

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

PHAN THỊ THÚY

GIỐNG CỦA THUỞNG CỦA  
MỘT NỬA NHÓM SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

PHAN THỊ THÚY

GIỐNG CỦA THƯƠNG CỦA  
MỘT NỬA NHÓM SỐ

*Chuyên ngành:* ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ  
Mã số: 846 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học  
PGS. TS. NGUYỄN THỊ HỒNG LOAN

Nghệ An - 2021

# MỤC LỤC

|                                                                                          |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Mục lục</b>                                                                           | <b>3</b>  |
| <b>Mở đầu</b>                                                                            | <b>4</b>  |
| <b>1 Kiến thức chuẩn bị về nửa nhóm số</b>                                               | <b>7</b>  |
| 1.1. Nửa nhóm số và chiều nhúng của một nửa nhóm số . . . . .                            | 7         |
| 1.2. Số Frobenious và giống của một nửa nhóm số . . . . .                                | 9         |
| 1.3. Thương của một nửa nhóm số . . . . .                                                | 12        |
| 1.4. Nửa nhóm số đối xứng và nửa nhóm số $d$ -đối xứng . . . . .                         | 13        |
| <b>2 Giống của thương của một nửa nhóm số</b>                                            | <b>16</b> |
| 2.1. Liên hệ về giống của một nửa nhóm số và giống của thương của nó                     | 16        |
| 2.2. Số Frobenious và giống của thương nửa nhóm số sinh bởi một cấp<br>số cộng . . . . . | 22        |
| <b>Kết luận</b>                                                                          | <b>29</b> |
| <b>Tài liệu tham khảo</b>                                                                | <b>30</b> |

## MỞ ĐẦU

Cho  $\mathbb{N}$  là vị nhóm cộng các số tự nhiên. Ta nói  $S$  là một *nửa nhóm số* nếu  $S$  là một vị nhóm con của  $\mathbb{N}$  và phần bù của  $S$  trong  $\mathbb{N}$  là một tập hợp hữu hạn. Vì vậy, một nửa nhóm số  $S$  là một tập con của  $\mathbb{N}$  chứa 0, đóng kín đối với phép cộng các số thông thường và  $\mathbb{N} \setminus S$  là tập hữu hạn.

Mỗi nửa nhóm số  $S$  đều có một hệ sinh hữu hạn, nghĩa là luôn tồn tại hữu hạn số tự nhiên  $n_1, \dots, n_e \in S$  sao cho

$$S = \langle n_1, \dots, n_e \rangle = \{n_1\lambda_1 + \dots + n_e\lambda_e \mid \lambda_1, \dots, \lambda_e \in \mathbb{N}\}.$$

Mỗi nửa nhóm số  $S$  đều có duy nhất một hệ sinh tối tiểu và dĩ nhiên hệ sinh tối tiểu này là hữu hạn. Lực lượng của hệ sinh tối tiểu của nửa nhóm số  $S$  được gọi là *chiều nhúng của  $S$* .

Cho  $d$  là một số nguyên dương và  $S$  là một nửa nhóm số. Khi đó ta dễ dàng thấy rằng tập hợp

$$\frac{S}{d} = \{x \in \mathbb{N} \mid dx \in S\}$$

cũng là một nửa nhóm số. Nửa nhóm số  $\frac{S}{d}$  được gọi là *thương của  $S$  bởi  $d$* .

Nửa nhóm số  $\frac{S}{d}$  xuất hiện một cách tự nhiên trong quá trình nghiên cứu các nửa nhóm số modular tỷ lệ (proportionally modular numerical semigroups). Một nửa nhóm số được gọi là modular tỷ lệ nếu và chỉ nếu nó là thương của một nửa nhóm số có chiều nhúng bằng hai.

Vấn đề Frobenius do nhà toán học Frobenius (1849-1917) đưa ra trong các bài giảng của mình, nó có thể được diễn đạt như sau: Cho  $m_1, m_2, \dots, m_n$  là các số nguyên dương có ước chung lớn nhất bằng 1, tìm số nguyên lớn nhất

không biểu thị tuyến tính được qua  $m_1, m_2, \dots, m_n$  với các hệ số nguyên không âm. Về sau, người ta gọi số nguyên mà Frobenius đặt vấn đề tìm kiếm là *số Frobenius* của tập  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ . Vấn đề này của Frobenius cũng thường được biết đến với tên gọi là *Bài toán đổi tiền Frobenius* (Frobenius Coin Problem) vì số Frobenius của tập  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  chính là số tiền lớn nhất không thể trả được bằng các mệnh giá tiền  $m_1, m_2, \dots, m_n$  cho trước. Vấn đề Frobenius có nhiều ứng dụng trong toán học và tin học.

Vấn đề của Frobenius có thể được phát biểu như sau: Cho một nửa nhóm số  $S$ , tìm số nguyên lớn nhất không thuộc  $S$ . Trường hợp chiều nhúng của  $S$  bằng 2, vấn đề Frobenius đã được giải quyết hoàn toàn bởi nhà toán học Sylvester [6]. Vấn đề Frobenius đã tồn tại một thời gian dài. Thậm chí cho đến nay, người ta vẫn chưa đưa ra được một công thức tổng quát để tính số Frobenius cho nửa nhóm số có chiều nhúng lớn hơn hoặc bằng 3. Trong trường hợp chiều nhúng của  $S$  bằng 3, đã có một số nhà toán học đưa ra lời giải cho một số trường hợp đặc biệt.

Ngoài vấn đề xác định số nguyên lớn nhất không biểu thị tuyến tính được qua một họ hữu hạn các số nguyên nguyên tố cùng nhau với các hệ số nguyên không âm như đã nói ở trên, nhà toán học Frobenius còn đặt ra một câu hỏi là có bao nhiêu số nguyên không âm không biểu thị tuyến tính được như thế. Điều này đồng nghĩa với việc xác định lực lượng của tập hợp  $\mathbb{N} \setminus S$  và số nguyên này được gọi là *giống của nửa nhóm số  $S$* .

Như vậy, số Frobenius của nửa nhóm số  $S$  là  $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$  và giống của nửa nhóm số  $S$  là  $g(S) = \#(\mathbb{N} \setminus S)$ .

Năm 2019, trong bài báo [4], các tác giả A. Adeniran, S. Butler, C. Defant, Y. Gao, P. E. Harris, C. Hettle, Q. Liang, H. Nam, A. Volk đã chỉ ra hệ thức liên hệ giữa giống của nửa nhóm số  $S$  và giống của nửa nhóm số là thương của  $S$  bởi một số nguyên dương  $d$ . Từ đó họ đưa ra công thức xác định giống của thương của nửa nhóm số có chiều nhúng bằng hai. Cũng trong bài báo

này các tác giả đã đưa ra công thức tính số Frobenius và giống của thương của nửa nhóm số sinh bởi một cặp số cộng. Nội dung chính của luận văn là trình bày lại các kết quả trong bài báo [4] nói trên.

Cấu trúc của luận văn gồm Mở đầu, nội dung chính của luận văn (được trình bày trong 2 chương), Kết luận và Tài liệu tham khảo. Chương 1: Kiến thức chuẩn bị về nửa nhóm số. Chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị về nửa nhóm số có liên quan đến nội dung chính của luận văn, nhằm giúp người đọc dễ theo dõi nội dung chính của luận văn, bao gồm các nội dung: nửa nhóm số và chiều nhúng của một nửa nhóm số, số Frobenius và giống của nửa nhóm số, thương của một nửa nhóm số bởi một số nguyên dương, nửa nhóm số đối xứng và nửa nhóm số  $d$ -đối xứng. Chương 2: Giống của thương của một nửa nhóm số. Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả trong bài báo [4] của A. Adeniran, S. Butler, C. Defant, Y. Gao, P. E. Harris, C. Hettle, Q. Liang, H. Nam, A. Volk, gồm các nội dung: Liên hệ về giống của một nửa nhóm số và thương của nó, Số Frobenius và giống của thương của một nửa nhóm số sinh bởi một cặp số cộng.

Luận văn được thực hiện dưới sự hướng dẫn tận tình chu đáo của PGS. TS Nguyễn Thị Hồng Loan. Tác giả xin gửi đến cô lời cảm ơn sâu sắc, người đã tận tâm, nhiệt tình giúp đỡ, hướng dẫn, dạy dỗ, động viên và tạo điều kiện hết sức thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập cũng như thực hiện luận văn. Nhân dịp này tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Ngành Toán đã trực tiếp giảng dạy và tạo mọi điều kiện tốt nhất trong suốt quá trình học tập của lớp cao học 27 chuyên ngành Đại số và lý thuyết số tại Trường Đại học Vinh.

*Nghệ An, tháng 6 năm 2021*

**Tác giả**

## CHƯƠNG 1

### KIẾN THỨC CHUẨN BỊ VỀ NỬA NHÓM SỐ

Trong chương này, chúng tôi trình bày (không chứng minh) một số kiến thức về nửa nhóm số có liên quan đến nội dung chính của luận văn ở Chương 2. Cụ thể là, chúng tôi trình bày về khái niệm nửa nhóm số, số Frobenius, giống của nửa nhóm số, thương của nửa nhóm số bởi một số nguyên dương, nửa nhóm số đối xứng và nửa nhóm số  $d$ -đối xứng. Chương này được viết dựa vào các tài liệu tham khảo [1], [2], [3].

#### 1.1 Nửa nhóm số và chiều nhúng của một nửa nhóm số

**1.1.1 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một tập con của tập hợp các số tự nhiên  $\mathbb{N}$  sao cho  $0 \in S$ . Khi đó,  $S$  được gọi là một *nửa nhóm số* nếu  $S$  đóng kín với đối với phép cộng và  $\mathbb{N} \setminus S$  là tập hữu hạn.

Như vậy, nửa nhóm số  $S$  là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên  $\mathbb{N}$  sao cho phần bù của  $S$  trong  $\mathbb{N}$  là tập hợp hữu hạn. Nếu  $n_1, n_2, \dots, n_p$  là các số nguyên dương sao cho  $\gcd(n_1, n_2, \dots, n_p) = 1$  thì tập hợp

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle = \{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \dots + n_p\lambda_p \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{N}\}$$

là một nửa nhóm số và ngược lại, mọi nửa nhóm số đều có dạng này. Khi đó  $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$  được gọi là *hệ sinh của nửa nhóm số*  $\langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$ .

Cho  $X$  là một tập con khác rỗng (có thể vô hạn) của tập hợp các số tự nhiên  $\mathbb{N}$ . Ta nói ước chung lớn nhất của  $X$  bằng 1, ký hiệu  $\gcd(X) = 1$  nếu

ước chung lớn nhất của mọi tập con hữu hạn của  $X$  đều bằng 1. Ký hiệu  $\langle X \rangle$  là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính trên  $\mathbb{N}$  của  $X$ , nghĩa là

$$\langle X \rangle = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}.$$

Khi đó ta có kết quả sau đây.

**1.1.2 Mệnh đề.**  $\langle X \rangle$  là một nửa nhóm số nếu và chỉ nếu  $\gcd(X) = 1$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $\gcd(X) = d$ . Nếu  $s \in \langle X \rangle$  thì  $d \mid s$ . Do  $\langle X \rangle$  là một nửa nhóm số nên  $\mathbb{N} \setminus \langle X \rangle$  là một tập hữu hạn, Vì vậy tồn tại số nguyên dương  $n$  để sao cho  $d \mid n$  và  $d \mid (n + 1)$ . Do đó ta suy ra  $d = 1$ .

Ngược lại, ta cần chứng minh  $\mathbb{N} \setminus \langle X \rangle$  là một tập hợp hữu hạn. Thật vậy, vì  $\gcd(X) = 1$  nên tồn tại các số nguyên  $t_1, t_2, \dots, t_p$  và  $b_1, b_2, \dots, b_p \in X$  sao cho:

$$t_1 b_1 + t_2 b_2 + \dots + t_p b_p = 1.$$

Chuyển  $t_i$  sang vế phải, tìm được  $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, 2, \dots, p\}$  sao cho:

$$t_{i_1} b_{i_1} + t_{i_2} b_{i_2} + \dots + t_{i_k} b_{i_k} = 1 - t_{j_1} b_{j_1} - \dots - t_{j_l} b_{j_l}.$$

Do đó tồn tại  $s \in \langle X \rangle$  sao cho  $(s + 1) \in \langle X \rangle$ . Ta cần chứng minh, nếu  $p \geq (s - 1)s + (s - 1)$  thì  $p \in \langle X \rangle$ . Thật vậy, lấy  $m$  và  $n$  là các số nguyên sao cho  $p = ms + n$  với  $0 \leq n < s$ . Vì  $p \geq (s - 1)s + (s - 1)$  nên  $m \geq s - 1 \geq n$ . Do đó,

$$p = (ns + n) + (m - n)s = n(s + 1) + (n - m)s \in \langle X \rangle.$$

□

Một hệ sinh của một nửa nhóm số  $S$  được gọi là *hệ sinh tối thiểu* nếu mọi tập con thực sự của nó đều không thể sinh ra  $S$ .

**1.1.3 Mệnh đề.** Mỗi nửa nhóm số đều có duy nhất một hệ sinh tối thiểu và hệ sinh tối thiểu này gồm hữu hạn phần tử.



Mệnh đề 1.1.3 dẫn đến khái niệm sau đây.

**1.1.4 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số. Số phần tử của hệ sinh tối tiểu của  $S$  được gọi là *chiều nhúng của  $S$* .

## 1.2 Số Frobenious và giống của một nửa nhóm số

Nhà toán học Frobenius (1849-1917) đã đưa ra trong các bài giảng của mình vấn đề tìm công thức xác định số nguyên lớn nhất không biểu thị tuyến tính được qua một tập các số nguyên dương có ước chung lớn nhất bằng 1 với các hệ số nguyên không âm. Đồng thời với câu hỏi đó, Frobenius cũng đặt ra câu hỏi về việc xác định có bao nhiêu số nguyên dương không biểu thị tuyến tính được như thế. Điều đặc biệt là, những vấn đề này Ông chỉ đưa ra trong các bài giảng của mình mà không hề xuất bản dưới bất kỳ hình thức nào.

Theo ngôn ngữ của nửa nhóm số, vấn đề thứ nhất của Frobenius có nghĩa là tìm công thức xác định số nguyên lớn nhất không thuộc một nửa nhóm số  $S$  thông qua các phần tử trong hệ sinh tối tiểu của  $S$ .

**1.2.1 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số. Số nguyên lớn nhất không thuộc  $S$  được gọi là *số Frobenius của  $S$*  và được ký hiệu là  $F(S)$ .

Ký hiệu  $\mathbb{Z}$  là tập hợp số nguyên. Từ định nghĩa trên ta có

$$F(S) = \max(\mathbb{Z} \setminus S).$$

**1.2.2 Ví dụ.** 1) Cho nửa nhóm số  $S = \langle 4, 7 \rangle$ . Ta có

$$S = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18 \rightarrow\},$$

(trong luận văn này sử dụng ký hiệu  $18 \rightarrow$  có nghĩa là các số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 18). Do đó  $F(S) = 17$ .

2) Cho nửa nhóm số  $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$ . Ta có

$$S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \rightarrow\}.$$

Do đó  $F(S) = 13$ .

Vấn đề thứ hai của Frobenius dẫn đến khái niệm sau đây.

**1.2.3 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số. Ký hiệu  $H(S) = \mathbb{N} \setminus S$ . Lực lượng của tập  $H(S)$  ký hiệu là  $g(S)$  và được gọi là *giống của nửa nhóm số  $S$* , đôi khi nó còn được gọi là *bậc kỳ dị của  $S$* .

**1.2.4 Ví dụ.** 1) Đối với nửa nhóm số  $S = \langle 4, 7 \rangle$ , do

$$S = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18 \rightarrow\}$$

nên

$$H(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$$

và do đó giống của  $S$  là  $g(S) = 9$ .

2) Đối với nửa nhóm số  $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$ , ta có

$$S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \rightarrow\}.$$

Do đó  $H(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13\}$ . Vì vậy,  $g(S) = 8$ .

Để mô tả một nửa nhóm số, người ta thường sử dụng tập Apéry. Tập Apéry được định nghĩa như sau.

**1.2.5 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số và  $n \in S \setminus \{0\}$ . Tập hợp được xác định bởi

$$\text{Ap}(S, n) = \{h \in S \mid h - n \notin S\}$$

được gọi là *tập Apéry của  $n$  trong  $S$* .

Từ định nghĩa trên ta có phát biểu sau đây về tập Apéry.

**1.2.6 Bổ đề.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số và  $n \in S$  là một số nguyên dương. Giả sử  $x, y \in S$  sao cho  $x + y \in \text{Ap}(S, n)$ . Khi đó

$$\{x, y\} \subseteq \text{Ap}(S, n).$$

Để xác định tập Apéry của một nửa nhóm số, ta có thể dựa vào kết quả sau đây.

**1.2.7 Mệnh đề.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số và  $n \in S \setminus \{0\}$ . Khi đó ta có

$$\text{Ap}(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\}$$

trong đó  $w(i)$  là số nhỏ nhất của  $S$  sao cho

$$w(i) \equiv i \pmod{n}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Từ Mệnh đề 1.2.7 ta thấy  $\text{Ap}(S, n)$  là một hệ thặng dư đầy đủ mod  $n$ . Do đó, tập Apéry của phần tử  $n$  của nửa nhóm số  $S$  gồm  $n$  phần tử.

**1.2.8 Ví dụ.** Cho nửa nhóm số

$$S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \dots\}.$$

Ta tính được

$$\text{Ap}(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\},$$

$$\text{Ap}(S, 7) = \{0, 5, 9, 10, 15, 18, 20\}.$$

Sử dụng Mệnh đề 1.2.7, ta có thể chứng minh được kết quả sau đây. Kết quả này thường được sử dụng để tính giống và số Frobenius của một nửa nhóm số, nó được biết đến với tên gọi *công thức Selmer*. Công thức này do E. S. Selmer đưa ra năm 1977.

**1.2.9 Định lý.** Cho nửa nhóm số  $S$  và  $0 < n \in S$ . Khi đó ta có:

$$(1) \quad F(S) = \max \text{Ap}(S, n) - n,$$

$$(2) \quad g(S) = \frac{1}{n} \left( \sum_{w \in \text{Ap}(S, n)} w \right) - \frac{n-1}{2}.$$

Trong trường hợp nửa nhóm số có chiều nhúng bằng 2, định lý trên cho ta hệ quả sau đây, dễ dàng tính được giống và số Frobenius thông qua các phần tử sinh. Công thức này được đưa ra bởi J. J. Sylvester năm 1882.

**1.2.10 Hệ quả.** Cho nửa nhóm số  $S = \langle a, b \rangle$ , trong đó  $a, b$  là các số nguyên dương sao cho  $\gcd(a, b) = 1$ . Khi đó giống và số Frobenius của nửa nhóm số  $S$  được xác định như sau:

$$(1) F(S) = ab - a - b,$$

$$(2) g(S) = \frac{ab - a - b + 1}{2}.$$

Về mối liên hệ của giống và số Frobenius của một nửa nhóm số, ta có mệnh đề sau.

**1.2.11 Mệnh đề.** Cho nửa nhóm số  $S$ . Khi đó ta có:

$$2g(S) \geq F(S) + 1.$$

### 1.3 Thương của một nửa nhóm số

Cho  $d$  là một số nguyên dương và  $S$  là một nửa nhóm số. Ký hiệu

$$\frac{S}{d} = \{x \in \mathbb{N} \mid dx \in S\}.$$

Khi đó  $S \subseteq \frac{S}{d}$  và  $\frac{S}{d}$  cũng là một nửa nhóm số. Chú ý rằng  $\frac{S}{d} = \mathbb{N}$  khi và chỉ khi  $d \in S$ .

**1.3.1 Định nghĩa.** Nửa nhóm số  $\frac{S}{d}$  được gọi là *thương của  $S$  bởi  $d$* .

Chú ý rằng, nếu  $S$  là một nửa nhóm số,  $m$  là một phần tử khác 0 của  $S$  và  $d$  là một ước của  $m$  thì  $\frac{m}{d} \in \frac{S}{d}$ . Mệnh đề sau đây mô tả tập  $\text{Ap}\left(\frac{S}{d}, \frac{m}{d}\right)$  thông qua tập  $\text{Ap}(S, m)$ .

**1.3.2 Mệnh đề.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số,  $m$  là phần tử khác 0 của  $S$  và  $d$  là một ước của  $m$ . Khi đó:

$$\text{Ap}\left(\frac{S}{d}, \frac{m}{d}\right) = \left\{ \frac{w}{d} \mid w \in \text{Ap}(S, m), w \equiv 0 \pmod{d} \right\}.$$

Với các ký hiệu như trong mệnh đề trên, ta có hệ quả sau đây.

**1.3.3 Hệ quả.** Giả sử  $\text{Ap}(S, m) = \{0, k_1m + 1, \dots, k_{m-1}m + m - 1\}$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} (1). \text{Ap} \left( \frac{S}{d}; \frac{m}{d} \right) &= \left\{ 0; k_d \frac{m}{d} + 1, \dots, k \left( \frac{m}{d} - 1 \right)_d \frac{m}{d} + \frac{m}{d} - 1 \right\}, \\ (2). g \left( \frac{S}{d} \right) &= \left\{ k_d + k_{2d} + \dots + k \left( \frac{m}{d} - 1 \right)_d \right\}, \\ (3). F \left( \frac{S}{d} \right) &= \max \left\{ k_d \frac{m}{d} + 1, \dots, k \left( \frac{m}{d} - 1 \right)_d \frac{m}{d} + \frac{m}{d} - 1 \right\} - \frac{m}{d}. \end{aligned}$$

## 1.4 Nửa nhóm số đối xứng và nửa nhóm số $d$ -đối xứng

**1.4.1 Định nghĩa.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số  $S$ .

(1). Nếu số Frobenius  $F(S)$  là số lẻ và  $z \in \mathbb{Z} \setminus S$  kéo theo  $F(S) - z \in S$  thì  $S$  được gọi là *nửa nhóm số đối xứng*.

(2) Nếu số Frobenius  $F(S)$  là số chẵn và  $z \in \mathbb{Z} \setminus S$  kéo theo  $F(S) - z \in S$  hoặc  $z = \frac{F(S)}{2}$  thì  $S$  được gọi là *nửa nhóm số giả đối xứng*.

Chú ý rằng, có nhiều cách khác nhau để định nghĩa khái niệm nửa nhóm số đối xứng. Từ định nghĩa trên ta có mệnh đề sau.

**1.4.2 Mệnh đề.** Cho  $S$  là một nửa nhóm số.

(1).  $S$  là nửa nhóm số đối xứng nếu và chỉ nếu  $g(S) = \frac{F(S) + 1}{2}$ .

(2).  $S$  là nửa nhóm số giả đối xứng nếu và chỉ nếu  $g(S) = \frac{F(S) + 2}{2}$ .

**1.4.3 Định nghĩa.** Cho  $d$  là một số nguyên dương. Một nửa nhóm số  $S$  được gọi là  $d$ -đối xứng nếu với mọi số nguyên  $n \in \mathbb{Z}$  mà  $n$  chia hết cho  $d$  thì  $n \in S$  hoặc  $F(S) - n \in S$ .

Rõ ràng, nếu  $S$  là nửa nhóm số đối xứng thì  $S$  là nửa nhóm số  $d$ -đối xứng với mọi số nguyên dương  $d$ . Nếu  $S$  là nửa nhóm số 1-đối xứng thì  $S$  là nửa nhóm số đối xứng. Cho  $S$  là một nửa nhóm số 2-đối xứng. Khi đó,  $S$  là nửa nhóm số đối xứng nếu  $F(S)$  là một số nguyên lẻ.

**1.4.4 Mệnh đề.** Cho  $S$  và  $S'$  là các nửa nhóm số thỏa mãn  $S \subseteq S'$  và  $F(S) = F(S')$ . Khi đó, nếu  $S$  là nửa nhóm số  $d$ -đối xứng thì  $S'$  cũng là nửa nhóm số  $d$ -đối xứng và trong trường hợp này ta có  $\frac{S}{d} = \frac{S'}{d}$ .

**1.4.5 Ví dụ.** Cho nửa nhóm số  $S = \langle 12, 16, 21, 22, 23 \rangle$ . Ta có

$$S = \{0, 12, 16, 21, 22, 23, 24, 28, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 42, \rightarrow\}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} G(S) &= \mathbb{N} \setminus S \\ &= \{1, \dots, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 38, 41\}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

- Giống của  $S$  là  $g(S) = 26$ ,
- Số Frobenius của  $S$  là  $F(S) = 41$ ,
- $S$  là nửa nhóm số 4-đối xứng,
- Tập hợp các số nguyên  $n \notin S$  mà  $F(S) - n \notin S$  là

$$\{10, 11, 14, 15, 26, 27, 30, 31\}.$$

Nếu ta thêm 10 vào nửa nhóm số  $S$  thì do  $2 \cdot 10 + 21 = 41$  nên 41 sẽ thuộc vào nửa nhóm số đó. Vì vậy, số Frobenius sẽ không được giữ nguyên. Như vậy, bất kỳ nửa nhóm đối xứng  $S'$  nào chứa  $S$  với  $F(S') = F(S)$  đều phải chứa 31.

Tuy nhiên, có các nửa nhóm số đối xứng (và 4 -đối xứng)  $S'$  chứa 11 và trong số này có những nửa nhóm số chứa 30. Tất cả các nửa nhóm số đối xứng  $S'$  có thể có chứa  $S$  với  $F(S') = F(S)$  là:

$$\begin{aligned} &\langle 11, 12, 16, 21, 22, 23, 26, 31 \rangle, \langle 12, 14, 16, 21, 22, 23, 31 \rangle, \\ &\langle 12, 15, 16, 21, 22, 23, 31 \rangle, \langle 12, 16, 21, 22, 23, 26, 27, 30, 31 \rangle. \end{aligned}$$

**1.4.6 Định lý.** *Cho  $S$  là một nửa nhóm số  $d$ -đối xứng. Khi đó*

$$F(S/d) = \frac{F(S) - x}{d},$$

*trong đó  $x$  là số nguyên dương nhỏ nhất thuộc  $S$  thỏa mãn  $x \equiv F(S) \pmod{d}$ .*

## CHƯƠNG 2

### GIỐNG CỦA THƯƠNG CỦA MỘT NỬA NHÓM SỐ

Trong [4], các tác giả A. Adeniran, S. Butler, C. Defant, Y. Gao, P. E. Harris, C. Hettle, Q. Liang, H. Nam, A. Volk đã chỉ ra mối liên hệ giữa giống của nửa nhóm số  $S$  và giống của nửa nhóm số là thương của  $S$  bởi một số nguyên dương  $d$ . Cụ thể là họ đã chứng minh được công thức sau đây

$$g(S/d) = \frac{1}{d} \left[ g(S) + \frac{d-1}{2} \sum_{i=1}^{d-1} H_S(\zeta_d^i) \right]$$

trong đó  $H_S(x) = \sum_{s \in S} x^s$  là chuỗi Hilbert và  $\zeta_d$  là căn nguyên thủy bậc  $d$  của đơn vị. Từ đó họ đưa ra công thức xác định giống của thương của nửa nhóm số có chiều nhúng bằng hai. Cũng trong bài báo này các tác giả đã đưa ra công thức tính số Frobenius và giống của thương của nửa nhóm số có chiều nhúng bằng 3 sinh bởi một cấp số cộng. Nội dung chính của chương này là trình bày lại các kết quả của bài báo [4].

#### 2.1 Liên hệ về giống của một nửa nhóm số và giống của thương của nó

Khi nghiên cứu nửa nhóm số  $S$ , một công cụ hữu ích là chuỗi Hilbert

$$H_S(x) = \sum_{s \in S} x^s$$

và đa thức nửa nhóm

$$P_S(x) = (1-x) H_S(x) = 1 - (1-x) \sum_{s \notin S} x^s.$$



Chú ý rằng  $P_S(x)$  là một đa thức vì phần bù của  $S$  trong  $\mathbb{N}$  là tập hợp hữu hạn.

Cho  $n$  là một số nguyên dương. Ta biết rằng, có  $n$  căn bậc  $n$  của đơn vị, đó là các số phức

$$\zeta_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

$\zeta_k$  được gọi là *căn nguyên thủy bậc  $n$  của đơn vị* nếu  $\zeta_k$  không là căn bậc nhỏ hơn  $n$  của đơn vị. Chú ý rằng số phức  $\zeta$  là căn nguyên thủy bậc  $n$  của đơn vị nếu và chỉ nếu  $n$  là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho  $\zeta^n = 1$ . Do đó,  $\zeta_k$  là căn nguyên thủy bậc  $n$  của đơn vị nếu và chỉ nếu  $(k, n) = 1$ . Như vậy có tất cả  $\varphi(n)$  căn bậc  $n$  của đơn vị, trong đó  $\varphi$  là hàm Euler ( $\varphi(n)$  là số các số từ 1 đến  $n$  mà nguyên tố cùng nhau với  $n$ ). Chú ý rằng  $\zeta_k = \zeta_1^k$ .

**2.1.1 Bổ đề.** *Giả sử  $\zeta$  là một căn bậc  $n$  của đơn vị. Khi đó ta có*

- (1)  $\zeta^a = \zeta^b$  khi và chỉ khi  $a \equiv b \pmod{n}$ ;
- (2) Tập các căn bậc  $n$  của đơn vị là  $\{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}\}$ .

Định lý sau đây cho biết mối liên hệ giữa giống của nửa nhóm số  $S$  và giống của nửa nhóm số  $S/d$ , với  $d$  là một số nguyên dương.

**2.1.2 Định lý.** *Cho  $S$  là một nửa nhóm số và  $d$  là một số nguyên dương. Khi đó*

$$g(S/d) = \frac{1}{d} \left[ g(S) + \frac{d-1}{2} \sum_{i=1}^{d-1} H_S(\zeta_d^i) \right],$$

trong đó  $H_S(x) = \sum_{s \in S} x^s$  là chuỗi Hilbert và  $\zeta_d$  là căn nguyên thủy bậc  $d$  của đơn vị.

*Chứng minh.* Cố định một số nguyên dương  $d$ , và đặt

$$A_i = \#\{s \in \mathbb{N} \setminus S \mid s \equiv i \pmod{d}\}.$$

Rõ ràng  $A_0 = g(S/d)$ . Cho  $\zeta_d$  là một căn nguyên thủy bậc  $d$  của đơn vị. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P_S(\zeta_d) &= 1 - (1 - \zeta_d) \left( A_0 + \zeta_d A_1 + \zeta_d^2 A_2 + \dots + \zeta_d^{d-1} A_{d-1} \right) \\ P_S(\zeta_d^2) &= 1 - (1 - \zeta_d^2) \left( A_0 + \zeta_d^2 A_1 + \zeta_d^4 A_2 + \dots + \zeta_d^{2(d-1)} A_{d-1} \right) \\ &\vdots \\ P_S(\zeta_d^{d-1}) &= 1 - (1 - \zeta_d^{d-1}) \left( A_0 + \zeta_d^{d-1} A_1 + \zeta_d^{2(d-1)} A_2 + \dots + \zeta_d^{(d-1)^2} A_{d-1} \right) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$g(S) = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{d-1}.$$

Viết lại các đẳng thức trên dưới dạng sau

$$\begin{aligned} A_0 + \zeta_d A_1 + \zeta_d^2 A_2 + \dots + \zeta_d^{d-1} A_{d-1} &= \frac{1 - P_S(\zeta_d)}{1 - \zeta_d} \\ A_0 + \zeta_d^2 A_1 + \zeta_d^4 A_2 + \dots + \zeta_d^{2(d-1)} A_{d-1} &= \frac{1 - P_S(\zeta_d^2)}{1 - \zeta_d^2} \\ &\vdots \\ A_0 + \zeta_d^{d-1} A_1 + \zeta_d^{2(d-1)} A_2 + \dots + \zeta_d^{(d-1)^2} A_{d-1} &= \frac{1 - P_S(\zeta_d^{d-1})}{1 - \zeta_d^{d-1}} \\ A_0 + A_1 + \dots + A_{d-1} &= g(S). \end{aligned}$$

Cộng về với về tất cả các đẳng thức trên và sử dụng tính chất sau được suy ra từ Bổ đề 2.1.1

$$1 + \zeta_d + \zeta_d^2 + \dots + \zeta_d^{d-1} = 0,$$

ta nhận được

$$A_0 = \frac{1}{d} \left( g(S) + \sum_{n=1}^{d-1} \frac{1 - P_S(\zeta_d^n)}{1 - \zeta_d^n} \right) = \frac{1}{d} \left( g(S) + \sum_{n=1}^{d-1} \frac{1}{1 - \zeta_d^n} - \sum_{n=1}^{d-1} H_S(\zeta_d^n) \right).$$

Bây giờ ta cần chứng minh

$$\sum_{n=1}^{d-1} \frac{1}{1 - \zeta_d^n} = \frac{d-1}{2}.$$

Để chứng minh điều này, ta chú ý rằng, với  $1 \leq k \leq d-1$ , ta có

$$\frac{1}{1 - \zeta_d^k} + \frac{1}{1 - \zeta_d^{d-k}} = \frac{1}{1 - \zeta_d^k} + \frac{1}{1 - \zeta_d^{-k}} = 1$$

Do đó, khi  $d$  là số lẻ thì đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên. Nếu  $d$  chẵn thì

$$\sum_{n=1}^{d-1} \frac{1}{1 - \zeta_d^n} = \frac{d-2}{2} + \frac{1}{1 - \zeta_d^{d/2}} = \frac{d-1}{2}$$

vì  $\zeta_d^{d/2} = -1$ . Do đó đẳng thức được chứng minh và điều này hoàn thành việc chứng minh Định lý 2.1.2.  $\square$

**2.1.3 Hệ quả.** Cho  $a, b$  và  $d$  là các số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau và  $a^*$  là số nguyên duy nhất thỏa mãn  $aa^* \equiv 1 \pmod{d}$  và  $1 \leq a^* \leq d-1$ .

Khi đó, ta có

$$g(\langle a, b \rangle / d) = \frac{(a-1)(b+d-a^*ab)}{2d} + \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{a-1}{d} \right\rfloor \left( a^*b \left\lfloor \frac{a-1}{d} \right\rfloor + a^*b - 2 \right) + \sum_{j=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{a^*bj}{d} \right\rfloor, \text{ ở đây}$$

$\lfloor * \rfloor$  là ký hiệu chỉ phần nguyên.

*Chứng minh.* Ta gọi  $S = \langle a, b \rangle$  là nửa nhóm số sinh bởi  $a, b$ . Dễ thấy rằng

$$H_S(x) = \frac{1 - x^{ab}}{(1 - x^a)(1 - x^b)} = \frac{1}{1 - x^a} \sum_{i=0}^{(a-1)b} x^i.$$

Vì vậy, ta có

$$\sum_{i=1}^{d-1} H_S(\zeta_d^i) = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1 + \zeta_d^{bi} + \zeta_d^{2bi} + \dots + \zeta_d^{(a-1)bi}}{1 - \zeta_d^{ai}} = \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\zeta_d^{bj i}}{1 - \zeta_d^{ai}}.$$

Cho  $\delta_d = \zeta_d^a$  cũng là một căn nguyên thủy bậc  $d$  của đơn vị. Khi đó, ta có  $\zeta_d^{a^*} = \zeta_d^{aa^*} = \zeta_d$ .

Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d-1} H_S(\zeta_d^i) &= \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=0}^{a-1} \frac{\delta_d^{a^*bj i}}{1 - \delta_d^i} \\
&= \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{1 - \delta_d^i} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\delta_d^{a^*bj i} - 1 + 1}{1 - \delta_d^i} \\
&= \frac{d-1}{2} + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{a-1} \left( - \left( 1 + \delta_d^i + \delta_d^{2i} + \dots + \delta_d^{(a^*bj-1)i} \right) + \frac{1}{1 - \delta_d^i} \right) \\
&= \frac{a(d-1)}{2} - \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{i=1}^{d-1} \left( 1 + \delta_d^i + \delta_d^{2i} + \dots + \delta_d^{(a^*bj-1)i} \right) \\
&= \frac{a(d-1)}{2} - \sum_{\substack{j=1 \\ d \nmid j}}^{a-1} \sum_{i=1}^{d-1} \left( \delta_d^{\lfloor \frac{a^*bj}{d} \rfloor di} + \delta_d^{(\lfloor \frac{a^*bj}{d} \rfloor d+1)i} + \dots + \delta_d^{(a^*bj-1)i} \right) \\
&= \frac{a(d-1)}{2} - \sum_{\substack{j=1 \\ d \nmid j}}^{a-1} \sum_{i=1}^{d-1} \left( 1 + \delta_d^i + \dots + \delta_d^{(a^*bj-1 - \lfloor \frac{a^*bj}{d} \rfloor d)i} \right) \\
&= \frac{a(d-1)}{2} - \sum_{\substack{j=1 \\ d \nmid j}}^{a-1} \left\{ (d-1) + \sum_{i=1}^{d-1} \delta_d^i + \dots + \sum_{i=1}^{d-1} \delta_d^{(a^*bj-1 - \lfloor \frac{a^*bj}{d} \rfloor d)i} \right\} \\
&= \frac{a(d-1)}{2} - \sum_{\substack{j=1 \\ d \nmid j}}^{a-1} \left\{ (d-1) + (-1) \left( a^*bj - 1 - \left\lfloor \frac{a^*bj}{d} \right\rfloor d \right) \right\} \\
&= \frac{a(d-1)}{2} - d \left( (a-1) - \left\lfloor \frac{a-1}{d} \right\rfloor d \right) \\
&\quad + a^*b \left( \sum_{j=1}^{a-1} j - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{a^*bj}{d} \rfloor d} dj \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ d \nmid j}}^{a-1} \left\lfloor \frac{a^*bj}{d} \right\rfloor d \\
&= \frac{a(d-1)}{2} - (a-1)d + \left\lfloor \frac{a^*bj}{d} \right\rfloor d + \frac{a^*ba(a-1)}{2} \\
&\quad - \frac{a^*bd}{2} \left\lfloor \frac{a-1}{d} \right\rfloor \left( \left\lfloor \frac{a-1}{d} \right\rfloor + 1 \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ d \nmid j}}^{a-1} \left\lfloor \frac{a^*bj}{d} \right\rfloor d.
\end{aligned}$$

Trong các biến đổi trên đây ta đã sử dụng đồng nhất thức

$$\sum_{n=1}^{d-1} \frac{1}{1 - \zeta_d^n} = \frac{d-1}{2}$$

đã được chứng minh trong chứng minh của Định lý 2.1.2 và đồng nhất thức

$$1 + \zeta_d^i + \zeta_d^{2i} + \dots + \zeta_d^{(d-1)i} = 0$$

với  $1 \leq i \leq d-1$ . Đến đây, áp dụng Định lý 2.1.2 ta suy ra ngay điều cần chứng minh.  $\square$

Bây giờ chúng ta xem xét trường hợp chiều nhúng bằng 2.

**2.1.4 Định lý.** *Nếu  $a, b, d$  là các số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau thì*

$$g(\langle a, b \rangle / d) = \frac{1}{2d} (a-1)(b-1) + C_{a,b,d},$$

trong đó  $C_{a,b,d}$  là một hằng số chỉ phụ thuộc vào  $d$  và các lớp thặng dư  $a$  và  $b$  modulo  $d$ .

*Chứng minh.* Cho nửa nhóm số  $S = \langle a, b \rangle$  sinh bởi  $a$  và  $b$ . Theo Hệ quả 1.2.10, ta có  $g(S) = (a-1)(b-1)/2$ . Trong chứng minh của Định lý 2.1.2, ta đã có hệ thức

$$A_0 = \frac{1}{d} \left( g(S) + \sum_{n=1}^{d-1} \frac{1 - P_S(\zeta_d^n)}{1 - \zeta_d^n} \right) = \frac{1}{d} \left( g(S) + \sum_{n=1}^{d-1} \frac{1}{1 - \zeta_d^n} - \sum_{n=1}^{d-1} H_S(\zeta_d^n) \right).$$

Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned} g(S/d) = A_0 &= \frac{1}{d} \left( g(S) + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{1 - P_S(\zeta_d^j)}{1 - \zeta_d^j} \right) \\ &= \frac{1}{2d} (a-1)(b-1) + \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{1 - P_S(\zeta_d^j)}{1 - \zeta_d^j}. \end{aligned}$$

$\square$

Chú ý rằng

$$q(x) = c_d(x)x^k + c_{d-1}(x)x^{k-1} + \dots + c_0(x)$$

được gọi là một *tựa đa thức bậc  $k$  theo biến  $x$*  nếu các hệ tử  $c_i(x)$  là các hàm tuần hoàn của  $x$ . Năm 2015, trong một bài báo của mình, F. Strazzanti đã chứng minh được rằng  $F(\frac{\langle a, b \rangle}{2})$  và  $F(\frac{\langle a, a+1 \rangle}{5})$  là các tựa đa thức bậc 2 theo biến  $a$  (với chu kỳ tuần hoàn tương ứng là 2 và 5). Sử dụng Định lý 2.1.2 cho trường hợp nửa nhóm số  $S = \langle a, a+k \rangle$  với  $k$  là một số nguyên dương cố định nguyên tố cùng nhau với  $a$ , ta nhận được hệ quả sau đây, là một tổng quát hóa của kết quả nói trên của F. Strazzanti. Kết quả này cũng là một tổng quát hóa của công thức tính  $g(\frac{\langle a, b \rangle}{2})$  (khi  $\gcd(a, b) = 1$ ) được đưa ra bởi Z. Gu và X. Tang năm 2016. Ở đây, chúng ta nhận được công thức tính  $g(\frac{\langle a, b \rangle}{d})$  với mọi  $d \geq 2$ .

**2.1.5 Hệ quả.** *Cho  $d$  là một số nguyên dương. Khi đó, với các số nguyên dương  $a$  và  $k$  nguyên tố cùng nhau thì  $g(\langle a, a+k \rangle/d)$  là một tựa đa thức bậc 2 với hệ số cao nhất là  $\frac{1}{2d}$ .*

## 2.2 Số Frobenious và giống của thương nửa nhóm số sinh bởi một cặp số cộng

Hai loại nửa nhóm số được nghiên cứu nhiều nhất đó là các nửa nhóm số dạng  $\langle a, a+k, a+2k \rangle$  và  $\langle a, a+k, \dots, a+(a-1)k \rangle$ , trong đó  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chú ý rằng nửa nhóm số  $\langle a, a+k, \dots, a+(a-1)k \rangle$  thực chất là nửa nhóm số được sinh bởi các số hạng của cấp số cộng vô hạn  $a, a+k, a+2k, \dots$ . Mệnh đề sau đây là một trường hợp đặc biệt của một kết quả năm 2014 của T. Numata.

**2.2.1 Bổ đề.** *Nếu  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì nửa nhóm số  $\langle a, a+k, a+2k \rangle$  là đối xứng khi và chỉ khi  $a$  là số chẵn.*

**2.2.2 Bổ đề.** Cho  $d \geq 3$  là một số nguyên. Cho  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Nếu  $a = sd$  là một dương, chẵn và là một bội của  $d$  thì nửa nhóm số  $\langle a, a + k, a + 2k/d \rangle$  là đối xứng.

*Chứng minh.* Đặt  $S = \langle a, a + k, a + 2k \rangle$ . Do  $a$  và  $k$  nguyên tố cùng nhau nên  $\gcd(d, k) = 1$ . Mỗi phần tử của  $S$  có dạng

$$ax + (a + k)y + (a + 2k)z,$$

trong đó  $x, y, z$  là các số nguyên không âm. Để phần tử này là một bội của  $d$ , thì ta cần  $d|(y + 2z)$ . Do đó,  $S/d$  là nửa nhóm số sinh bởi  $s, a + k, a + 2k$  và tất cả các số nguyên có dạng  $\frac{(a + k)y + (a + 2k)z}{d}$  sao cho  $d|(y + 2z)$  và  $y, z \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$ .

Đầu tiên, ta giả thiết  $d$  là số lẻ và đặt  $d = 2t + 1$ . Theo giả thiết,  $s$  là số chẵn. Các cặp số  $(y, z)$  thỏa mãn  $d|(y + 2z)$  và  $y, z \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$  là

$$(d - 2; 1), (d - 4; 2), \dots, (1; t), (d - 1, t + 1), \dots, (2; 2t).$$

Các giá trị tương ứng của  $\frac{(a + k)y + (a + 2k)z}{d}$  là

$$a + k - s, a + k - 2s, \dots, a + k - ts, \dots, a + 2k + s.$$

Vì vậy,

$$S/d = \langle s, a + k - ts, a + 2k \rangle.$$

Mặt khác,  $a = sd = (2t + 1)s$  nên

$$S/d = \langle s, s + k + ts, s + 2k + 2ts \rangle.$$

Theo Bổ đề 2.2.1,  $S/d$  là nửa nhóm số đối xứng.

Tiếp theo, chúng ta giả thiết  $d$  là số chẵn và đặt  $d = 2t$ . Các cặp số  $(y, z)$  thỏa mãn  $d|(y + 2z)$  và  $y, z \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$  là

$$(d - 2, 1), (d - 4, 2), \dots, (0, t), (d - 2, t + 1), \dots, (2, 2t - 1).$$

Các giá trị tương ứng của  $\frac{(a+k)y + (a+2k)z}{d}$  là

$$a+k-s, a+k-2s, \dots, a+k-ts, a+2k+(t-1)s, \dots, a+2k+s.$$

Do đó

$$S/d = \langle s, a+k-st, a+2k \rangle = \langle s, k+st, 2k+2st \rangle = \langle s, k+st \rangle.$$

Vì mọi nửa nhóm số với chiều nhúng bằng 2 đều là nửa nhóm số đối xứng, nên mệnh đề được chứng minh.  $\square$

Hai kết quả tiếp theo đây cho ta công thức tính số Frobenius và giống của thương của một nửa nhóm số có chiều nhúng bằng 3, sinh bởi một cặp số cộng.

**2.2.3 Định lý.** Cho  $d \geq 4$  là một số nguyên chẵn,  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Nếu  $a = sd$  thì

$$F(\langle a, a+k, a+2k \rangle / d) = \frac{(s-1)(a+2k)}{2} - s$$

và

$$g(\langle a, a+k, a+2k \rangle / d) = \frac{(s-1)(a+2k-2)}{4}.$$

*Chứng minh.* Viết  $d = 2t$ . Từ chứng minh của Bổ đề 2.2.2, ta có

$$\langle a, a+k, a+2k \rangle / d = \langle s, k+st \rangle.$$

Áp dụng Hệ quả 1.2.10, ta có

$$F(\langle s, k+st \rangle) = s(k+st) - s - (k+st) = \frac{(s-1)(a+2k)}{2} - s$$

và

$$g(\langle s, k+st \rangle) = \frac{(s-1)(k+st-1)}{2} = \frac{(s-1)(a+2k-2)}{4}.$$

Do đó

$$F(\langle a, a+k, a+2k \rangle / d) = \frac{(s-1)(a+2k)}{2} - s$$



và

$$g(\langle a, a+k, a+2k/d \rangle) = \frac{(s-1)(a+2k-2)}{4}.$$

□

**2.2.4 Định lý.** Cho nửa nhóm số  $S = \langle a, a+k, a+2k \rangle$ , trong đó  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Giả sử  $d$  là một ước số dương của  $a$  và giả sử  $a = sd$ . Nếu  $a$  là số lẻ, thì

$$F(S/d) = \left( (s-1)t + \frac{s-1}{2} \right) s + (s-1)k - s$$

và

$$g(S/d) = \frac{1}{2} \left( s(s-1)t + \frac{s^2-1}{2} + (s-1)k - (s-1) \right).$$

*Chứng minh.* Từ chứng minh của Bổ đề 2.2.2, ta có

$$S/d = \langle s, s+k+ts, s+2k+2ts \rangle = \langle s, (t+1)s+k, (2t+1)s+2k \rangle,$$

trong đó  $d = 2t+1$ . Do đó,

$$Ap(S, s) = \{0, (t+1)s+k, (2t+1)s+2k, (3t+2)s+3k, (4t+2)s+4k, \dots, \\ \left( (s-2)t + \frac{s-1}{2} \right) s + (s-2)k, \left( (s-1)t + \frac{s-1}{2} \right) s + (s-1)k\}$$

vì  $\gcd(s, k) = 1$ . Do đó điều cần chứng minh được suy ra từ Định lý 1.2.9. □

Trong trường hợp  $a$  là số lẻ thì ta có mối quan hệ sau đây.

**2.2.5 Hệ quả.** Cho nửa nhóm số  $S = \langle a, a+k, a+2k \rangle$ , trong đó  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Giả sử  $d$  là một ước số dương của  $a$  và giả sử  $a = sd$ . Nếu  $a$  lẻ thì

$$2g(S/d) - F(S/d) = \frac{s+1}{2}.$$

Bây giờ ta xét các nửa nhóm số sinh bởi các số hạng của một cấp số cộng vô hạn  $a, a + k, a + 2k, \dots$ , trong đó  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Hay nói cách khác, chúng ta xét các nửa nhóm số dạng

$$S = \langle a, a + k, a + 2k, \dots, a + (a - 1)k \rangle.$$

Định lý sau cho thấy mối quan hệ giữa số Frobenius và giống của những nửa nhóm số dạng này.

### 2.2.6 Định lý. Cho nửa nhóm số

$$S = \langle a, a + k, a + 2k, \dots, a + (a - 1)k \rangle,$$

trong đó  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Cho  $d$  là một ước số dương của  $a$  và giả sử  $a = sd$ . Khi đó, ta có

$$g(S/d) = \frac{F(S/d) + s - 1}{2}.$$

*Chứng minh.* Trước hết, ta sẽ chứng tỏ rằng có thể quy về trường hợp  $d = 1$ . Thật vậy, cho  $x_{i,a}$  là phần tử duy nhất của tập hợp  $\{0, 1, \dots, a - 1\}$  sao cho  $x_{i,a}k \equiv i \pmod{a}$  (tính duy nhất là do giả thiết  $\gcd(a, k) = 1$ ). Chúng ta khẳng định rằng các phần tử của  $S$  đồng dư với  $i$  modulo  $a$  chính là các số nguyên có dạng  $ta + x_{i,a}k$  với  $t$  là số nguyên dương. Để thấy được điều này, hãy chú ý rằng mọi số nguyên không âm là tổ hợp tuyến tính của hệ sinh của  $S$  đều có dạng  $ta + mk$ ; để có  $ta + mk \equiv i \pmod{a}$ , ta cần  $m \equiv x_{i,a} \pmod{a}$ . Mọi phần tử trong  $S/d$  đều có dạng  $(ta + x_{i,a}k)/d$  với  $i \in \{0, 1, \dots, s\}$ . Vì  $x_{di,a}/d = x_{i,s}$  nên ta có

$$S/d = \langle s, s + k, s + 2k, \dots, s + (s - 1)k \rangle.$$

Điều này cho thấy rằng, ta có thể quy việc chứng minh mệnh đề về trường hợp  $d = 1$  và  $s = a$ .

Tuy nhiên, trong trường hợp này, áp dụng Định lý 1.2.9 và một kết quả của M. Omidali và F. Rahmati với  $d = 1$  và  $s = a$ , ta có

$$g(S/d) = g(S) = \frac{(k+1)(a-1)}{2}$$

và

$$F(S/d) = F(S) = k(a-1).$$

Do đó,

$$g(S/d) = \frac{F(S/d) + s - 1}{2}.$$

□

Từ Định lý 2.2.6, ta có một vài nhận xét hữu ích liên quan đến nửa nhóm số  $S$  như sau. Trước hết, ta dễ thấy rằng

$$S = \{as + kt : s \geq 1, t \geq 0\} = \langle a, k \rangle \setminus \{k, 2k, \dots, (a-1)k\}.$$

Giả sử  $d \mid (a-1)k$ . Vì

$$F(\langle a, k \rangle) = ak - a - k < (a-1)k,$$

nên ta có  $F(S/d) = (a-1)k/d$ . Hơn nữa,  $g(S/d)$  bằng tổng của  $g(\langle a, k/d \rangle)$  và các bội số của  $d$  trong  $\{k, 2k, \dots, (a-1)k\}$ . Do đó, ta nhận được kết quả sau.

### 2.2.7 Định lý. Cho nửa nhóm số

$$S = \langle a, a+k, a+2k, \dots, a+(a-1)k \rangle,$$

trong đó  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Nếu  $d \mid k$ , thì

$$g(S/d) = \frac{F(S/d) + a - 1}{2}.$$

*Chứng minh.* Như đã phân tích trước khi phát biểu mệnh đề, khi  $d \mid k$ , ta có

$$F(S/d) = (a-1)k/d.$$

Mặt khác, ta cũng dễ dàng kiểm tra rằng  $\langle a, k \rangle / d = \langle a, k/d \rangle$ . Vì vậy,

$$\begin{aligned} g(S/d) &= g(\langle a, k \rangle / d) + (a - 1) \\ &= g(\langle a, k/d \rangle) + (a - 1) \\ &= \frac{(a - 1)(k/d + 1)}{2} \\ &= \frac{F(S/d) + a - 1}{2}. \end{aligned}$$

□

Kết thúc bài báo [4], các tác giả đã đặt ra vấn đề mở sau, đây là một câu hỏi tự nhiên được đặt ra từ các kết quả trong mục này.

**Vấn đề mở.** Cho nửa nhóm số

$$S = \langle a, a + k, a + 2k, \dots, a + \ell k \rangle,$$

trong đó  $a$  và  $k$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và  $3 \leq \ell \leq a - 2$ . Tìm  $g(S/d)$ ,  $F(S/d)$  và mối quan hệ giữa các đại lượng này, với  $d$  là một số nguyên dương.

## KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày một cách chi tiết các kết quả trong bài báo [4] của A. Adeniran, S. Butler, C. Defant, Y. Gao, P. E. Harris, C. Hettle, Q. Liang, H. Nam, A. Volk. Cụ thể là chúng tôi đã trình bày được những kết quả sau đây.

1. Liên hệ về giống của một nửa nhóm số và thương của nó (Định lý 2.1.2).
2. Công thức tính giống của thương của một nửa nhóm số có chiều nhúng bằng 2 (Định lý 2.1.4).
3. Công thức tính số Frobenius và giống của thương của một nửa nhóm số có chiều nhúng bằng 3, sinh bởi một cặp số cộng (Định lý 2.2.3, Định lý 2.2.4)
4. Mối liên hệ giữa Số Frobenius và giống của thương nửa nhóm số sinh bởi một cặp số cộng (Định lý 2.2.6, Định lý 2.2.7).

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tiếng Việt

- [1] Lương Ngọc Nhật (2017), *Một số bất biến của nửa nhóm số*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.
- [2] Nguyễn Thị Hòa (2020), *Liên hệ giữa nửa nhóm số và nửa nhóm số đối xứng*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.
- [3] Hoàng Thế Toàn (2020), *Về vấn đề số Frobenius cho các nửa nhóm số*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.

### Tiếng Anh

- [4] A. Adeniran, S. Butler, C. Defant, Y. Gao, P. E. Harris, C. Hettle, Q. Liang, H. Nam, A. Volk (2019), On the genus of a quotient of a numerical semigroup, *Semigroup Forum*, **98**: 690-700.
- [5] I. Swanson (2009), Every numerical semigroup is one over  $d$  of infinitely many symmetric numerical semigroups, in *Commutative Algebra and its Applications*, Walterde Gruyter, Berlin, 383–386.
- [6] J. J. Sylvester (1882), Excursus on rational fractions and partitions, *American Journal of Mathematics*, **5**, 119-136.