)$.*

ii) Giả sử $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ là các hệ đa thức trong vành đa thức $k[x_1, \dots, x_n]$. Khi đó

$$Z(\mathcal{A}_1) \cup Z(\mathcal{A}_2) = Z(\mathcal{A}),$$

trong đó

$$\mathcal{A} = \{hg \mid h \in \mathcal{A}_1, g \in \mathcal{A}_2\}.$$

iii) Giả sử $\{\mathcal{A}_i\}$ là một hệ các hệ đa thức trong vành đa thức $k[x_1, \dots, x_n]$. Khi đó

$$\bigcap_i Z(\mathcal{A}_i) = Z\left(\bigcup_i \mathcal{A}_i\right).$$

1.2.5 Chú ý. Theo mệnh đề 1.2.4 thì trong không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$ ta có hợp của hai tập đại số là một tập đại số, giao của một họ tùy ý các tập đại số là một tập đại số. Đồng thời tập rỗng và toàn bộ không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$ cũng là các tập đại số. Do đó ta có thể trang bị tôpô trên không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$ bằng cách coi các tập đại số là các tập đóng. Tôpô này được gọi là *tôpô Zariski* trên không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$.

1.2.6 Định nghĩa. *i) Ta nói rằng tập đại số M trong không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$ là khả quy nếu*

$$M = M_1 \cup M_2,$$

trong đó M_1, M_2 là các tập đại số trong $\mathbb{A}^n(k)$ và $M_1 \neq M, M_2 \neq M$. Trong trường hợp ngược lại, tập đại số M được gọi là *bất khả quy*.

- ii) Một tập đại số bất khả quy trong không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$ được gọi là một *đa tập afin*.
- iii) Một tập con mở của một đa tập afin trong không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$ được gọi là *đa tập tựa afin*.

1.2.7 Định lý. *Giả sử M là tập đại số trong không gian afin $\mathbb{A}^n(k)$. Khi đó tồn tại duy nhất các tập đại số bất khả quy $M_1, M_2, \dots, M_m$ sao cho*

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m,$$

trong đó $M_i \not\subset M_j$, với mọi $i \neq j$.

Các tập đại số bất khả quy M_i được gọi là *các thành phần bất khả quy* của tập đại số M và $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m$ là sự phân tích M thành các thành phần bất khả quy.

Giả sử S là đa thức thuần nhất bậc s trong vành đa thức $k[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Ta có

$$S(\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_{n+1}) = \lambda^s S(u_1, u_2, \dots, u_{n+1}),$$

với mọi điểm

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}(k), \lambda \in k.$$

Vì vậy nếu u là nghiệm của S thì λu cũng là nghiệm của S .

Lưu ý rằng điểm 0 là nghiệm của mọi đa thức thuần nhất.

Để xét nghiệm của đa thức thuần nhất ta chia tập $\mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$ theo quan hệ tương đương

$$u \sim v \text{ nếu tồn tại } \lambda \neq 0 \text{ sao cho } v = \lambda u.$$

Tập hợp các lớp tương đương này được gọi là *không gian xạ ảnh n chiều* trên trường k và ký hiệu là $\mathbb{P}^n(k)$.

Với mỗi điểm $u \in \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$ ta cũng dùng ký hiệu u để chỉ lớp các điểm tương đương với u . Khi đó ta coi u như là điểm của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(k)$.

1.2.8 Định nghĩa. i) Cho đa thức $R \in k[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Nếu $R(\lambda u) = 0$ với mọi $\lambda \in k$ thì điểm

$$u \in \mathbb{P}^n(k)$$

được gọi là *nghiệm xạ ảnh* của đa thức R .

ii) Giả sử $\mathcal{B}$ khác rỗng là tập gồm các đa thức thuần nhất trong vành đa thức $k[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Khi đó tập hợp

$$Z(\mathcal{B}) = \{u \in \mathbb{P}^n(k) \mid R(u) = 0 \text{ với mọi } R \in \mathcal{B}\}$$

được gọi là *tập đại số xạ ảnh* trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(k)$.

1.2.9 Định nghĩa. i) Nếu tập đại số M trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(k)$ không là hợp của hai tập đại số bé hơn thực sự thì ta nói rằng M bất khả quy.

ii) Một tập đại số bất khả quy trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(k)$ được gọi là một *đa tạp xạ ảnh*.

iii) Một tập con mở của một đa tạp xạ ảnh trong không gian xạ ảnh gọi là *đa tạp tựa xạ ảnh*.

1.3 Đường cong phẳng trong mặt phẳng afin

1.3.1 Định nghĩa. Đường cong phẳng $\mathcal{L}$ trong $\mathbb{A}^2(k)$ xác định bởi đa thức $R(x, y)$ là

$$\mathcal{L} = \{(u, v) \in \mathbb{A}^2(k) \mid R(u, v) = 0\}.$$

Đường cong $\mathcal{L}$ là bất khả quy nếu $R(x, y)$ bất khả quy. Bậc của đường cong xác định bởi đa thức $R(x, y)$ là bậc của đa thức $R(x, y)$.

Giả sử $R = \prod_i R_i^{e_i}$, trong đó R_i là các nhân tử bất khả quy của R và $e_i \geq 1$. Ta gọi các R_i là các thành phần của R và e_i là bội của thành phần R_i . Nếu $e_i = 1$ thì R_i gọi là *thành phần đơn*. Nếu $e_i > 1$ thì R_i gọi là *thành phần bội*.

Do vành đa thức $k[x, y]$ là vành nhân tử hóa nên mọi đa thức $R(x, y) \in k[x, y]$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành thành phần bất khả quy

$$R = R_1^{s_1} R_2^{s_2} \dots R_l^{s_l}$$

trong đó $R_1, R_2, \dots, R_l$ là các đa thức bất khả quy phân biệt và $s_1, s_2, \dots, s_l$ là các số tự nhiên.

Bây giờ ta ký hiệu

$$\mathcal{L}_i = \{(u, v) \in \mathbb{A}^2(k) \mid R_i(u, v) = 0\}, i = 1, 2, \dots, l.$$

Khi đó $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$) là các thành phần bất khả quy của đường cong $\mathcal{L}$ và đường cong $\mathcal{L}$ có sự phân tích thành các thành phần bất khả quy

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \dots \cup \mathcal{L}_l.$$

Giả sử đa thức hai biến $R(x, y)$ trên trường k có bậc n . Đặt

$$\tilde{R}(x, y, z) = z^n R\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right),$$

. Thế thì $\tilde{R}(x, y, z) \in k[x, y, z]$ là đa thức thuần nhất bậc n . $\tilde{R}(x, y, z)$ được gọi là *sự thuần nhất* của đa thức $R(x, y)$.

Ta ký hiệu

$$\tilde{\mathcal{L}} = \left\{ [u : v : w] \in \mathbb{P}^2(k) \mid \tilde{R}(u, v, w) = 0 \right\}$$

thì $\tilde{\mathcal{L}}$ được gọi là *đường cong xạ ảnh* tương ứng của đường cong $\mathcal{L}$. Điểm (u, v) thuộc đường cong $\mathcal{L}$ khi và chỉ khi điểm $(u, v, 1)$ thuộc đường cong $\tilde{\mathcal{L}}$.

Đường cong $\mathcal{L}$ bất khả quy khi và chỉ khi đường cong $\tilde{\mathcal{L}}$ bất khả quy. Nếu đường cong $\mathcal{L}$ có sự phân tích thành các thành phần bất khả quy

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \dots \cup \mathcal{L}_l$$

thì đường cong $\tilde{\mathcal{L}}$ cũng có sự phân tích thành các thành phần bất khả quy tương ứng

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_1 \cup \tilde{\mathcal{L}}_2 \cup \dots \cup \tilde{\mathcal{L}}_l.$$

1.3.2 Định nghĩa. Cho đường cong phẳng $\mathcal{L}$ trong không gian afin $\mathbb{A}^2(k)$ xác định bởi phương trình $R(x, y) = 0$ và điểm $N(u, v) \in \mathcal{L}$. Điểm N được gọi là *điểm đơn* của đường cong $\mathcal{L}$ nếu $\frac{\partial R}{\partial x}(N) \neq 0$ hoặc $\frac{\partial R}{\partial y}(N) \neq 0$. Đường thẳng xác định bởi phương trình

$$\frac{\partial R}{\partial x} \Big|_N (x - u) + \frac{\partial R}{\partial y} \Big|_N (y - v) = 0,$$

được gọi là *đường tiếp tuyến* với đường cong $\mathcal{L}$ tại điểm N . Một điểm không phải là điểm đơn thì gọi là *điểm kỳ dị*. Nếu mọi điểm của đường cong $\mathcal{L}$ là điểm đơn thì ta nói $\mathcal{L}$ là đường cong trơn.

1.3.3 Định nghĩa. Cho đường cong phẳng $\mathcal{L}$ trong không gian afin $\mathbb{A}^2(k)$ xác định bởi phương trình $R(x, y) = 0$ và điểm $N = (0, 0)$. Ta viết

$$R = R_t + R_{t+1} + \dots + R_n,$$

trong đó R_i là đa thức thuần nhất bậc i trong vành đa thức $k[x, y]$, $R_t \neq 0$. Ta gọi t là số bội của đường cong $\mathcal{L}$ tại $N = (0, 0)$ và viết $t = t_N(R) = t_N(\mathcal{L})$.

R_t là một đa thức thuần nhất hai biến trên trường đóng đại số nên ta viết được $R_t = \prod_i Q_i^{q_i}$ trong đó Q_i là các nhân tử tuyến tính. Các Q_i được gọi là các *đường tiếp tuyến* của đường cong $\mathcal{L}$ tại $N = (0, 0)$; q_i gọi là số bội của tiếp tuyến. Q_i gọi là *tiếp tuyến đơn* (kép, ...) nếu $q_i = 1$ (2, ...).

Nếu đường cong $\mathcal{L}$ có t tiếp tuyến đơn phân biệt tại N thì ta nói N là điểm kỳ dị chính tắc của đường cong $\mathcal{L}$.

Giả sử $R = \prod R_i^{e_i}$ là sự phân tích R thành các thành phần bất khả quy. Khi đó

$$t_N(R) = \sum_i e_i t_N(R_i),$$

Nếu Q là đường tiếp tuyến của R_j với số bội q_j thì Q là tiếp tuyến của R với bội số $\sum_i e_i q_i$.

1.3.4 Nhận xét. Các định nghĩa trên đây đều có thể mở rộng cho điểm $N = (u, v) \neq (0, 0)$ bằng cách sử dụng phép tịnh tiến $S(x, y) = (x + u, y + v)$ biến $(0, 0)$ thành N . Khi đó $R^s = R(x + u, y + v)$ và ta định nghĩa $t_N(R)$ chính là $t_{(0,0)}(R^s)$.

CHƯƠNG 2

ĐA THỨC DUY NHẤT MẠNH CHO HỌ CÁC HÀM PHÂN HÌNH KHÁC HẰNG

Trong chương này, chúng tôi tìm hiểu thành phần bất khả quy của các đường cong. Đồng thời, chúng tôi tìm hiểu một số điều kiện đủ để một đa thức một biến trên trường K là đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình khác hằng trên K trong trường hợp trường K có đặc số 0 hoặc đặc số không chia hết bậc của đa thức. Nội dung của chương này được tham khảo trong bài báo [5].

2.1 Thành phần bất khả quy của các đường cong

Giả sử K là một trường đóng đại số có đặc số $p \geq 0$, đầy đủ với giá trị tuyệt đối không Acsimet.

Trong suốt chương này chúng ta giả thiết rằng $P(X)$ là một đa thức bậc n trong $K[X]$. Ta ký hiệu l là số nghiệm phân biệt của $P'(X)$, và các nghiệm của $P'(X)$ là $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Ta ký hiệu $m_1, \dots, m_l$ lần lượt là các số bội của các nghiệm của $P'(X)$. Như vậy

$$P'(X) = a(X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_l)^{m_l}$$

trong đó a là hằng số khác 0.

2.1.1 Định nghĩa. Đa thức $P(X)$ gọi là *thỏa mãn Giả thiết I* nếu

$$P(\alpha_i) \neq P(\alpha_j), \quad (2.1)$$

với mọi $1 \leq i \neq j \leq l$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng ta có các α_i để m_i không tăng. Chúng ta lưu ý rằng Giả thiết I là một điều kiện chung và với Giả thiết I việc lập luận, tính toán được thuận lợi hơn.

Giả sử đa thức P có dạng

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

Ta ký hiệu μ_i là số bội của $X - \alpha_i$ trong $P(X) - P(\alpha_i)$. Khi đó $P(X) - P(\alpha_i)$ có dạng

$$P(X) - P(\alpha_i) = *(X - \alpha_i)^{\mu_i} + \dots + *(X - \alpha_i)^{m_i+1} + \dots + *(X - \alpha_i)^n \quad (2.2)$$

trong đó ta sử dụng $*$ để biểu thị phần tử khác 0 trong K . Chúng ta sẽ sử dụng ký hiệu này trong suốt Chương 2. Lưu ý rằng $\mu_i \leq m_i + 1$ kể cả trong trường hợp đặc số của K bằng không.

Ký hiệu $F(X, Y, Z)$ là đa thức thuần nhất của đa thức hai biến

$$\frac{P(X) - P(Y)}{X - Y} = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} X^{k-1-j} Y^j.$$

Ta có

$$F(X, Y, Z) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} a_k X^{k-1-j} Y^j Z^{n-k} = Z^n \frac{P(X/Z) - P(Y/Z)}{X - Y} \quad (2.3)$$

Ký hiệu C là đường cong xác định bởi phương trình $F(X, Y, Z) = 0$. Tương tự, giả sử $F_c(X, Y, Z)$ đa thức thuần nhất của đa thức $P(X) - cP(Y)$ với $c \neq 0, 1$, và C_c là đường cong được xác định bởi phương trình $F_c(X, Y, Z) = 0$. Mục đích của chúng ta là xây dựng trên đường cong C và mỗi đường cong

C_c , $c \neq 0, 1$, một 1– dạng chính quy hoặc tích các 1– dạng chính quy không tầm thường trên mỗi một thành phần của đường cong.

Bây giờ chúng ta xem xét việc xây dựng này trên đường cong xác định bởi phương trình $F(X, Y, Z) = 0$. Chúng ta có thể biểu diễn đa thức $F(X, Y, Z)$ dưới dạng một đa thức theo $X - \alpha_i Z$ và $Y - \alpha_i Z$:

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) = & * \left[\frac{(X - \alpha_i Z)^{\mu_i} - (Y - \alpha_i Z)^{\mu_i}}{X - Y} \right] Z^{n-\mu_i} \\ & + * \left[\frac{(X - \alpha_i Z)^{\omega_i} - (Y - \alpha_i Z)^{\omega_i}}{X - Y} \right] Z^{n-\omega_i} \\ & + \dots + * \left[\frac{(X - \alpha_i Z)^n - (Y - \alpha_i Z)^n}{X - Y} \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

trong đó ω_i là bậc của số hạng không triệt tiêu thứ hai trong (2.2). Từ (2.4) và $F(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = 0$ với tham số hóa $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ tại $p_i = (\alpha_i, \alpha_i, 1)$, ta có

$$\text{ord}_{p_i, \varphi}(X - \alpha_i Z) = \text{ord}_{p_i, \varphi}(Y - \alpha_i Z), \quad (2.5)$$

do đó

$$\text{ord}_{p_i, \varphi}(X - Y) = \text{ord}_{p_i, \varphi}(X - \alpha_i Z - (Y - \alpha_i Z)) \geq \text{ord}_{p_i, \varphi}(X - \alpha_i Z) \quad (2.6)$$

và

$$\text{ord}_{p_i, \varphi} \left((X - \alpha_i Z)^{\mu_i-1} + \dots + (Y - \alpha_i Z)^{\mu_i-1} \right) \geq (\omega_i - 1) \text{ord}_{p_i, \varphi}(X - \alpha_i Z) \quad (2.7)$$

Theo Định lý Euler, ta có điều kiện $F(X, Y, Z) = 0$ tương đương với

$$X \frac{\partial F}{\partial X} + Y \frac{\partial F}{\partial Y} + Z \frac{\partial F}{\partial Z} = 0.$$

Không gian tiếp xúc với đường cong C được xác định bởi các phương trình $F(X, Y, Z) = 0$ và

$$dX \frac{\partial F}{\partial X} + dY \frac{\partial F}{\partial Y} + dZ \frac{\partial F}{\partial Z} = 0.$$

Theo quy tắc của Cramer, ta có

$$\gamma := \frac{W(X, Y)}{\frac{\partial F}{\partial Z}} = \frac{W(Y, Z)}{\frac{\partial F}{\partial X}} = \frac{W(Z, X)}{\frac{\partial F}{\partial Y}} \quad (2.8)$$

là 1– dạng hữu tỷ xác định tốt, trong đó

$$W(X, Y) = \begin{vmatrix} X & Y \\ dX & dY \end{vmatrix},$$

$$W(Y, Z) = \begin{vmatrix} Y & Z \\ dY & dZ \end{vmatrix},$$

$$W(Z, X) = \begin{vmatrix} Z & X \\ dZ & dX \end{vmatrix}.$$

2.1.2 Mệnh đề. *Giả sử đa thức P thỏa mãn Giả thiết I và m_i được xếp theo thứ tự không tăng. Khi đó, bất kỳ thành phần bất khả quy của đường cong C đều chứa 1– dạng chính quy không tầm thường trong các trường hợp sau đây:*

- (i) $l \geq 3$, hoặc $l = 2$ và $m_2 \geq 2$;
- (ii) $p > 0$, $l = 2$, $m_2 = 1$, $\mu_1 \leq m_1$, và đường cong C không có các thành phần tuyến tính;
- (iii) $p > 0$, $l = 1$, $\mu_1 \leq m_1 - 1$, và đường cong C không có các thành phần tuyến tính.

Chứng minh. Ta có

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X, Y, Z) = \frac{aZ^{n-1-\sum_{i=1}^l m_i} \prod_{i=1}^l (X - \alpha_i Z)^{m_i}}{X - Y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y, Z) = \frac{-aZ^{n-1-\sum_{i=1}^l m_i} \prod_{i=1}^l (Y - \alpha_i Z)^{m_i}}{X - Y}.$$

Kết hợp với (2.8) và giản ước các nhân tử chung, chúng ta nhận được 1– dạng hữu tỷ sau đây

$$\eta = \frac{W(Y, Z)}{\prod_{i=1}^l (X - \alpha_i Z)^{m_i}} = \frac{-W(X, Z)}{\prod_{i=1}^l (Y - \alpha_i Z)^{m_i}} \quad (2.9)$$

xác định tốt. η không có cực điểm nào thuộc đường cong xác định bởi $Z = 0$. Trên phần hữu hạn của C (tức là $Z \neq 0$), các cực điểm có thể có của η chỉ là $\{(\alpha_i, \alpha_j, 1) \in C \mid 1 \leq i, j \leq l\}$ và từ Giả thiết I ta suy ra $\alpha_i = \alpha_j$. Đặt

$$m = 1 + \sum_{i=1}^l m_i$$

và

$$\omega := \frac{(X - Y)^{m-3}}{\prod_{i=1}^l (X - \alpha_i Z)^{m_i}} W(Y, Z) = (X - Y)^{m-3} \eta.$$

Ta có ω xác định tốt trên đường cong C và ω chỉ có một cực điểm tại $p_i = (\alpha_i, \alpha_i, 1)$, $1 \leq i \leq l$. Hơn nữa, từ (2.6) suy ra với mỗi $j = 1, \dots, l$, ta có

$$\text{ord}_{p_j, \varphi} \omega \geq (m-3-m_j) \text{ord}_{p_j, \varphi} (X - \alpha_j Z) = \left(\left(\sum_{i \neq j}^l m_i \right) - 2 \right) \text{ord}_{p_j, \varphi} (X - \alpha_j Z)$$

và $\text{ord}_{p_j, \varphi} \omega \geq 0$ nếu $l \geq 3$ hoặc $l = 2$ và $m_2 \geq 2$. Vì thế, ω là 1– dạng chính quy trên đường cong C trong các trường hợp này. Đồng thời ta có $X - Y$ không phải là nhân tử của $F(X, Y, Z)$. Điều này hoàn thành phép chứng minh đối với trường hợp (i).

Đối với trường hợp (ii), giả sử rằng số bội μ_1 của $X - \alpha_1$ trong $P(X) - P(\alpha_1)$ không lớn hơn m_1 ; thế thì μ_1 chia hết cho p và ta có thể viết được $\mu_1 = p^a b$ với $a, b \geq 1$, $p \nmid b$. Xét 1– dạng

$$\omega := \frac{W(Y, Z)(X - Y)^{p^a-1}((X - \alpha_1 Z)^{b-1} + \dots + (Y - \alpha_1 Z)^{b-1})^{p^a}}{(X - \alpha_1 Z)^{p^a b} (X - \alpha_2 Z)}$$

xác định tốt trên $\mathbf{P}^2$. Vì $m_1 \geq p^a b$ nên chúng ta có thể viết ω dưới dạng tích của η và một đa thức

$$\omega = (X - Y)^{p^a-1}((X - \alpha_1 Z)^{b-1} + \dots + (Y - \alpha_1 Z)^{b-1})^{p^a} (X - \alpha_1 Z)^{m_1 - p^a b} \eta,$$

do đó các cực điểm của ω cũng là các cực điểm của η . Theo (2.7) ta có $(\alpha_1, \alpha_1, 1)$ không là cực điểm của ω , và theo (2.6) ta có $(\alpha_2, \alpha_2, 1)$ cũng không là cực điểm của ω . Vì vậy, ω chính quy trên đường cong C . Nếu đường cong C không có thành phần tuyến tính, thì ω là 1– dạng chính quy không tầm thường trên mọi thành phần của C .

Bây giờ chúng ta xét trường hợp (iii), trong đó $l = 1$ và $\mu_1 \leq m_1 - 1$. Tương tự, chúng ta có thể viết $\mu_1 = p^a b$ với $a, b \geq 1$, $p \nmid b$. Giả sử $\omega_1 - 1$ là bậc của số hạng thứ hai trong (2.4). Nếu $\omega_1 \neq m_1 + 1$, thì ω_1 chia hết cho p , vì vậy $\omega_1 - \mu_1 \geq 2$. Nếu $\omega_1 = m_1 + 1$, thì ta cũng có $\omega_1 - \mu_1 \geq 2$ vì $\mu_1 \leq m_1 + 1$. Từ (2.7) ta suy ra

$$\begin{aligned}\omega &:= \frac{W(Y, Z)(X - Y)^{p^a - 1}((X - \alpha_1 Z)^{b-1} + \dots + (Y - \alpha_1 Z)^{b-1})^{p^a}}{(X - \alpha_1 Z)^{\mu_1 + 1}} \\ &= (X - Y)^{p^a - 1} ((X - \alpha_1 Z)^{b-1} + \dots \\ &\quad + (Y - \alpha_1 Z)^{b-1})^{p^a} (X - \alpha_1 Z)^{m_1 - \mu_1 - 1} \eta\end{aligned}$$

chính quy trên đường cong C . Hơn nữa, ω không tầm thường trên mọi thành phần của đường cong C nếu đường cong C không có thành phần tuyến tính.

□

Bây giờ chúng ta xem xét việc xây dựng 1– dạng chính quy không tầm thường trên mỗi một thành phần của đường cong C_c xác định bởi phương trình $F_c(X, Y, Z) = 0$ với $c \neq 0, 1$. Theo (2.8) ta có

$$\gamma := \frac{W(Y, Z)}{\frac{\partial F_c}{\partial X}} - \frac{W(Z, X)}{\frac{\partial F_c}{\partial Y}} - \frac{W(X, Y)}{\frac{\partial F_c}{\partial Z}}$$

là 1– dạng hữu tỷ xác định tốt. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_c}{\partial X}(X, Y, Z) &= aZ^{n-1-\sum_{i=1}^l m_i} \prod_{i=1}^l (X - \alpha_i Z)^{m_i}, \\ \frac{\partial F_c}{\partial Y}(X, Y, Z) &= -caZ^{n-1-\sum_{i=1}^l m_i} \prod_{i=1}^l (Y - \alpha_i Z)^{m_i}.\end{aligned}$$

Ta xem xét 1– dạng

$$\begin{aligned}\eta &:= \frac{W(Y, Z)}{(X - \alpha_l Z)^{m_1} \dots (X - \alpha_l Z)^{m_l}} \\ &\equiv \frac{W(Z, X)}{-c(Y - \alpha_l Z)^{m_l} \dots (Y - \alpha_l Z)^{m_l}}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Đặt

$$l_0 := \# \{(i, j) \mid P(\alpha_i) = cP(\alpha_j)\}.$$

Vì $P(X)$ thỏa mãn Giả thiết I nên $0 \leq l_0 \leq l$, và $l_0 = l$ khi và chỉ khi tồn tại một hoán vị ϕ của $\{1, \dots, l\}$ sao cho $(\alpha_i, \alpha_{\phi(i)}, 1) \in C_c$ với $i = 1, \dots, l$, nghĩa là

$$\frac{P(\alpha_1)}{P(\alpha_{\phi(1)})} = \frac{P(\alpha_2)}{P(\alpha_{\phi(2)})} = \dots = \frac{P(\alpha_l)}{P(\alpha_{\phi(l)})} = c.$$

Do đó, η có thể có nhiều nhất l_0 cực điểm tại $(\alpha_i, \alpha_j, 1)$ với $P(\alpha_i) = cP(\alpha_j)$. Để đơn giản hóa ký hiệu, từ đây về sau, ta luôn ký hiệu ϕ là một hoán vị của $\{1, \dots, l\}$ sao cho $\phi(i) = j$ nếu $P(\alpha_i) = cP(\alpha_j)$.

2.1.3 Mệnh đề. *Giả sử đa thức P thỏa mãn Giả thiết I, và ϕ là một hoán vị của $\{1, \dots, l\}$ sao cho $\phi(i) = j$ nếu $P(\alpha_i) = cP(\alpha_j)$. Nếu tồn tại $1 \leq i \leq l$ sao cho $|m_i - m_{\phi(i)}| \geq 2$, thì mọi thành phần bất khả quy của đường cong C_c đều chứa 1– dạng chính quy không tầm thường.*

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $m_i - m_{\phi(i)} \geq 2$. Đặt

$$\omega := \frac{W(Y, Z)(Y - \alpha_{\phi(i)} Z)^{m_i-2}}{(X - \alpha_i Z)^{m_i}}.$$

Ta có ω xác định tốt và ω chỉ có thể có các cực điểm tại $(\alpha_i, \alpha_j, 1)$, $j \neq i$. Vì P thỏa mãn Giả thiết I nên $(\alpha_i, \alpha_j, 1) \notin C_c$ với mỗi $j \neq i$ nếu $P(\alpha_i) \neq cP(\alpha_{\phi(i)})$. Do đó, ω chính quy trên đường cong C_c .

Mặt khác, từ hệ thức

$$\frac{W(Y, Z)(Y - \alpha_{\phi(i)} Z)^{m_i-2}}{(X - \alpha_i Z)^{m_i}} = (Y - \alpha_{\phi(i)} Z)^{m_i-m_{\phi(i)}-2} \frac{W(Y, Z)(Y - \alpha_{\phi(i)} Z)^{m_{\phi(i)}}}{(X - \alpha_i Z)^{m_i}}$$

và $m_i - m_{\phi(i)} \geq 2$, ta có cực điểm của ω cũng là cực điểm của

$$\frac{W(Y, Z)(Y - \alpha_{\phi(i)}Z)^{m_{\phi(i)}}}{(X - \alpha_i Z)^{m_i}}.$$

Theo (2.10) và Giả thiết I ta có 1 – dạng này cũng chính quy trên đường cong C_c . Đồng thời C_c không có nhân tử nào có dạng $aY - bZ$, vì thế $W(Y, Z) \neq 0$. Như vậy ω không tầm thường trên bất kỳ thành phần nào của C_c . $\square$

2.2 Đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình khác hằng

Trong mục này, chúng tôi tìm hiểu điều kiện đủ để một đa thức một biến trên trường K là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình khác hằng trên K trong trường hợp trường K có đặc số 0 hoặc đặc số p không chia hết bậc của đa thức.

Ký hiệu $\mathcal{H}^*(K)$ là tập hợp các hàm phân hình khác hằng xác định trên K và $\mathcal{F}$ là một tập con khác rỗng của $\mathcal{H}^*(K)$.

2.2.1 Định nghĩa. Đa thức một biến P xác định trên trường K được gọi là *đa thức duy nhất* cho họ hàm $\mathcal{F}$ nếu với mọi hàm khác hằng $f, g \in \mathcal{F}$ thỏa mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ thì $f = g$.

Đa thức một biến P xác định trên trường K được gọi là *đa thức duy nhất mạnh* cho họ hàm $\mathcal{F}$ nếu với mọi hàm khác hằng $f, g \in \mathcal{F}$ và hằng số c khác 0 thỏa mãn điều kiện $P(f) = cP(g)$ thì $c = 1$ và $f = g$.

2.2.2 Định nghĩa. Tập con S của trường K gọi là *tập cứng afin* nếu không tồn tại phép biến đổi afin $\alpha = ux + v$, $u, v \in K$ khác phép đồng nhất để $\alpha(S) = S$.

Với đa thức $P(X)$ chúng ta lưu ý ba trường hợp đặc biệt như sau:

(1A) $l = 1$ và số bội của $X - \alpha_1$ trong $P(X) - P(\alpha_1)$ là $\geq m_1$;

(1B) $l = 2$, $\min \{m_1, m_2\} = 1$, và số bội của $X - \alpha_i$ trong $P(X) - P(\alpha_i)$ là $m_i + 1$ với $i = 1, 2$;

(1C) $n = 4, l = 3$, và tồn tại một hoán vị ϕ của $\{1, 2, 3\}$ sao cho $\phi(i) \neq i$ với $i = 1, 2, 3$ và tồn tại một nghiệm ω của $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ sao cho

$$\omega = \frac{P(\alpha_i)}{P(\alpha_{\phi(i)})}, \text{ với } i = 1, 2, 3.$$

2.2.3 Định lý. *Giả sử đa thức $P(X)$ thỏa mãn Giả thiết I. Giả sử $p = 0$, hoặc $p > 0$ và $p \nmid n$. Ký hiệu S là tập không điểm của P và giả sử S là tập cứng afin. Khi đó*

(I) $P(X)$ thuộc trường hợp (1A) hoặc (1B) ở trên, hoặc $P(X)$ là đa thức duy nhất cho họ $\mathcal{H}^*(K)$.

(II) $P(X)$ thuộc trường hợp (1A), (1B) hoặc (1C) ở trên, hoặc $P(X)$ là đa thức duy nhất mạnh cho họ $\mathcal{H}^*(K)$.

2.2.4 Chú ý. Giả sử $p_i = (\alpha_i, \alpha_{\phi(i)}, 1)$ và $p_j = (\alpha_j, \alpha_{\phi(j)}, 1)$ là các điểm phân biệt trong P^2 . Gọi L_{ij} là dạng tuyến tính được xác định như sau:

$$L_{ij} := (Y - \alpha_{\phi(j)}Z) - \frac{\alpha_{\phi(i)} - \alpha_{\phi(j)}}{\alpha_i - \alpha_j} (X - \alpha_jZ). \quad (2.11)$$

Nói cách khác, $L_{ij} = 0$ là đường thẳng đi qua p_i và p_j . Do đó, L_{ij} cũng bằng

$$(Y - \alpha_{\phi(i)}Z) - \frac{\alpha_{\phi(i)} - \alpha_{\phi(j)}}{\alpha_i - \alpha_j} (X - \alpha_iZ).$$

Ta có

$$\text{ord}_{p_i, \varphi} L_{ij} \geq \min \{ \text{ord}_{p_i, \varphi} (X - \alpha_iZ), \text{ord}_{p_i, \varphi} (Y - \alpha_{\phi(i)}Z) \} \quad (2.12)$$

và

$$\text{ord}_{p_j, \varphi} L_{ij} \geq \min \{ \text{ord}_{p_j, \varphi} (X - \alpha_jZ), \text{ord}_{p_j, \varphi} (Y - \alpha_{\phi(j)}Z) \} \quad (2.13)$$

Để chứng minh Định lý 2.2.3 ta cần một số bổ đề, mệnh đề sau đây.

2.2.5 Bổ đề. *Giả sử đa thức P thỏa mãn Giả thiết I và m_i được xếp theo thứ tự không tăng. Nếu đường cong C_c không có nhân tử tuyến tính thì mọi thành phần bất khả quy của đường cong C_c đều chứa 1 – dạng chính quy không tầm thường ngoại trừ các trường hợp sau đây:*

(i) $l = l_0 = 3$ và $m_1 = m_2 = m_3 = 1$;

(ii) $l = 2$, $m_1 = m_2 = 1$ và $l_0 = 1, 2$;

(iii) $l = 1$ và $m_1 = 1$.

Chứng minh. Nếu $l = 1$, thì

$$\omega := \frac{W(Y, Z)}{(X - \alpha_1 Z)^2} = (X - \alpha_1 Z)^{m_1-2} \eta$$

xác định tốt và chính quy trên đường cong C_c với $m_1 \geq 2$. Do đường cong xác định bởi phương trình $X - \alpha_1 Z = 0$ không phải là thành phần của đường cong C_c , nên ω không tầm thường trên bất kỳ thành phần bất khả quy nào của C_c .

Bây giờ chúng ta giả sử rằng $l \geq 2$. Nếu $m_2 \geq 2$ thì $m_1 + m_2 - 2 \geq m_1 \geq m_i$ với $1 \leq i \leq l$. Các cực điểm có thể có của 1 – dạng

$$\omega := \frac{W(Y, Z) L_{12}^{m_1+m_2-2}}{(X - \alpha_1 Z)^{m_1} (X - \alpha_2 Z)^{m_2}}$$

trên đường cong C_c là

$$p_i = (\alpha_i, \alpha_{\phi(i)}, 1), i = 1, 2.$$

Nếu

$$\text{ord}_{p_1, \varphi}(X - \alpha_1 Z) \leq \text{ord}_{p_1, \varphi}(Y - \alpha_{\phi(1)} Z)$$

thì

$$\text{ord}_{p_1, \varphi} L_{12} = \text{ord}_{p_1, \varphi}(X - \alpha_1 Z).$$

Do đó, khi $m_1 + m_2 - 2 \geq m_1$ thì ω chính quy tại p_1 . Nếu

$$\text{ord}_{p_1, \varphi}(X - \alpha_1 Z) > \text{ord}_{p_1, \varphi}(Y - \alpha_{\phi(1)} Z)$$

thì

$$\text{ord}_{p_1, \varphi} L_{12} = \text{ord}_{p_1, \varphi}(Y - \alpha_{\phi(1)} Z).$$

Theo (2.10), ta có

$$\frac{W(Y, Z)(Y - \alpha_{\phi(1)} Z)^{m_{\phi(1)}}}{(X - \alpha_1 Z)^{m_1}} \equiv \frac{W(Y, Z)(X - \alpha_2 Z)^{m_2} \dots (X - \alpha_l Z)^{m_l}}{-c(Y - \alpha_{\phi(2)} Z)^{m_{\phi(2)}} \dots (Y - \alpha_{\phi(l)} Z)^{m_{\phi(l)}}}$$

chính quy.

Do

$$m_1 + m_2 - 2 \geq m_{\phi(1)}$$

và

$$\text{ord}_{p_1, \varphi} L_{12} = \text{ord}_{p_1}(Y - \alpha_{\phi(1)} Z)$$

nên ω chính quy. Tính chính quy của ω tại p_2 cũng được thiết lập tương tự. Như vậy, ω chính quy trên đường cong C_c và không tầm thường trên bất kỳ thành phần nào của C_c .

Bây giờ ta xét trường hợp $m_2 = 1$. Trong trường hợp này $p \neq 2$ và $m_i = 1$ với $i = 2, \dots, l$. Theo Mệnh đề 2.1.3 chúng ta chỉ cần xem xét các trường hợp $m_1 = 1$ và $m_1 = 2$. Trước hết ta giả sử rằng $m_1 = 2$. Vì $p \neq 2$, nên $\mu_1 = m_1 + 1 = 3$.

Tương tự, chúng ta có $\mu_{\phi(1)} = m_{\phi(1)} + 1 = 2$, vì $\phi(1) \neq 1$ và $m_i = 1$ với $i = 2, \dots, l$. Đặt

$$\omega := \frac{W(Y, Z)L_{12}}{(X - \alpha_1 Z)^2(X - \alpha_2 Z)}.$$

Ta có ω xác định tốt trong P^2 và các cực điểm có thể có trên đường cong C_c là $p_1 = (\alpha_1, \alpha_{\phi(1)}, 1)$ và $p_2 = (\alpha_2, \alpha_{\phi(2)}, 1)$. Nếu $p_i \notin C_c$ thì ω chính quy trên đường cong C_c tại điểm p_i .

Nếu $p_1 \in C_c$ thì từ biểu thức của $F_c(X, Y, Z)$ ta có

$$3 \text{ ord}_{p_1, \varphi}(X - \alpha_1 Z) = 2 \text{ ord}_{p_1, \varphi}(Y - \alpha_{\phi(1)} Z) > 0.$$

Vì thế,

$$2 \leq \text{ord}_{p_1, \varphi}(X - \alpha_1 Z) < \text{ord}_{p_1, \varphi}(Y - \alpha_{\phi(1)} Z)$$

và

$$\text{ord}_{p_1, \varphi} L_{12} = \text{ord}_{p_1, \varphi}(X - \alpha_1 Z).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \text{ord}_{p_1, \varphi} \omega &= \text{ord}_{p_1, \varphi} W(Y, Z) + \text{ord}_{p_1, \varphi} L_{12} - 2 \text{ ord}_{p_1, \varphi}(X - \alpha_1 Z) \\ &\geq \text{ord}_{p_1, \varphi}(Y - \alpha_{\phi(1)} Z) - \text{ord}_{p_1, \varphi}(X - \alpha_1 Z) - 1 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Tương tự, nếu $p_2 \in C_c$ thì

$$2 \text{ ord}_{p_2, \varphi}(X - \alpha_2 Z) = (m_{\phi(2)} + 1) \text{ ord}_{p_2, \varphi}(Y - \alpha_{\phi(2)} Z) > 0$$

trong đó $m_{\phi(2)} = 1, 2$.

Nếu $m_{\phi(2)} = 1$ thì

$$\text{ord}_{p_2, \varphi}(Y - \alpha_{\phi(2)} Z) = \text{ord}_{p_2, \varphi}(X - \alpha_2 Z)$$

và ω chính quy tại p_2 .

Nếu $m_{\phi(2)} = 2$ thì

$$3 \text{ ord}_{p_2, \varphi}(Y - \alpha_{\phi(2)} Z) = 2 \text{ ord}_{p_2, \varphi}(X - \alpha_2 Z) > 0$$

và ω cũng chính quy tại p_2 .

Cuối cùng, chúng ta xem xét trường hợp $m_1 = 1$. Nếu $l_0 \leq l - 2$ thì chúng ta có thể giả thiết rằng $(\alpha_1, \alpha_j, 1)$ và $(\alpha_2, \alpha_j, 1)$ không thuộc C_c với $1 \leq j \leq l$. Khi đó 1 – dạng

$$\omega := \frac{W(Y, Z)}{(X - \alpha_1 Z)(X - \alpha_2 Z)}$$

chính quy trên C_c theo (2.10).

Nếu $l_0 = l - 1$, thì ta có thể giả thiết rằng $(\alpha_1, \alpha_j, 1) \notin C_c$ với $1 \leq j \leq l$ và $(\alpha_i, \alpha_{\phi(i)}, 1) \in C_c$ với $2 \leq i \leq l$.

Giả sử rằng $l \geq 3$, thế thì

$$\omega := \frac{W(Y, Z)L_{23}}{(X - \alpha_1 Z)(X - \alpha_2 Z)(X - \alpha_3 Z)}$$

xác định tốt và chính quy trên C_c . Nếu $l_0 = l$, ta có $l \geq 4$, và

$$\omega := \frac{W(Y, Z)L_{12}L_{34}}{(X - \alpha_1 Z)(X - \alpha_2 Z)(X - \alpha_3 Z)(X - \alpha_4 Z)}$$

chính quy trên C_c . Vì C_c không có thành phần tuyến tính nên hạn chế của ω lên bất kỳ thành phần nào của C_c đều không tầm thường. $\square$

2.2.6 Nhận xét. Trong [9], có một trường hợp ngoại lệ khác: $n = 5$, $l = l_0 = 2$, $m_1 = m_2 = 2$ và $\mu_i = m_i + 1$. Trường hợp này thực sự có thể được loại bỏ vì $X + Y - \alpha_1 Z - \alpha_2 Z$ là một nhân tử tuyến tính của C_c và điều này đồng nghĩa với S không là tập cứng afin.

2.2.7 Bổ đề. *Giả sử λ_1, λ_2 là các hằng số khác 0 và b là một số nguyên dương. Đặt*

$$\begin{aligned} A(X, Y, Z) = & \lambda_1 \left[\frac{(X - \alpha Z)^b - (Y - \alpha Z)^b}{X - Y} \right] Z \\ & + \lambda_2 \left[\frac{(X - \alpha Z)^{b+1} - (Y - \alpha Z)^{b+1}}{X - Y} \right]. \end{aligned}$$

Khi đó đường cong xác định bởi phương trình $A(X, Y, Z) = 0$ là đường cong bất khả quy có giống 0.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $\alpha = 0$ bằng cách thực hiện một phép biến đổi tuyến tính. Thế thì $A(X, Y, Z)$ có dạng

$$A(X, Y, Z) = \lambda_1 \left[\frac{X^b - Y^b}{X - Y} \right] Z + \lambda_2 \left[\frac{X^{b+1} - Y^{b+1}}{X - Y} \right].$$

Nếu $A(X, Y, Z)$ khả quy thì $b \geq 2$ và $A(X, Y, Z)$ có thể phân tích thành nhân tử

$$A(X, Y, Z) = [H_j(X, Y)Z + H_{j+1}(X, Y)] G_{b-1-j}(X, Y)$$

trong đó H_j, H_{j+1} và G_{b-1-j} là các đa thức thuần nhất theo X và Y với bậc lần lượt là $j, j+1, b-j-1$. Từ biểu thức của $A(X, Y, Z)$, ta có

$$G_{b-1-j}(X, Y) \left| \left[\frac{X^{b+1} - Y^{b+1}}{X - Y} \right] \right.$$

và

$$G_{b-1-j}(X, Y) \left| \left[\frac{X^b - Y^b}{X - Y} \right] \right.$$

Vì $\gcd(b, b+1) = 1$, nên điều này không thể xảy ra được trừ khi $G_{b-1-j}(X, Y)$ là hằng số. Như vậy, đường cong xác định bởi phương trình $A(X, Y, Z) = 0$ là bất khả quy. Đường cong này chỉ có một điểm bội $(0, 0, 1)$ với số bội $b-1$. Vì vậy số khuyết của đường cong này là

$$\delta_A = \frac{(\deg A - 1)(\deg A - 2)}{2} - \frac{(b-1)(b-2)}{2} = 0.$$

Do đó, đường cong có giống bằng 0. $\square$

Chứng minh Định lý 2.2.3. Ta có $P(X)$ là đa thức duy nhất cho họ các hàm phân hình nếu đường cong C chứa 1 – dạng chính quy không tầm thường trên mỗi một thành phần của đường cong, và $P(X)$ là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình nếu đường cong C và mỗi đường cong $C_c, c \neq 0, 1$, chứa 1 – dạng chính quy không tầm thường trên mỗi một thành phần của đường cong. Do đó theo Mệnh đề 2.1.2, ta có $P(X)$ là đa thức duy nhất nếu tập S các không điểm của $P(X)$ là tập cứng affin trừ khi

$$(i) \quad l = 1 \text{ và } \mu_1 = m_1,$$

$$(ii) \quad l = 1 \text{ và } \mu_1 = m_1 + 1,$$

hoặc

(iii) $l = 2$, $\min\{m_1, m_2\} = m_2 = 1$ và $\mu_i = m_i + 1$ với $i = 1, 2$.

Do $p \nmid n$ nên $n = \left(\sum_{i=1}^l m_i\right) + 1$. Vì thế, $n = m_1 + 1$ trong các trường hợp (i), (ii), và $n = m_1 + 2$ trong trường hợp (iii). Do đó, trong trường hợp (i), ta có đường cong C được xác định bởi

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) = & * \left[\frac{(X - \alpha_1 Z)^{m_1} - (Y - \alpha_1 Z)^{m_1}}{X - Y} \right] Z \\ & + * \left[\frac{(X - \alpha_1 Z)^{m_1+1} - (Y - \alpha_1 Z)^{m_1+1}}{X - Y} \right]. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 2.2.7 ta có đường cong C là bất khả quy và có giống bằng 0. Trong trường hợp (ii), đường cong C được xác định bởi

$$F(X, Y, Z) = * \left[\frac{(X - \alpha_1 Z)^{m_1+1} - (Y - \alpha_1 Z)^{m_1+1}}{X - Y} \right]$$

có thể được phân tích thành các thành phần tuyến tính. Do đó S không là tập cứng affin.

Trong trường hợp (iii), đường cong C được xác định bởi

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) = & * \left[\frac{(X - \alpha_1 Z)^{m_1+1} - (Y - \alpha_1 Z)^{m_1+1}}{X - Y} \right] Z \\ & + * \left[\frac{(X - \alpha_1 Z)^{m_1+2} - (Y - \alpha_1 Z)^{m_1+2}}{X - Y} \right]. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 2.2.7, đường cong C là bất khả quy và có giống bằng 0. Tương tự, theo Mệnh đề 2.1.2 và Bổ đề 2.2.5, ta có $P(X)$ là đa thức duy nhất mạnh nếu tập các không điểm S của $P(X)$ là tập cứng affin ngoại trừ các trường hợp (i) – (iii) ở trên và (iv) $l = l_0 = 3$ và $m_1 = m_2 = m_3 = 1$.

Ta đã có $P(X)$ không là đa thức duy nhất trong các trường hợp (i) – (iii). Đối với trường hợp (iv), ta có $n = 4$ và

$$\frac{P(\alpha_1)}{P(\alpha_{\phi(1)})} = \frac{P(\alpha_2)}{P(\alpha_{\phi(2)})} = \frac{P(\alpha_3)}{P(\alpha_{\phi(3)})} = \omega,$$

trong đó

$$\{\phi(1), \phi(2), \phi(3)\} = \{1, 2, 3\}, \phi(i) \neq i, i = 1, 2, 3 \text{ và } \omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

Trong trường hợp này đường cong C_ω xác định bởi phương trình $F_\omega(X, Y, Z) = 0$ là bất khả quy và có giống bằng 0. Do đó, $P(X)$ không là đa thức duy nhất mạnh. Điều này kết thúc phép chứng minh định lý. $\square$

KẾT LUẬN

Trên cơ sở tham khảo các tài liệu, trong luận văn này chúng tôi đã tập trung tìm hiểu và trình bày những nội dung sau đây:

1. Đa tạp trong không gian afin và không gian xạ ảnh, đường cong trong mặt phẳng afin, trường định chuẩn.
2. Thành phần bất khả quy của các đường cong.
3. Một số điều kiện đủ để một đa thức một biến trên trường K là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình khác hằng trên K trong trường hợp trường K có đặc số 0 hoặc đặc số không chia hết bậc của đa thức.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Ngô Thị Hải Lý (2018), *Đa thức duy mạnh cho họ các hàm hữu tỷ*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.
- [2] Trần Thanh Trung (2020), *Đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm nguyên*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.
- [3] Ngô Việt Trung (2012), *Nhập môn Đại số giao hoán và Hình học đại số*, Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và công nghệ.

Tiếng Anh

- [4] T. T. H. An, J. T. Y. Wang and P. M. Wong (2003), Unique range sets and uniqueness polynomials in positive characteristic, *Acta Arith.*, 109 (3), 259 - 280.
- [5] T. T. H. An, J. T. Y. Wang and P. M. Wong (2005), Unique range sets and uniqueness polynomials in positive characteristic II, *Acta Arith.*, 116(2), 115 - 143.
- [6] A. Boutabaa, W. Cherry and A. Escassut (2002), Unique range sets in positive characteristic, *Acta Arith.*, 103, 169 -189.
- [7] W. Cherry and J. T.Y. Wang (2002), Uniqueness polynomials for entire functions, *Internat. J. Math.*, 13, 323 - 332.
- [8] W.Fulton (1969), *Algebraic curves, An Introductions to Algebraic Geometry*, W. A. Benjamin, New York.

- [9] J. T.Y. Wang (2002), Uniqueness polynomials and bi-unique range sets for rational functions and non-archimedean meromorphic functions, *Acta Arith.*, 104, 183 - 200.