

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN QUỐC TĂNG

NỬA NHÓM SỐ VỚI TẬP APÉRY
CÓ BIỂU DIỄN DUY NHẤT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2023

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN QUỐC TĂNG

NỬA NHÓM SỐ VỚI TẬP APÉRY
CÓ BIỂU DIỄN DUY NHẤT

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 846 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. NGUYỄN THỊ HỒNG LOAN

Nghệ An - 2023

MỤC LỤC

Mục lục	4
Mở đầu	4
1 Biểu diễn của một nửa nhóm số	7
1.1. Tương đẳng trên nửa nhóm, nửa nhóm thương, đồng cấu nửa nhóm	7
1.2. Vị nhóm tự do trên một tập, biểu diễn của một vị nhóm	10
1.3. Nửa nhóm số và các khái niệm liên quan	13
1.4. Biểu diễn của một nửa nhóm số	18
2 Biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số với tập Apéry có biểu diễn duy nhất	21
2.1. Biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số	21
2.2. Biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số đối xứng	27
Kết luận	31
Tài liệu tham khảo	32

MỞ ĐẦU

Một *nửa nhóm số* là một tập con S chứa 0 của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ sao cho S đóng kín đối với phép cộng và $\mathbb{N} \setminus S$ là một tập hợp hữu hạn. Nói cách khác, S là một *nửa nhóm số* nếu S là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$ mà phần bù của S trong $\mathbb{N}$ là hữu hạn.

Mỗi nửa nhóm số có duy nhất một hệ sinh tối tiểu và hệ sinh tối tiểu này luôn hữu hạn. Giả sử $\{n_0, n_1, \dots, n_p\}$ là một hệ sinh tối tiểu của S xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó, mỗi phần tử $s \in S$ đều tồn tại một bộ gồm $p + 1$ số nguyên không âm $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ sao cho

$$s = a_0 n_0 + a_1 n_1 + \dots + a_p n_p$$

Ta nói rằng phần tử s có *biểu diễn duy nhất* nếu bộ số $(a_0, a_1, \dots, a_p)$ là duy nhất.

Số nguyên bé nhất trong hệ sinh tối tiểu của nửa nhóm số S được gọi là *số bội của S* , ký hiệu là $m(S)$. Chú ý rằng $m(S)$ chính là số nguyên dương bé nhất thuộc S . Số phần tử của hệ sinh tối tiểu gọi là *chiều nhúng của S* và ta ký hiệu $e(S)$. Ta luôn có bất đẳng thức $e(S) \leq m(S)$. Khi dấu " $=$ " xảy ra thì ta nói nửa nhóm số S có *chiều nhúng tối đại*. Số nguyên lớn nhất không thuộc S được gọi là số Frobenius và ký hiệu là $F(S)$.

Gọi n là một phần tử khác 0 của nửa nhóm số S . Tập *Apéry của n trong S* là tập hợp được xác định bởi

$$\text{Ap}(S, n) = \{h \in S \mid h - n \notin S\}.$$

$\text{Ap}(S, n)$ là một hệ thặng dư đầy đủ môđun n , mà mỗi phần tử của nó là số bé nhất của mỗi lớp thặng dư thuộc vào S . Như vậy, $\text{Ap}(S, n)$ là một tập hợp hữu hạn, gồm n phần tử. Tập $\text{Ap}(S, n)$ hoàn toàn xác định nửa nhóm số S . Thật vậy, nếu ta xác định được $\text{Ap}(S, n)$ thì $\text{Ap}(S, n) \cup \{n\}$ là một hệ sinh của S . Hơn nữa, tập $\text{Ap}(S, n)$ chứa đựng nhiều thông tin về nửa nhóm số S hơn là một hệ sinh bất kỳ của S . Thật vậy, chẳng hạn số Frobenius của S có thể được xác định thông qua tập $\text{Ap}(S, n)$ như sau

$$F(S) = \max \text{Ap}(S, n) - n.$$

Với mọi $s \in S$, tồn tại duy nhất $t \in \mathbb{N}$ và $w \in \text{Ap}(S, n)$ sao cho $s = tn + w$. Người ta nói rằng, cách tốt nhất để mô tả một nửa nhóm số S là xác định tập Apéry của S đối với một phần tử nào đó của S và tập Apéry bé nhất là $\text{Ap}(S, m(S))$.

Năm 2000, trong bài báo [5], đăng trên tạp chí Journal of Algebra, J. C. Rosales đã nghiên cứu nửa nhóm số mà tất cả các phần tử của tập Apéry $\text{Ap}(S, m(S))$ đều có biểu diễn duy nhất. Kết quả chính của bài báo này đưa ra một biểu diễn tối tiểu của một nửa nhóm số S . Từ đó, như một áp dụng của kết quả chính, bài báo cũng nghiên cứu biểu diễn tối tiểu của nửa nhóm số đối xứng mà tất cả các phần tử trong tập Apéry của nó đều có biểu diễn duy nhất, ngoại trừ phần tử lớn nhất. Chú ý rằng nửa nhóm số đối xứng là lớp nửa nhóm số rất quan trọng vì nó liên quan đến lớp vành nửa nhóm. Do đó nó có nhiều ứng dụng trong Hình học Đại số và Đại số giao hoán. Mục tiêu của luận văn là trình bày lại một cách chi tiết các kết quả trong bài báo nói trên của J.C. Rosales.

Nội dung chính của luận văn gồm 2 chương. Chương 1 trình bày về biểu diễn của nửa nhóm số để làm cơ sở cho việc trình bày bài báo [5] ở Chương 2. Để làm được điều này, trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức về lý thuyết nửa nhóm như tương đẳng, vị nhóm thương, đồng cấu vị nhóm,

vị nhóm tự do trên một tập, biểu diễn của một vị nhóm và một số kiến thức về lý thuyết nửa nhóm số như khái niệm nửa nhóm số, chiều nhúng, số bội, số Frobenius, tập Apéry, nửa nhóm số đối xứng, nửa nhóm số có chiều nhúng tối đại. Từ đó chúng tôi trình bày về biểu diễn của một nửa nhóm số. Nội dung chính của Chương 2 là trình bày kết quả của bài báo [5], chia làm hai phần. Phần đầu trình bày về biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số S có tính chất mọi phần tử trong tập $\text{Ap}(S, m(S))$ đều có biểu diễn duy nhất. Phần thứ hai, trình bày về nửa nhóm số đối xứng S mà mọi phần tử (trừ phần tử lớn nhất) của tập Apéry $\text{Ap}(S, m(S))$ đều có biểu diễn duy nhất.

Trong thời gian học tập tại trường Đại học Vinh, tôi đã nhận được sự chỉ dạy tận tình của các thầy cô giáo, tôi đã học hỏi và tiếp thu được nhiều tri thức khoa học, kinh nghiệm và phương pháp học tốt, bước đầu được làm quen với công việc nghiên cứu khoa học. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán - Trường Sư phạm - Trường Đại học Vinh đã trực tiếp giảng dạy, giúp đỡ dìu dắt chúng tôi trưởng thành như ngày hôm nay.

Đặc biệt tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Thị Hồng Loan, người đã trực tiếp hướng dẫn, chỉ bảo và đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho tôi trong thời gian thực hiện luận văn.

Do công tác nghiên cứu và năng lực bản thân còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi thiếu sót. Rất mong được sự góp ý chân thành của hội đồng chấm luận văn để luận văn của tôi được hoàn thiện hơn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Nghệ An, tháng 6 năm 2023

Tác giả

Nguyễn Quốc Tảng

CHƯƠNG 1

BIỂU DIỄN CỦA MỘT NỬA NHÓM SỐ

Mục tiêu của chương này là trình bày về biểu diễn của nửa nhóm số để làm cơ sở cho việc trình bày bài báo [5] ở Chương 2. Để làm được điều đó, chúng tôi trình bày một số kiến thức về lý thuyết nửa nhóm như tương đẳng, vị nhóm thương, đồng cấu vị nhóm, vị nhóm tự do trên một tập, biểu diễn của một vị nhóm và một số kiến thức về lý thuyết nửa nhóm số như khái niệm nửa nhóm số, chiều nhúng, số bội, số Frobenius, tập Apéry, nửa nhóm số đối xứng, nửa nhóm số có chiều nhúng tối đại. Từ đó chúng tôi trình bày về biểu diễn và biểu diễn tối thiểu của một nửa nhóm số. Các kết quả của chương này được tham khảo từ các tài liệu [1], [2], [3], [4] và [7].

1.1 Tương đẳng trên nửa nhóm, nửa nhóm thương, đồng cấu nửa nhóm

Nhắc lại rằng, một quan hệ hai ngôi trên một tập hợp X là một tập con của tích Đề các $X \times X$.

1.1.1 Định nghĩa. Cho S là một nửa nhóm và ρ là một quan hệ hai ngôi trên S . Khi đó

- (1) ρ được gọi là *ổn định bên phải* nếu $a\rho b$ kéo theo $a\rho bc$ với mọi $c \in S$;
- (2) ρ được gọi là *ổn định bên trái* nếu $a\rho b$ kéo theo $ca\rho cb$ với mọi $c \in S$.

1.1.2 Định nghĩa. Cho S là một nửa nhóm và ρ là một quan hệ hai ngôi trên S . Khi đó

- (1) ρ được gọi là *tương đẳng phải* nếu ρ là một quan hệ tương đương và ổn định phải;
- (2) ρ được gọi là *tương đẳng trái* nếu ρ là một quan hệ tương đương và ổn định trái;
- (2) ρ được gọi là *tương đẳng* nếu ρ là một tương đẳng phải vừa là một tương đẳng trái.

Như vậy, một tương đẳng trên nửa nhóm S là một quan hệ tương đương trên S tương thích với phép toán trên nửa nhóm S . Mô tả các tương đẳng trên một lớp nửa nhóm cụ thể là một trong những vấn đề then chốt của lý thuyết nửa nhóm, vì nhờ nó mà các cấu trúc nửa nhóm được xác định một cách tường minh.

Giả sử ρ là một tương đẳng trên nửa nhóm S . Khi đó ρ là một quan hệ tương đương trên S và vì vậy ta có tập thương S/ρ là tập các lớp tương đương của S theo quan hệ tương đương ρ .

Bây giờ ta hãy trang bị cho S/ρ một phép toán. Xét tương ứng

$$S/\rho \times S/\rho \longrightarrow S/\rho, (\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \overline{ab}.$$

Tương ứng này là một ánh xạ vì nếu $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}', \bar{b}')$ thì $\overline{ab} = \overline{a'b'}$. Thật vậy, do $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}', \bar{b}')$ nên $\bar{a} = \bar{a}'$ và $\bar{b} = \bar{b}'$, suy ra $a\rho a'$ và $b\rho b'$. Vì ρ là một tương đẳng trên S nên nó vừa ổn định phải và vừa ổn định trái, ta suy ra $ab\rho a'b$ và $a'b\rho a'b'$. Do tính chất bắc cầu của ρ , ta có $ab\rho a'b'$ hay $\overline{ab} = \overline{a'b'}$. Như vậy ta có một phép toán trên S/ρ xác định bởi

$$\bar{a} \bar{b} = \overline{ab} \text{ với mọi } \bar{a}, \bar{b} \in S/\rho.$$

1.1.3 Mệnh đề. S/ρ cùng với phép toán nói trên là một nửa nhóm.

1.1.4 Định nghĩa. Nửa nhóm S/ρ được gọi là *nửa nhóm thương* của S theo tương đẳng ρ .

Dễ thấy rằng, nếu S là nửa nhóm giao hoán thì S/ρ cũng là một nửa nhóm giao hoán; nếu S là một vị nhóm với đơn vị e thì S/ρ cũng là một vị nhóm với đơn vị là $\bar{e}$.

1.1.5 Định nghĩa. Cho S và S' là các nửa nhóm.

- (1) Một ánh xạ $f : S \rightarrow S'$ được gọi là *đồng cấu nửa nhóm* nếu $f(ab) = f(a)f(b)$ với mọi $a, b \in S$.
- (2) Đồng cấu f được gọi là *đơn cấu* (tương ứng *toàn cấu* hoặc *đẳng cấu*) nếu f là một đơn ánh (tương ứng toàn ánh hoặc song ánh).
- (3) Ta nói nửa nhóm S đẳng cấu với nửa nhóm S' nếu tồn tại một đẳng cấu nửa nhóm từ S đến S' .

Giả sử ρ là một tương đẳng trên nửa nhóm S . Khi đó ánh xạ tự nhiên

$$p : S \rightarrow S/\rho$$

xác định bởi $p(a) = \bar{a}$ với mọi $a \in S$, trong đó $\bar{a}$ là lớp tương đương chứa a , là một đồng cấu nửa nhóm, gọi là *đồng cấu tự nhiên* (hoặc *đồng cấu chính tắc*) từ nửa nhóm S lên nửa nhóm thương S/ρ . Rõ ràng p là một toàn cấu nửa nhóm. Vì vậy, mỗi nửa nhóm thương của nửa nhóm S là một ảnh đồng cấu của S . Định lí sau trả lời cho câu hỏi ngược lại.

1.1.6 Định lý. (Định lí đồng cấu nửa nhóm) *Giả sử $f : S \rightarrow S'$ là một toàn cấu nửa nhóm và ρ là một quan hệ hai ngôi trên S xác định bởi $a\rho b$ khi và chỉ khi $f(a) = f(b)$. Khi đó ρ là một tương đẳng trên S và tồn tại một đẳng cấu g từ nửa nhóm thương S/ρ lên S' sao cho biểu đồ sau là giao hoán*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S' \\ & \searrow p & \nearrow \exists! \bar{f} \\ & S/\rho & \end{array}$$

Cho $f : S \rightarrow S'$ là một đồng cấu vị nhóm. Khi đó, ta dễ thấy

$$\text{Ker } f = \{(a, b) \in S \times S \mid f(a) = f(b)\}$$

là một tương đẳng trên vị nhóm S và

$$\text{Im } f = \{f(a) \mid a \in S\}$$

là một vị nhóm con của S' . Vì vậy, ta có định nghĩa sau đây.

1.1.7 Định nghĩa. Cho $f : S \rightarrow S'$ là một đồng cấu vị nhóm. Khi đó:

- (1) $\text{Ker } f$ được gọi là *tương đẳng hạt nhân của f* ;
- (2) $\text{Im } f$ được gọi là *ảnh của f* .

1.1.8 Mệnh đề. Cho $f : S \rightarrow S'$ là một đồng cấu vị nhóm. Khi đó ánh xạ

$$\bar{f} : S/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f,$$

xác định bởi $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$, với mọi $\bar{a} \in S/\text{Ker } f$ là một đẳng cấu vị nhóm.

1.2 Vị nhóm tự do trên một tập, biểu diễn của một vị nhóm

1.2.1 Định nghĩa. Giả sử X là một tập hợp tùy ý khác rỗng. Ta ký hiệu

$$\text{Free}(X) = \{a_1x_1 + \dots + a_kx_k \mid k \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in X\}$$

và định nghĩa một phép toán cộng trên $\text{Free}(X)$ như sau

$$(a_1x_1 + \dots + a_kx_k) + (a_1x_1 + \dots + a_kx_k) = (a_1 + b_1)x_1 + \dots + (a_k + b_k)x_k,$$

chú ý rằng các hệ số a_i và b_i có thể bằng 0. Khi đó $\text{Free}(X)$ trở thành một vị nhóm và gọi là *vị nhóm tự do trên tập X* . Nếu $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ là tập hợp hữu hạn thì ta ký hiệu $\text{Free}(x_1, \dots, x_n)$ thay cho $\text{Free}(X)$.

Nếu S là một vị nhóm cộng hữu hạn sinh với hệ sinh hữu hạn là $\{n_1, \dots, n_k\}$ thì ánh xạ

$$\varphi : \text{Free}(x_1, \dots, x_k) \rightarrow S,$$

xác định bởi $\varphi(a_1x_1 + \dots + a_kx_k) = a_1n_1 + \dots + a_kn_k$ là một toàn cấu vị nhóm (giả thiết rằng $x_i \neq x_j$ với mọi $i \neq j$). Do đó theo Mệnh đề 1.1.8 thì S đẳng cấu với $\text{Free}(x_1, \dots, x_k)/\text{Ker}\varphi$. Điều đó đã chứng minh cho phát biểu sau.

1.2.2 Mệnh đề. *Giả sử S là một vị nhóm hữu hạn sinh với hệ sinh hữu hạn gồm k phần tử là $\{n_1, \dots, n_k\}$. Cho X là một tập hợp có số phần tử là k . Khi đó tồn tại một tương đẳng σ trên $\text{Free}(X)$ sao cho S đẳng cấu với $\text{Free}(X)/\sigma$.*

Từ mệnh đề trên ta cũng suy ra, mọi vị nhóm hữu hạn sinh đều đẳng cấu với $\mathbb{N}^k/\sigma$ với k là một số nguyên dương và σ là một tương đẳng trên $\mathbb{N}^k$.

Bây giờ ta tìm hiểu khái niệm biểu diễn của một vị nhóm. Trước hết ta giới thiệu khái niệm tương đẳng sinh bởi một tập. Vì tương đẳng có một vai trò quan trọng trong lý thuyết nửa nhóm, do đó người ta thường quan tâm đến việc xây dựng các tương đẳng thoả mãn một số tính chất nào đó. Sau đây ta trình bày cách xây dựng tương đẳng sinh bởi một quan hệ hai ngôi cho trước. Chú ý rằng, giao của các tương đẳng trên một vị nhóm là một tương đẳng trên vị nhóm đó. Do đó, với một tập hợp X cho trước và một tập con $\rho \subseteq \text{Free}(X) \times \text{Free}(X)$ thì giao của tất cả các tương đẳng trên $\text{Free}(X)$ chứa ρ là một tương đẳng trên $\text{Free}(X)$ chứa ρ . Tương đẳng này được gọi là *tương đẳng sinh bởi ρ* và ký hiệu là $\text{Cong}(\rho)$.

Tiếp theo chúng ta sẽ mô tả phần tử của $\text{Cong}(\rho)$ với ρ là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp X . Ta gọi

$$i(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

là quan hệ bằng nhau trên X và

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$$

là quan hệ ngược của ρ . Mệnh đề sau đây sẽ mô tả $\text{Cong}(\rho)$.

1.2.3 Mệnh đề. Cho X là một tập hợp khác rỗng và $\rho \subseteq \text{Free}(X) \times \text{Free}(X)$. Đặt

$$\rho^0 = \rho \cup \rho^{-1} \cup i(\text{Free}(X))$$

và

$$\rho^1 = \{(v + u, w + u) \mid (v, w) \in \rho^0, u \in \text{Free}(X)\}.$$

Khi đó $\text{Cong}(\rho)$ là tập tất cả các cặp $(v, w) \in \text{Free}(X) \times \text{Free}(X)$ sao cho tồn tại $k \in \mathbb{N}$ và $v_0, \dots, v_k \in \text{Free}(X)$ với $v_0 = v, v_k = w$ và $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ với mọi $0 \leq i \leq k - 1$.

1.2.4 Định nghĩa. (1) Một tương đẳng σ được gọi là *sinh bởi ρ* nếu $\sigma = \text{Cong}(\rho)$. Khi đó ta cũng nói ρ là một *hệ sinh của σ* .

(2) Tương đẳng σ được gọi là *hữu hạn sinh* nếu tồn tại một hệ sinh của σ có hữu hạn phần tử.

(3) Một *biểu diễn* của vị nhóm hữu hạn sinh S là một tương đẳng trên $\text{Free}(X)$ với X là một tập hợp hữu hạn nào đó sao cho $S \cong \text{Free}(X)/\text{Cong}(\rho)$. Ta nói S là vị nhóm *biểu diễn được hữu hạn* nếu ρ hữu hạn.

1.2.5 Mệnh đề. (Bổ đề Dickson) Giả sử X là một tập hợp hữu hạn khác rỗng và N là một tập con khác rỗng của $\text{Free}(X)$. Khi đó tập hợp các phần tử tối thiểu của N theo quan hệ thứ tự từ điển $\text{Minimals}_{\leq}(N)$ là hữu hạn.

Một vị nhóm cộng S được gọi là *giản ước được* nếu với mọi $a, b, c \in S$ thì $a + c = b + c$ kéo theo $a = b$.

1.2.6 Hệ quả. Mọi vị nhóm hữu hạn sinh giản ước được đều là vị nhóm biểu diễn được hữu hạn.

1.3 Nửa nhóm số và các khái niệm liên quan

1.3.1 Định nghĩa. Cho S là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$ sao cho phần bù của S trong $\mathbb{N}$ tập hợp hữu hạn. Khi đó S được gọi là một *nửa nhóm số*.

Như vậy, S là một nửa nhóm số khi và chỉ khi S là một tập con của $\mathbb{N}$, chứa 0, đóng kín đối với phép cộng và phần bù của S trong $\mathbb{N}$ hữu hạn.

Cho A là một tập con tùy ý của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Ký hiệu

$$\langle A \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \dots, n \}.$$

Khi đó $\langle A \rangle$ là nửa nhóm con bé nhất (theo quan hệ bao hàm) của $\mathbb{N}$ chứa A . Do đó $\langle A \rangle$ là nửa nhóm con sinh bởi A . Nếu $\langle A \rangle = S$ thì A là *một hệ sinh của nửa nhóm số S* . Ta nói ước chung lớn nhất của A bằng 1, ký hiệu $\gcd(A) = 1$ nếu ước chung lớn nhất của mọi tập con hữu hạn của A đều bằng 1.

1.3.2 Mệnh đề. Cho A là một tập con khác rỗng của $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Khi đó $\langle A \rangle$ là một nửa nhóm số khi và chỉ khi $\gcd(A) = 1$.

Chứng minh. Đặt $d = \gcd(A)$. Rõ ràng nếu $s \in \langle A \rangle$ thì $d \mid s$. Do $\langle A \rangle$ là một nửa nhóm số nên $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ là tập hữu hạn và vì vậy tồn tại số nguyên dương x sao cho $d \mid x$ và $d \mid (x + 1)$. Vậy $d = 1$.

Ngược lại, giả sử $\gcd(A) = 1$ ta cần chứng minh $\langle A \rangle$ là một nửa nhóm số. Ta chỉ cần chứng minh $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ là tập hữu hạn. Thật vậy, do $\gcd(A) = 1$ nên tồn tại các số nguyên $z_1, z_2, \dots, z_n$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ sao cho:

$$z_1 a_1 + z_2 a_2 + \cdots + z_n a_n = 1.$$

Bằng cách chuyển z_i sang vế phải, ta có thể tìm được $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$ sao cho:

$$z_{i_1} a_{i_1} + \cdots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - \cdots - z_{j_l} a_{j_l}.$$

Do đó tồn tại $s \in \langle A \rangle$ sao cho $s + 1$ cũng thuộc $\langle A \rangle$. Ta chứng minh nếu $n \geq (s - 1)s + (s - 1)$ thì $n \in \langle A \rangle$. Thật vậy, lấy q và r là các số nguyên sao cho $n = qs + r$ với $0 \leq r < s$. Do $n \geq (s - 1)s + (s - 1)$ ta suy ra $q \geq s - 1 \geq r$. Vì vậy

$$n = (rs + r) + (q - r)s = r(s + 1) + (q - r)s \in \langle A \rangle.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Chú ý rằng, mỗi nửa nhóm số có thể có nhiều hệ sinh. Một hệ sinh của nửa nhóm số S được gọi là *tối thiểu* nếu mọi tập con thực sự của nó đều không phải là hệ sinh của S . Kết quả sau đây chỉ ra rằng mỗi nửa nhóm số chỉ có duy nhất một hệ sinh tối thiểu.

1.3.3 Định lý. *Mỗi nửa nhóm số có duy nhất một hệ sinh tối thiểu.*

Như vậy, mỗi nửa nhóm số S là một tập con của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$, gồm các tổ hợp tuyến tính trên $\mathbb{N}$ của một tập hữu hạn các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau cho trước. Cho $s_1, \dots, s_n$ là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó, nửa nhóm số sinh bởi $s_1, \dots, s_n$ là

$$S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \{ \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \dots, n \}.$$

Giả sử $\{n_0, n_1, \dots, n_p\}$ là một hệ sinh tối thiểu của S xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó, mỗi phần tử $s \in S$ đều tồn tại một bộ gồm $p + 1$ số nguyên không âm $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ sao cho

$$s = a_0 n_0 + a_1 n_1 + \dots + a_p n_p$$

Ta nói rằng phần tử s có *biểu diễn duy nhất* nếu bộ số $(a_0, a_1, \dots, a_p)$ là duy nhất.

Định lý 1.3.3 dẫn đến khái niệm sau đây.

1.3.4 Định nghĩa. (1) Số phần tử của hệ sinh tối tiểu của nửa nhóm số S gọi là *chiều nhúng của S* và ký hiệu là $e(S)$.

(2) Số nguyên bé nhất trong hệ sinh tối tiểu của nửa nhóm số S được gọi là *số bội của S* , ký hiệu là $m(S)$.

Chú ý rằng $m(S)$ chính là số nguyên dương bé nhất thuộc S . Ta luôn có bất đẳng thức $e(S) \leq m(S)$. Khi dấu " $=$ " xảy ra thì ta nói nửa nhóm số S có *chiều nhúng tối đại*.

Bây giờ ta tìm hiểu khái niệm *tập Apéry* của một nửa nhóm số.

1.3.5 Định nghĩa. Cho S là một nửa nhóm số và $n \in S \setminus \{0\}$. Tập hợp được xác định bởi

$$\text{Ap}(S, n) = \{h \in S \mid h - n \notin S\}$$

được gọi là *tập Apéry của n trong S* .

Mệnh đề sau đây cho ta cách tìm tập Apéry của một nửa nhóm số.

1.3.6 Mệnh đề. Cho S là một nửa nhóm số và $n \in S \setminus \{0\}$. Khi đó ta có

$$\text{Ap}(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\},$$

trong đó $w(i)$ là số nhỏ nhất của S sao cho

$$w(i) \equiv i \pmod{n}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Chứng minh. Rõ ràng, với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ thì tập hợp

$$\{i + kn \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Các số tự nhiên đồng dư với i theo môđun n là tập hợp vô hạn. Vì tập hợp $\mathbb{N} \setminus S$ là hữu hạn nên tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $i + kn \in S$. Gọi $w(i)$ là số nhỏ nhất thuộc S có dạng $i + kn$, nghĩa là $w(i)$ là số nhỏ nhất thuộc S đồng dư

với i theo môđun n . Khi đó rõ ràng $w(i) - n \notin S$ vì $w(i) - n = i + kn - n = i + (k - 1)n < w(i)$. Vậy $w(i) \in \text{Ap}(S, n)$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Do đó

$$\text{Ap}(S, n) \supseteq \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n - 1)\}.$$

Ngược lại, giả sử $x \in \text{Ap}(S, n)$. Khi đó $x \in S$ và $x - n \notin S$. Do đó

$$x \in \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n - 1)\}.$$

Suy ra

$$\text{Ap}(S, n) \subseteq \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n - 1)\}.$$

Vì vậy

$$\text{Ap}(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n - 1)\}.$$

□

Từ mệnh đề trên, ta thấy $\text{Ap}(S, n)$ là một hệ thặng dư đầy đủ mod n . Từ mỗi lớp thặng dư môđun n ta trích ra số nguyên nhỏ nhất trong đó thuộc S , ta được một hệ thặng dư đầy đủ môđun n và đó chính là tập $\text{Ap}(S, n)$. Như vậy tập Apéry của phân tử n trong nửa nhóm số S có n phần tử.

1.3.7 Ví dụ. Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \rightarrow\}$$

(trong đó ký hiệu $14 \rightarrow$ nghĩa là các số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 14). Ta tính được

$$\text{Ap}(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\},$$

$$\text{Ap}(S, 7) = \{0, 5, 9, 10, 15, 18, 20\}.$$

Mệnh đề sau đây là một đặc trưng của nửa nhóm số với chiều nhúng tối đại thông qua tập Apéry.

1.3.8 Mệnh đề. Cho S là một nửa nhóm số có hệ sinh tối tiểu là $\{n_1, n_2, \dots, n_e\}$ (với $n_1 < n_2 < \dots < n_e$). Khi đó S có chiều nhúng tối đại khi và chỉ khi

$$\text{Ap}(S, n_1) = \{0, n_2, \dots, n_e\}$$

Chứng minh. Chúng ta dễ dàng chứng minh được

$$\{n_2, n_3, \dots, n_e\} \subseteq \text{Ap}(S, n_1) \setminus \{0\}.$$

Mặt khác số phần tử của $\text{Ap}(S, n_1)$ là n_1 . Do đó $e = n_1$ khi và chỉ khi $\text{Ap}(s, n_1) = \{0, n_1, n_2, \dots, n_e\}$. $\square$

Tiếp theo, chúng ta tìm hiểu khái niệm số Frobenius và nửa nhóm số đối xứng.

1.3.9 Định nghĩa. Số nguyên lớn nhất không thuộc nửa nhóm số S được gọi là *số Frobenius của S* và ký hiệu là $F(S)$.

1.3.10 Ví dụ. (1) Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 4, 7 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18 \rightarrow\}.$$

Khi đó $F(S) = 17$.

(2) Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \rightarrow\}.$$

Khi đó $F(S) = 13$.

Cho nửa nhóm số S có số Frobenius là $F(S)$. Khi đó $F(S) - n \notin S, \forall n \in S$ và tương ứng

$$\varphi : S \longrightarrow \mathbb{Z} \setminus S,$$

xác định bởi $\varphi(x) = F(S) - x$, với mọi $x \in S$ là một đơn ánh.

1.3.11 Định nghĩa. Nếu φ là một song ánh thì S được gọi là *nửa nhóm số đối xứng*.

Như vậy, một nửa nhóm số đối xứng S là một nửa nhóm số mà các tập hợp S và $\mathbb{Z} \setminus S$ tương đương nhau. Sau đây là một đặc trưng của nửa nhóm số đối xứng.

1.3.12 Mệnh đề. *Giả sử $F(S)$ là số Frobenius của nửa nhóm số S . Khi đó S là nửa nhóm số đối xứng khi và chỉ khi với mọi số nguyên x thì $x \in S$ hoặc $F(S) - x \in S$.*

Chứng minh. Ta dễ thấy φ là một đơn ánh. từ đó φ là song ánh khi và chỉ khi φ là toàn ánh.

Giả sử S là một nửa nhóm số đối xứng, suy ra φ là một toàn ánh. Khi đó mọi phần tử $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ đều có thể viết dưới dạng $x = F(S) - n, n \in S$ hay $F(S) - x \in S, \forall x \in \mathbb{Z} \setminus S$.

Ngược lại, giả sử y là số nguyên bất kỳ thuộc vào tập hợp $\mathbb{Z} \setminus S$. Theo giả thiết, ta có $F(S) - y \in S$. Đặt $x = F(S) - y$, khi đó

$$\varphi(x) = F(S) - x = F(S) - (F(S) - y) = y.$$

Vậy φ là toàn ánh, do đó S là một nửa nhóm số đối xứng. □

1.3.13 Mệnh đề. *Giả sử S là một nửa nhóm số có hệ sinh tối thiểu là $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$ và*

$$\text{Ap}(S, n_0) = \{0 = \omega(1) < \omega(2) < \dots < \omega(n_0)\}.$$

Khi đó S nửa nhóm số đối xứng khi và chỉ khi

$$\omega(i) + \omega(n_0 - i + 1) = \omega(n_0), \quad \forall i \in \{1, \dots, n_0\}.$$

1.4 Biểu diễn của một nửa nhóm số

Mọi nửa nhóm số đều là vị nhóm hữu hạn sinh giản ước được nên theo Hệ quả 1.2.6 thì chúng biểu diễn được hữu hạn. Trong mục này chúng ta sẽ tìm hiểu về tính tối thiểu của một biểu diễn của một nửa nhóm số.

Cho σ là một tương đẳng trên vị nhóm tự do $\text{Free}(x_1, \dots, x_n)$ và cho ρ là một hệ sinh của σ . Ta nói rằng ρ là một *quan hệ tối thiểu* nếu lực lượng của ρ là nhỏ nhất trong số các lực lượng của các hệ sinh của σ .

Cho S là một nửa nhóm số với hệ sinh tối thiểu $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$ và tập hợp $X = \{X_0, X_1, \dots, X_p\}$ với $X_i \neq X_j$ với mọi $i \neq j$. Ta nói ρ là một *biểu diễn tối thiểu* nếu ρ là một quan hệ tối thiểu của tương đẳng hạt nhân của

$$\varphi : \text{Free}(X) \rightarrow S,$$

xác định bởi $\varphi(a_0X_0 + \dots + a_pX_p) = a_0n_0 + \dots + a_pn_p$. Ta có thể diễn đạt chi tiết hơn khái niệm này như sau. Gọi σ là tương đẳng hạt nhân của φ tức là

$$\sigma = \{(x, y) \in \text{Free}(X) \times \text{Free}(X) \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}.$$

Khi đó S đẳng cấu với vị nhóm thương của F/σ . Theo Hệ quả 1.2.6 thì σ là hữu hạn sinh, do đó tồn tại

$$\rho = \{(x_1, y_1), \dots, (x_t, y_t)\} \subset \text{Free}(X) \times \text{Free}(X)$$

sao cho σ là tương đẳng nhỏ nhất trên $\text{Free}(X)$ chứa ρ . Khi đó ρ là một biểu diễn của nửa nhóm số S . Nếu không có tập con thực sự nào khác của ρ sinh ra σ thì ρ là biểu diễn tối thiểu. Chú ý rằng đối với nửa nhóm số thì biểu diễn tối thiểu và biểu diễn có số phần tử nhỏ nhất là như nhau. Ngoài ra, một biểu diễn tối thiểu của một nửa nhóm số có thể được tính toán từ hệ sinh tối thiểu của nó.

Cho $n \in S \setminus \{0\}$, tập các biểu diễn của n trong S là tập hợp

$$E(n) = \varphi^{-1}(n) = \{x \in \text{Free}(X) \mid \varphi(x) = n\}.$$

Chú ý rằng $E(n)$ khác rỗng và hữu hạn. Trên $E(n)$ ta xác định một quan hệ tương đương R như sau:

$$a_0X_0 + \dots + a_pX_p \ R \ b_0X_0 + \dots + b_pX_p$$

nếu tồn tại

$$k_{00}X_0 + \dots + k_{0p}X_p, k_{10}X_0 + \dots + k_{1p}X_p, \dots, k_{l0}X_0 + \dots + k_{lp}X_p \in E(n)$$

sao cho

$$a_0X_0 + \dots + a_pX_p = k_{00}X_0 + \dots + k_{0p}X_p, b_0X_0 + \dots + b_pX_p = k_{l0}X_0 + \dots + k_{lp}X_p,$$

và

$$k_{i0}k_{i+l0} + \dots + k_{ip}k_{i+lp} \neq 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, l-1\}.$$

Ta định nghĩa γ_n như sau:

- Nếu $\#(E(n)/R) = 1$ thì $\gamma_n = \emptyset$;
- Nếu $\#(E(n)/R) = r \geq 2$ và $E(n)/R = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ thì ta chọn $x_i \in A_i, \forall i \in \{2, \dots, r\}$ và $y_2, \dots, y_r \in A_1$ và đặt

$$\gamma_n = \{(x_2, y_2), \dots, (x_r, y_r)\}.$$

Khi đó, từ [6], ta suy ra $\gamma = \bigcup_{n \in S \setminus \{0\}} \gamma_n$ là một biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số S .

CHƯƠNG 2

BIỂU DIỄN TỐI TIỂU CỦA NỬA NHÓM SỐ VỚI TẬP APÉRY CÓ BIỂU DIỄN DUY NHẤT

Chương này trình bày kết quả của bài báo [5] gồm hai phần. Phần đầu trình bày về biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số S có tính chất mọi phần tử trong tập $\text{Ap}(S, m(S))$ đều có biểu diễn duy nhất. Phần thứ hai, trình bày về nửa nhóm số đối xứng S mà mọi phần tử (trừ phần tử lớn nhất) của tập Apéry $\text{Ap}(S, m(S))$ đều có biểu diễn duy nhất.

2.1 Biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số

Cho S là một nửa nhóm số. Ta nói phần tử $n \in S$ có *biểu diễn duy nhất* nếu $\#(E(n)) = 1$. Như vậy, n có biểu diễn duy nhất nếu nó chỉ có một cách duy nhất biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính (trên $\mathbb{N}$) của hệ sinh tối thiểu của S . Trong mục này, chúng ta sẽ giả thiết S là một nửa nhóm số với hệ sinh tối thiểu $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$ và thoả mãn tính chất mọi phần tử của tập $\text{Ap}(S, n_0)$ đều có biểu diễn duy nhất. Chú ý rằng, n_0 chính là số bội $m(S)$ của nửa nhóm số S . Mục tiêu của tiết này là tìm biểu diễn tối thiểu của S .

Ký hiệu

$$T = \{(a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p \mid a_1 n_1 + \dots + a_p n_p \notin \text{Ap}(S, n_0)\}.$$

Giả sử tập các phần tử tối thiểu của T theo quan hệ thứ tự từ điển thông

thường trên $\mathbb{N}^p$ là

$$\text{Minimals}(T) = \{\alpha_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1p}), \dots, \alpha_t = (\alpha_{t1}, \dots, \alpha_{tp})\}.$$

Theo Bổ đề Dickson (Mệnh đề 1.2.5) thì tập hợp này hữu hạn. Với mỗi $\forall i \in \{1, \dots, t\}$, ta định nghĩa

$$x_i = 0X_0 + \alpha_{i1}X_1 + \dots + \alpha_{ip}X_p \in F.$$

Vì $\varphi(x_i) \notin \text{Ap}(S, n_0)$ nên tồn tại $(\beta_{i0}, \dots, \beta_{ip}) \in \mathbb{N}^{p+1}$ với $\beta_{i0} \neq 0$ sao cho

$$\varphi(x_i) = \beta_{i0}n_0 + \dots + \beta_{ip}n_p.$$

Với mỗi $i \in \{1, \dots, t\}$, ta định nghĩa

$$y_i = \beta_{i0}X_0 + \dots + \beta_{ip}X_p \in F.$$

Dễ thấy

$$\varphi(x_i) = \varphi(y_i), \forall i \in \{1, \dots, t\}$$

và do đó

$$\{(x_i, y_i), \dots, (x_t, y_t)\} \subseteq \sigma.$$

Định lý sau đây là kết quả chính trong [5].

2.1.1 Định lý. *Tập hợp $\rho = \{(x_1, y_1), \dots, (x_t, y_t)\}$ xác định như trên là một biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số S .*

Chứng minh. Để chứng minh ρ là biểu diễn tối thiểu của S ta chứng minh ρ nhận được bằng cách xây dựng như đã chỉ ra ở cuối Mục 1.4.

Trước hết ta có $\rho \subseteq \sigma$ và do đó

$$\rho = \bigcup_{n \in S \setminus \{0\}} \rho \cap ((E(n) \times E(n))).$$

Ta cần chứng minh $\#(E(n)/R) = 1$ kéo theo

$$\rho \cap ((E(n) \times E(n))) = \emptyset.$$

Để chứng minh điều này ta chỉ cần chứng minh $\#(E(\varphi(x_i))/R) \geq 2, \forall i \in \{1, \dots, t\}$. Vì $x_i, y_i \in E(\varphi(x_1))$ và $x_i \neq y_i$ nên chúng ta có thể khẳng định rằng $\#(E(\varphi(x_i))/R) \geq 2$. Ta chứng minh R -lớp của $E(\varphi(x_i))$ chứa x_i có số phần tử bằng 1 từ đó suy ra $\#(E(\varphi(x_i))/R) \geq 2$. Nếu $b_0X_0 + \dots + b_pX_p \in E(\varphi(x_i))$ và $b_00 + b_1\alpha_{i1} + \dots + b_p\alpha_{ip} \neq 0$ thì tồn tại $j \in \{1, \dots, p\}$ sao cho $\alpha_{ij}b_j \neq 0$. Do đó

$$(0, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ij} - 1, \dots, \alpha_{ip}), (b_0, \dots, b_j - 1, \dots, b_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$$

và

$$\alpha_{i1}n_1 + \dots + (\alpha_{ij} - 1)n_j + \dots + \alpha_{ip}n_p = b_0n_0 + \dots + (b_j - 1)n_j + \dots + b_pn_p.$$

Tính tối tiểu của α_i kéo theo

$$\alpha_{i1}n_1 + \dots + (\alpha_{ij} - 1)n_j + \dots + \alpha_{ip}n_p \in \text{Ap}(S, n_0)$$

và theo giả thiết, các phần tử của tập $\text{Ap}(S, n_0)$ có biểu diễn duy nhất nên

$$(0, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ij} - 1, \dots, \alpha_{ip}) = (b_0, \dots, b_j - 1, \dots, b_p).$$

Do đó

$$0X_0 + \alpha_{i1}X_1 + \dots + \alpha_{ip}X_p = b_0X_0 + \dots + b_pX_p.$$

Bây giờ chúng ta giả thiết $\#(E(n)/R) = r \geq 2$ và giả sử

$$E(n)/R = \{A_1, A_2, \dots, A_r\},$$

trong đó A_1 chứa tất cả các phần tử

$$a_0X_0 + \dots + a_pX_p \in E(n)$$

thỏa mãn $a_0 \neq 0$ (các phần tử này được chứa trong cùng một R -lớp của $E(n)$).

Ta cần chứng minh rằng nếu $x \in A_i$ với $i \in \{2, \dots, r\}$ thì $x \in \{x_1, \dots, x_t\}$.

Vì $x \notin A_1$ nên $x = 0X_0 + a_1X_1 + \dots + a_pX_p$ và trong trường hợp này

$$a_1n_1 + \dots + a_pn_p \notin \text{Ap}(S, n_0)$$

do phần tử này không có biểu diễn duy nhất mà mỗi phần tử của $\text{Ap}(S, n_0)$ đều có biểu diễn duy nhất. Hơn nữa, nếu $a_j \neq 0$ thì

$$a_1n_1 + \dots + (a_j - 1)n_j + \dots + a_pn_p \in \text{Ap}(S, n_0)$$

bởi nếu không thì tồn tại $(b_0, \dots, b_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ với $b_0 \neq 0$ sao cho

$$a_1n_1 + \dots + (a_j - 1)n_j + \dots + a_pn_p = b_0n_0 + \dots + b_pn_p,$$

điều này kéo theo

$$0X_0 + a_1x_1 + \dots + a_pX_p \ R \ b_0X_0 + \dots + (b_j + 1)X_j + \dots + b_pX_p$$

và do $b_0 \neq 0$ nên ta suy ra $0X_0 + a_1x_1 + \dots + a_pX_p \in A_1$, điều này vô lí. Điều đó chứng tỏ rằng nếu $x \in A_i, i \neq 1$ thì $x \in \{x_1, \dots, x_t\}$. Theo chứng minh trên, R -lớp của $E(\varphi(x_j))$ chứa x_j có số phần tử bằng 1. Do đó $\#A_i = 1$ với mọi $i \neq 1$. Vì vậy, ta có thể khẳng định rằng $\rho \cap ((E(n) \times E(n)))$ có dạng

$$\{(x_2, y_2), \dots, (x_r, y_r)\}$$

với $x_i \in A_i$ và $y_i \in A_1$ với mọi $i \in \{2, \dots, r\}$.

Với mỗi $n \in S \setminus \{0\}$, đặt $\rho_n = \rho \cap ((E(n) \times E(n)))$. Ta có $\rho = \bigcup_{n \in S \setminus \{0\}} \rho_n$.

Hơn nữa, ρ_n có các tính chất sau

- Nếu $\#(E(n)/R) = 1$ thì $\rho_n = \emptyset$.
- Nếu $\#(E(n)/R) = r \geq 2$ và $E(n)/R = \{A_1, \dots, A_r\}$ thì

$$\rho_n = \{(x_1, y_2), \dots, (x_r, y_r)\}$$

với $x_i \in A_i$ và $y_i \in A_1, \forall i \in \{2, \dots, r\}$.

Vì vậy theo nhận xét ở cuối Mục 1.4, ρ là một biểu diễn tối tiểu của nửa nhóm số S . □

Ví dụ sau đây minh hoạ cho định lý trên.

2.1.2 Ví dụ. Cho $S = \langle 7, 8, 25, 26, 27 \rangle$ là nửa nhóm số sinh bởi $\{7, 8, 25, 26, 27\}$. Ta có

$$\text{Ap}(S, 7) = \{0, 8, 16, 24, 25, 26, 27\}$$

và tất cả các phần tử của nó đều có biểu diễn duy nhất. Với các ký hiệu trong Định lý 2.1.1 thì $n_0 = 7, n_1 = 8, n_2 = 25, n_3 = 26, n_4 = 27$ và $\text{Ap}(S, n_0) = \{0, n_1, 2n_1, 3n_1, n_2, n_3, n_4\}$. Ta thấy tập hợp

$$\text{Minimals}\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4 \mid a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 + a_4n_4 \notin \text{Ap}(S, n_0)\}$$

chính là tập hợp

$$\begin{aligned} &\{(4, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 2, 0, 0), \\ &(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 2)\}. \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 2.1.1, ta có biểu diễn tối thiểu của S là:

$$\begin{aligned} \rho = \{ &(4X_1, X_0 + X_5), (X_1 + X_2, X_0 + X_3), (X_1 + X_3, X_0 + X_4), \\ &(X_1 + X_4, 5X_0), (2X_2, 6X_0 + X_1), (X_2 + X_3, 5X_0 + 2X_1), (X_2 + X_4, 4X_0 + 3X_1), \\ &(X_3 + X_4, 4X_0 + X_2), (2X_4, 4X_0 + X_3)\}. \end{aligned}$$

Có rất nhiều họ các nửa nhóm số đặc biệt thỏa mãn tính chất mỗi phần tử của $\text{Ap}(S, n_0)$ đều có biểu diễn duy nhất, chẳng hạn, các nửa nhóm số với chiều nhúng tối đại (viết tắt là MED-nửa nhóm). Một nửa nhóm số S với hệ sinh tối thiểu $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$ là MED-nửa nhóm nếu $n_0 = p + 1$. Khi đó $\text{Ap}(S, n_0) = \{0, n_1, \dots, n_p\}$ và do đó tất cả các phần tử của nó đều có biểu diễn duy nhất. Áp dụng Định lý 2.1.1, ta có biểu diễn tối thiểu của S là

$$\begin{aligned} \rho = \{ &(2X_1, y_1), (X_1 + X_2, y_2), \dots, (X_1 + X_p, y_p), (2X_2, y_{p+1}), \\ &(X_2 + X_3, y_{p+2}), \dots, (X_2 + X_p, y_{2p-1}), \dots, (2X_{p-1}, y_{p(p+1)/2-2}), \\ &X_{p-1} + X_p, y_{p(p+1)/2-1}, (2X_p, y_{p(p+1)/2})\}, \end{aligned}$$

trong đó nếu $(x, y) \in \rho$ thì $y \in E(\varphi(x))$ và hơn nữa y có dạng $y = a_0X_0 + \dots + a_pX_p$ với $a_0 \neq 0$. Những điều vừa trình bày đã chứng minh cho mệnh đề sau đây.

2.1.3 Mệnh đề. *Nếu S là MED-nửa nhóm với hệ sinh tối tiểu*

$$\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$$

thì số phần tử của một biểu diễn tối tiểu của S là $\frac{n_0(n_0 - 1)}{2}$.

Với hai số tự nhiên m và e bất kỳ sao cho $2 \leq e \leq m$, mệnh đề sau đây cho phép chúng ta xây dựng một nửa nhóm số với số bội là m và chiều nhúng là e và số phần tử của biểu diễn tối tiểu của nó là $\frac{e(e - 1)}{2}$.

2.1.4 Mệnh đề. *Cho $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ sao cho $m \geq q + 2$ và S là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$ sinh bởi*

$$\{m, m + 1, qm + q + 1, qm + q + 2, \dots, qm + (m - 1)\}.$$

Khi đó S là một nửa nhóm số có bội là m và chiều nhúng là $e = m - q + 1$ và số phần tử của biểu diễn tối tiểu của nó là $\frac{e(e - 1)}{2}$.

Chứng minh. Vì $\gcd\{m, m + 1\} = 1$, nên ta có thể coi S như là một hệ sinh của nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$ và do đó S là một nửa nhóm số. Hơn nữa

$$\{m, m + 1, qm + q + 1, qm + q + 2, \dots, qm + (m - 1)\}$$

là một hệ sinh tối tiểu của S và do đó S có số bội bằng m và chiều nhúng là $e = m - q + 1$. Đặt $n_0 = m, n_1 = m + 1, n_2 = qm + q + 1, \dots, n_p = qm + (m - 1)$. Khi đó, ta nhận được

$$\text{Ap}(S, n_0) = \{0, n_1, 2n_1, \dots, qn_1, n_2, n_3, \dots, n_p\}$$

là tập hợp có tất cả các phần tử đều biểu diễn duy nhất. Áp dụng Định lí 2.1.1, ta có biểu diễn tối tiểu của S là

$$\rho = \{((q + 1)X_1, y_1), (X_1 + X_2, y_2), \dots, (X_1 + X_p, y_p),$$

$$(2X_2, y_{p+1}), (X_2 + X_3, y_{p+2}), \dots, (X_2 + X_p, y_{2p-1}), \dots,$$

$$2X_{p-1}, y_{p(p+1)/2-2}, (X_{p-1} + X_p, y_{p(p+1)/2-1}), (2X_p, y_{p(p+1)/2})\},$$

trong đó nếu $(x, y) \in \rho$ thì $y \in E(\varphi(x))$ và y có dạng $y = a_0X_0 + \dots + a_pX_p$ với $a_0 \neq 0$. Do đó $\#(\rho) = \frac{e(e-1)}{2}$. $\square$

2.2 Biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số đối xứng

Như một áp dụng của Định lý 2.1.1, trong phần này chúng tôi trình bày về biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số đối xứng mà mọi phần tử (trừ phần tử lớn nhất) của tập Apéry $\text{Ap}(S, m(S))$ đều có biểu diễn duy nhất. Đây cũng chính là kết quả chính thứ hai trong bài báo [5]. Chú ý rằng nửa nhóm số đối xứng là lớp nửa nhóm số quan trọng, được nghiên cứu rất nhiều trong lý thuyết nửa nhóm số vì chúng có nhiều ứng dụng trong Đại số giao hoán và Hình học đại số.

Một nửa nhóm số S với số Frobenius C là đối xứng nếu $x \in \mathbb{Z}$ và $x \notin S$ kéo theo $C - x \in S$. Giả sử S là một nửa nhóm số có hệ sinh tối thiểu là $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$ và

$$\text{Ap}(S, n_0) = \{0 = \omega(1) < \omega(2) < \dots < \omega(n_0) = C + n_0\}.$$

Khi đó theo Mệnh đề 1.3.13, S nửa nhóm số đối xứng khi và chỉ khi

$$\omega(i) + \omega(n_0 - i + 1) = \omega(n_0), \quad \forall i \in \{1, \dots, n_0\}.$$

Đặc trưng này của nửa nhóm số đối xứng cho thấy tồn tại rất ít nửa nhóm số đối xứng S thỏa mãn điều kiện $\text{Ap}(S, n_0)$ có biểu diễn duy nhất. Vì vậy, trong phần này chúng ta chỉ nghiên cứu biểu diễn của nửa nhóm số đối xứng S thỏa mãn tính chất các phần tử của $\text{Ap}(S, n_0) \setminus \{C + n_0\}$ có biểu diễn duy nhất.

Từ đây trở về sau, ta giả sử S là một nửa nhóm số đối xứng có hệ sinh tối tiểu là $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$, có số Frobenius là C sao cho $C > n_0 > 2$ và

$$\text{Ap}(S, n_0) = \{0 = \omega(1) < \omega(2) < \dots < \omega(n_0) = C + n_0\}.$$

Hơn nữa, ta giả sử tất cả các phần tử của $\text{Ap}(S, n_0) \setminus \{C + n_0\}$ đều có biểu diễn duy nhất. Đặt $S' = S \cup \{C\}$. Khi đó, S' là một nửa nhóm số với hệ sinh tối tiểu là $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p < n_{p+1} = C\}$ và

$$\text{Ap}(S', n_0) = \{0 = \omega(1) < \omega(2) < \dots < \omega(n_0 - 1) < C\}.$$

Vì tất cả các phần tử của $\text{Ap}(S, n_0) \setminus \{C + n_0\}$ có biểu diễn duy nhất nên các phần tử của $\text{Ap}(S', n_0)$ cũng có biểu diễn duy nhất. Do đó áp dụng Định lý 2.1.1, ta có thể tìm được biểu diễn tối tiểu của S' . Năm 1996, trong hai bài báo khác nhau J. C. Rosales đã mô tả cách nhận được một biểu diễn tối tiểu ρ của S từ biểu diễn tối tiểu ρ' của S' và chỉ ra rằng $\#\rho' = \#\rho + p + 2$.

Lớp nửa nhóm số thoả mãn điều kiện tất cả các phần tử của $\text{Ap}(S, n_0) \setminus \{C + n_0\}$ đều có biểu diễn duy nhất cũng có nhiều tính chất thú vị. Chẳng hạn, trong số đó là lớp các nửa nhóm số đối xứng có chiều nhúng tối đại (viết tắt là MEDSY-nửa nhóm). Một nửa nhóm số S với hệ sinh tối tiểu $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$ là MEDSY-nửa nhóm nếu S là nửa nhóm số đối xứng và $3 \leq p + 1 = n_0 - 1$. Khi đó ta có

$$\text{Ap}(S, n_0) = \{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p < C + n_0\}$$

và do đó tất cả các phần tử của nó, trừ $C + n_0$, đều có biểu diễn duy nhất. Hơn nữa

$$E(C + n_0) = \{X_i + X_{p-i+1} \mid i \in \{1, \dots, [\frac{p+1}{2}]\}\},$$

với $[x]$ là ký hiệu phần nguyên của x . Chú ý rằng, khi đó ta có $S' = S \cup \{C\}$ là một MED-nửa nhóm. Suy ra $p + 2 = n_0$ và do đó từ Mệnh đề 2.1.3, ta nhận được kết quả sau đây.

2.2.1 Định lý. Nếu S là một MEDSY-nửa nhóm với hệ sinh tối tiểu là $\{n_0 < n_1 < \dots < n_p\}$ thì số phần tử của một biểu diễn tối tiểu của S là

$$\frac{(n_0 - 1)(n_0 - 2)}{2} - 1.$$

Định lý sau đây chỉ ra một họ các nửa nhóm số đối xứng với chiều nhúng bằng số bội trừ đi 2.

2.2.2 Mệnh đề. Cho m là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 5 và S là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$ sinh bởi

$$\{m, m + 1, m + 4, m + 5, \dots, m + (m - 1)\}.$$

Khi đó S là một nửa nhóm số đối xứng với bội số là m , chiều nhúng là $e = m - 2$ và số phần tử của biểu diễn tối tiểu của nó là $\frac{e(e - 1)}{2} - 1$.

Chứng minh. Vì $\gcd\{m, m + 1\} = 1$ nên có thể coi S là một hệ sinh của nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$ và do đó S là một nửa nhóm số. Hơn nữa

$$\{m, m + 1, m + 4, m + 5, \dots, m + (m - 1)\}$$

là một hệ sinh tối tiểu. Do đó số bội của S là m và chiều nhúng của S là $e = m - 2$. Đặt $n_0 = m, n_1 = m + 1, n_2 = m + 4, n_3 = m + 5, \dots, n_p = m + (m - 1)$. Ta có

$$\text{Ap}(S, n_0) = \{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p < 2n_1 < 3n_1$$

$$= n_2 + n_p = n_3 + n_{p-1} = \dots = n_{[(p+2)/2]} + n_{[(p+3)/2]}\},$$

với $[x]$ là phần nguyên của x . Như vậy nửa nhóm trên là nửa nhóm số đối xứng với tất cả các phần tử của $\text{Ap}(S, n_0)$ (trừ phần tử lớn nhất) đều có biểu diễn duy nhất. Vì vậy, số Frobenius của S là $n_{p+1} = 3n_1 - n_0$, nửa nhóm số S' sinh bởi $\{n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p < n_{p+1}\}$ có

$$\text{Ap}(S', n_0) = \{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p < 2n_1 < n_{p+1}\}$$

và tất cả các phần tử của nó đều có biểu diễn duy nhất. Áp dụng Định lý 2.1.1, S' có biểu diễn tối tiểu là

$$\rho' = \{(3X_1, y_1), (X_1 + X_2, y_2), \dots, (X_1 + X_{p+1}, y_{p+1}), (2X_2, y_{p+2}), \dots, \\ (X_2 + X_{p+1}, y_{2p+1}), \dots, (2X_{p+1}, y_{(p+1)+p+\dots+1})\},$$

trong đó y_k có dạng $a_0X_0 + \dots + a_{p+1}X_{p+1}$ với $a_0 \neq 0$. Khi đó $\#(\rho') = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$. Tuy nhiên, như ta đã biết, nếu ρ là một biểu diễn tối tiểu của S thì $\#(\rho') = \#(\rho) + p + 2$. Từ đó ta có

$$\#(\rho) = \frac{p(p+1)}{2} - 1 = \frac{e(e-1)}{2} - 1.$$

□

KẾT LUẬN

Nội dung chính của luận văn là trình bày về biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số với tập Apéry có biểu diễn duy nhất dựa vào bài báo [5] của J.C. Rosales. Chúng tôi đã hoàn thành được việc trình bày các kiến thức sau đây.

1. Một số kiến thức về lý thuyết nửa nhóm như tương đẳng, vị nhóm thương, đồng cấu vị nhóm, vị nhóm tự do trên một tập, biểu diễn của một vị nhóm và một số kiến thức về lý thuyết nửa nhóm số như khái niệm nửa nhóm số, chiều nhúng, số bội, số Frobenius, tập Apéry, nửa nhóm số đối xứng, nửa nhóm số có chiều nhúng tối đại. Các kết quả này được tham khảo từ các tài liệu [1], [2], [3], [4] (Mục 1.1, 1.2, 1.3).
2. Biểu diễn và biểu diễn tối thiểu của một nửa nhóm số. Các kết quả này được tham khảo từ [7] (Mục 1.4).
3. Biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số với tập Apéry có biểu diễn duy nhất tức là mọi phần tử trong tập $\text{Ap}(S, m(S))$ đều có biểu diễn duy nhất dựa theo [5] (Định lý 2.1.1).
4. Số phần tử của biểu diễn tối thiểu của nửa nhóm số trong một số trường hợp dựa theo [5] (Mệnh đề 2.1.3, Mệnh đề 2.1.4, Định lý 2.2.1).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Phan Văn Anh (2017), *Nửa nhóm số đối xứng*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.
- [2] Lê Quốc Hán (2007), *Lý thuyết ngôn ngữ nhóm*, Tập 1, Nxb. ĐHQG Hà Nội.
- [3] Lương Ngọc Nhật (2017), *Một số bất biến của nửa nhóm số*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.
- [4] Lương Đình Trung (2017), *Nửa nhóm số với chiều nhúng tối đại*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.

Tiếng Anh

- [5] J.C. Rosales (2000) Numerical Semigroups with Apéry Sets of Unique Expression, *Journal of Algebra*, **226**, 479–487.
- [6] J.C. Rosales (1996) *An algorithm for determining a minimal relations associated to a numerical semigroup*, Internat. J. Algebra Comput. **6**, 441–455.
- [7] J.C. Rosales, P.A. García- Sánchez (2009), *Numerical Semigroups*, Development in mathematics, **20**, Springer.