BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN THỌ

VỀ GIẢI TỰ DO TỐI TIỂU CỦA LŨY THỪA HÌNH THỨC CỦA IĐÊAN PHỦ CỦA ĐỒ THỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN THỌ

VỀ GIẢI TỰ DO TỐI TIỂU CỦA LŨY THỪA HÌNH THỨC CỦA IĐÊAN PHỦ CỦA ĐỒ THỊ

Chuyên ngành: **ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ**
Mã số: 846 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. THIỀU ĐÌNH PHONG

Nghệ An - 2021

MỤC LỤC

Mục lục **3**

1 Kiến thức chuẩn bị **7**

1.1. Khái niệm chung về đồ thị 7

1.2. Lũy thừa hình thức và giải tự do tối tiểu của iđêan 14

2 Lũy thừa hình thức với giải tuyến tính **19**

2.1. Lũy thừa hình thức với giải tuyến tính 19

2.2. Chỉ số chính quy của lũy thừa hình thức 24

2.3. Bậc cực đại của các phần tử sinh của lũy thừa hình thức 25

Tài liệu tham khảo **30**

MỞ ĐẦU

Cho $\mathbb{K}$ là một trường, $S = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức n biến trên $\mathbb{K}$ và M là một S-môđun phân bậc. Giải tự do tối tiểu của M có dạng:

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1,j}(I)} \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}(I)} \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

Nghiên cứu về giải tự do tối tiểu của các iđêan đơn thức và lũy thừa của nó là một vấn đề thời sự của toán học, đặc biệt là việc sử dụng các phương pháp của tổ hợp trong nghiên cứu các tính chất đại số. Một trong những kết quả nổi tiếng trong lĩnh vực này đạt được bởi Fröberg (1990) đó là đặc trưng tất cả các iđêan đơn thức không chính phương có giải tự do tuyến tính. Herzog, Hibi và Zheng (2004) chứng minh rằng một iđêan đơn thức không chính phương I có giải tự do tuyến tính nếu và chỉ nếu mọi lũy thừa của I có giải tự do tuyến tính. Một kết quả khác đã được chứng minh bởi Herzog và Takayama (2002) đó là iđêan đa matroid luôn có giải tự do tuyến tính. Mặt khác, lũy thừa của các iđêan đa matroid cũng là đa matroid (xem [6]) và do đó chúng có giải tự do tuyến tính. Tuy nhiên, điều này không đúng trong trường hợp tổng quát rằng nếu một iđêan đơn thức I có giải tự do tuyến tính thì các lũy thừa của nó cũng có cùng tính chất này.

Với mỗi đồ thị G ta có iđêan phủ $J(G)$ trong S được sinh bởi các đơn thức không chính phương ứng với các phủ đỉnh tối tiểu của đồ thị G. Herzog và Hibi (2005) đã chứng minh rằng nếu G là đồ thị hai phần sao cho $J(G)$ có giải tự do tuyến tính, thì $J(G)^k$ cũng có giải tự do, với mỗi số nguyên $k \geq 1$. Herzog, Hibi và Ngô Việt Trung (2007) đã chứng minh rằng với mọi đồ thị hai phần G, ta có $J(G)^{(k)} = J(G)^k$, trong đó $J(G)^{(k)}$ ký hiệu lũy thừa hình thức bậc k của

$J(G)$. Do đó, kết quả của Herzog và Hibi cho thấy rằng nếu G là một đồ thị hai phần sao cho $J(G)$ có giải tự do tuyến tính, thì $J(G)^{(k)}$ cũng có giải tự do tuyến tính với mọi số nguyên $k \geq 1$. Trong [8, Theorem 3.6], tác giả đã tổng quát hóa kết quả này cho đồ thị phủ rất tốt và đồng thời đặt ra câu hỏi sau đây.

Câu hỏi ([8], Page 105)**.** *Cho G là một đồ thị phủ rất tốt và giả sử rằng $J(G)^{(k)}$ có giải tự do tuyến tính với số nguyên $k \geq 2$ nào đó. Khi đó có thể khẳng định $J(G)$ cũng có giải tự do tuyến tính được không?*

Trong [11], S. A. Seyed Fakhari đã chứng minh được câu trả lời là đúng cho câu hỏi trên và hơn thế nữa, tác giả cũng đã đặc trưng tất cả các đồ thị G với tính chất là $J(G)^{(k)}$ có giải tự do tuyến tính với $k \geq 2$ nào đó. Cụ thể hơn, S. A. Seyed Fakhari đã chứng minh được rằng $J(G)^{(k)}$ có giải tự do tuyến tính với số nguyên $k \geq 2$ nào đó (hoặc một cách tương đương cho tất cả các số nguyên k) nếu và chỉ nếu G là đồ thị phủ rất tốt sao cho $J(G)$ có giải tự do tuyến tính.

Cho I là một iđêan thuần nhất, ký hiệu $\operatorname{reg}(I)$ là chỉ số chính quy Castelnuovo–Mumford của I. Martínez-Bernal và các cộng sự đã chứng minh trong [7, Corollary 5.3] rằng với mọi đồ thị hai phần G và mọi số nguyên $k \geq 1$, ta có bất đẳng thức

$$\operatorname{reg}(J(G)^k) \leq \operatorname{reg}(J(G)^{k+1}).$$

Mặt khác, với mọi đồ thị hai phần G và mỗi số nguyên $k \geq 1$, ta có $J(G)^{(k)} = J(G)^k$. Do đó, từ bất đẳng thức trên, với G là đồ thị hai phần ta có

$$\operatorname{reg}(J(G)^{(k)}) \leq \operatorname{reg}(J(G)^{(k+1)}). \qquad (\dagger)$$

Sau đó, S. A. Seyed Fakhari ([11]) đã chứng minh bất đẳng thức † cũng đúng cho đồ thị đơn G tùy ý, điều này là tổng quát hóa của [7, Corollary 5.3].

Trên cơ sở đó chúng tôi chọn đề tài "**Về giải tự do tối tiểu của lũy thừa hình thức của iđêan phủ của đồ thị**" để trình bày lại kết quả đã đề cập ở trên của S. A. Seyed Fakhari trong tài liệu tham khảo chính [11].

Luận văn bao gồm phần mở đầu, phần kết luận, nội dung chính và tài liệu tham khảo. Trong đó, nội dung của luận văn được chia làm hai chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Nội dung chính của chương này là trình bày các kiến thức cơ sở của Đại số giao hoán tổ hợp. Các nội dung của chương bao gồm các khái niệm chung về đồ thị, về lũy thừa hình thức, giải tự do tuyến tính tối tiểu và chỉ số chính quy của một iđêan trong vành đa thức.

Chương 2. Lũy thừa hình thức với giải tuyến tính. Nội dung của chương này là trình bày một số kết quả về giải tự do tuyến tính và chỉ số chính quy của lũy thừa hình thức của iđêan phủ của đồ thị phủ tốt, phủ rất tốt.

Luận văn được thực hiện tại Trường Đại học Vinh dưới sự hướng dẫn rất tận tình và chu đáo của TS. Thiều Đình Phong. Tác giả xin bày tỏ sự cảm ơn sâu sắc tới TS. Thiều Đình Phong. Tác giả cũng xin trân trọng cảm ơn các Cô giáo, Thầy giáo của Nghành Toán học - Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập và làm luận văn. Mặc dù tác giả đã rất cố gắng song luận văn có thể còn có một số sai sót, tác giả rất mong nhận được các ý kiến góp ý, bổ sung và sửa chữa của các thầy cô giáo cùng các bạn học viên.

Nghệ An, tháng 07 năm 2021

Tác giả

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong phần này, chúng tôi trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản được dùng cho các nội dung chính của luận văn.

1.1 Khái niệm chung về đồ thị

1.1.1 Định nghĩa. Cho G là một đồ thị đơn với tập đỉnh

$$V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$$

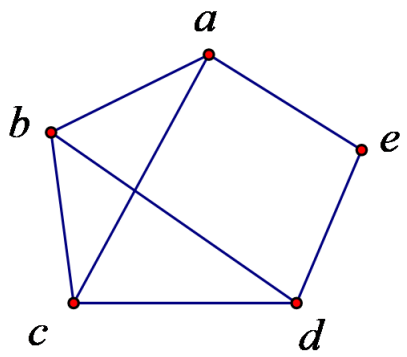
và tập cạnh $E(G)$. Với mỗi đỉnh x_i, tập *lân cận* của x_i là

$$N_G(x_i) = \{x_j | \{x_i, x_j\} \in E(G)\}.$$

Tập $N_G[x_i] = N_G(x_i) \cup \{x_i\}$ được gọi là *lân cận đóng* của x_i.

Với tập con $F \subseteq V(G)$, ta đặt $N_G[F] = \bigcup_{x_i \in F} N_G[x_i]$. Cho tập con $A \subset V(G)$, đồ thị $G \backslash A$ được định nghĩa là đồ thị với tập đỉnh $V(G \backslash A)$ và tập cạnh $E(G \backslash A) = \{e \in E(G) | e \cap A = \emptyset\}$. Một đồ thị con H của G được gọi là đồ thị con *cảm sinh* của G nếu thỏa mãn điều kiện: với các đỉnh u và v trong H, $\{u, v\}$ là một cạnh trong H nếu và chỉ nếu $\{u, v\}$ là một cạnh trong G.

1.1.2 Ví dụ. Cho đồ thị G như hình vẽ.



Hình 1.1: Đồ thị G

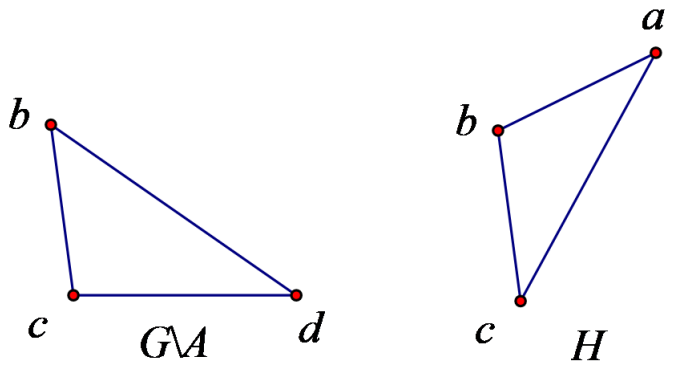
i) Tập đỉnh $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$; tập cạnh

$$E(G) = \{ab, ac, ae, bc, bd, cd, de\}.$$

ii) Tập lân cận của a là $N_G(a) = \{b, c, e\}$; vùng lân cận đóng của a là $N_G[a] = \{b, c, e, a\}$.

iii) Xét tập các đỉnh $A = \{a, e\} \subset V(G)$, ta có đồ thị $G\backslash A$ có tập đỉnh $V(G\backslash A) = \{b, c, d\}$ và tập các cạnh $E(G\backslash A) = \{bc, cd, bd\}$.

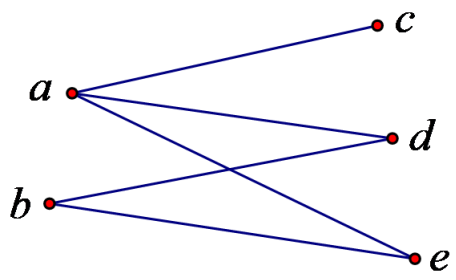
iv) Đồ thị con $H \subset G$ với tập đỉnh $V(H) = \{a, b, c\}$ và tập cạnh $E(H) = \{ab, bc, ca\}$. Tập các cạnh của G chỉ chứa các đỉnh trong H là $E_H = \{ab, bc, ca\}$. Khi đó H là đồ thi con cảm sinh của G.



Hình 1.2: Đồ thị G/A và H

1.1.3 Định nghĩa. Cho đồ thị G. Nếu tồn tại sự phân chia $V(G) = A \cup B$ sao cho mỗi cạnh của G có dạng $x_i x_j$ với $x_i \in A$ và $x_j \in B$ thì G được gọi là *đồ thị hai phần*. Hơn nữa, nếu mọi đỉnh của A liền kề với mọi đỉnh của B, thì ta nói rằng G là *đồ thị hai phần hoàn chỉnh* và kí hiệu nó là $K_{a,b}$, trong đó $a = |A|$ và $b = |B|$. Đồ thị $K_{1,3}$ được gọi là có *vuốt* và đồ thị G được cho là *không vuốt* nếu nó không có bất kỳ đồ thị con cảm sinh nào có vuốt.

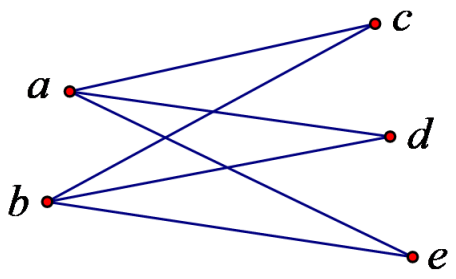
1.1.4 Ví dụ. Cho đồ thị G



Hình 1.3: Đồ thị hai phần

Ta có $E(G) = \{ac, ad, ae, bd, be\}$. Đồ thị G là đồ thị hai phần vì có thể phân chia $V(G)$ thành $V(G) = A \cup B$ với $A = \{a, b\}$ và $B = \{c, d, e\}$.

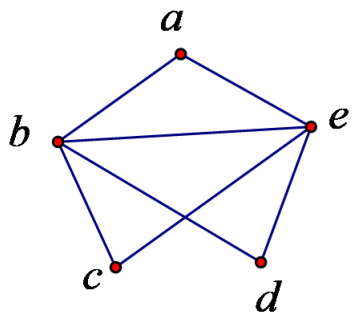
Nếu đồ thị G có dạng như hình sau



Hình 1.4: Đồ thị hai phần hoàn chỉnh

thì G là đồ thị hai phần hoàn chỉnh với cách phân chia như trên và đồ thị G được ký hiệu là $K_{2,3}$ vì $|A| = 2$, $|B| = 3$.

1.1.5 Ví dụ. Cho đồ thị G



Hình 1.5: Đồ thị không vuốt

Đồ thị G có $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$. Ta có: $\deg(a) = \deg(c) = \deg(d) = 2$; $\deg(b) = \deg(e) = 4$. Không có đỉnh nào của G có bậc bằng 3 nên G không

có bất kỳ đồ thị con cảm sinh nào dạng $K_{1,3}$. Vậy đồ thị G như trên là đồ thị không vuốt.

1.1.6 Định nghĩa. Cho G là một đồ thị. Ta có một số khái niệm như sau:

i) Tập con W của $V(G)$ được gọi là *tập con độc lập* của G nếu không có cạnh nào nối hai đỉnh của W.

ii) Tập con độc lập W của G là một *tập con độc lập tối đại*, nếu $W \cup \{x\}$ không là tập con độc lập của G, với mọi đỉnh $x \in V(G) \setminus W$, hay W không là tập con của bất cứ tập độc lập nào khác.

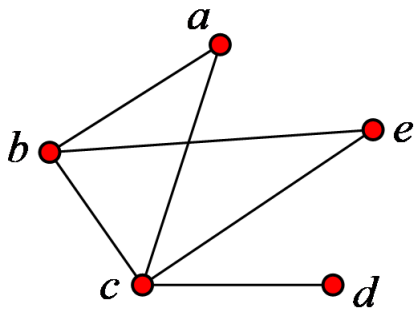
iii) Tập con C của $V(G)$ được gọi là *phủ đỉnh* của G nếu mọi cạnh của G đều có ít nhất một đỉnh của C.

iv) Một phủ đỉnh C được gọi là *phủ đỉnh tối tiểu* của G nếu không một tập con thực sự nào của C là một phủ đỉnh của G. Lưu ý rằng C là phủ đỉnh tối tiểu nếu và chỉ nếu $V(G) \setminus C$ là tập độc lập tối đại.

v) Đồ thị G được gọi là *không trộn lẫn* nếu mọi tập con độc lập tối đại của G đều có cùng số phần tử.

vi) Đồ thị G không có đỉnh cô lập được gọi là *được phủ rất tốt* nếu n là số chẵn và mọi tập con độc lập tối đại của G đều có lực lượng là $\frac{n}{2}$. Đặc biệt, bất kỳ đồ thị hai phần không trộn lẫn và không có đỉnh cô lập đều là đồ thị được phủ rất tốt.

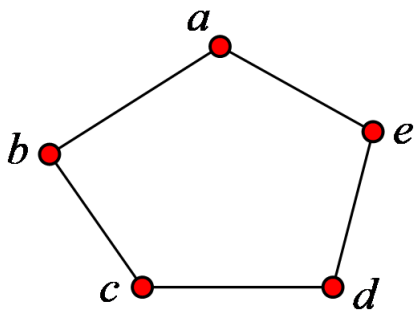
1.1.7 Ví dụ. Cho đồ thị G như hình vẽ.



Hình 1.6: Đồ thị G

Các tập con độc lập của $V(G)$ là $\{a,d\}$, $\{a,e\}$, $\{b,d\}$, $\{d,e\}$, $\{a,d,e\}$. Các tập con độc lập tối đại của $V(G)$ là $\{a,d,e\}$, $\{b,d\}$. Các phủ đỉnh của $V(G)$ là $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,c,e\}$, $\{a,b,c,d\}$, ... Các phủ đỉnh tối tiểu của $V(G)$ là $\{b,c\}$, $\{a,c,e\}$.

1.1.8 Ví dụ. Cho đồ thị G như hình vẽ.



Hình 1.7: Đồ thị G

Các tập con độc lập tối đại của $V(G)$ là $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,d\}$, $\{b,e\}$, $\{c,e\}$. Các tập con tối đại của $V(G)$ đều có 2 phần tử. Vậy G là một đồ thị không trộn lẫn.

Kết quả sau từ [3] xác định cấu trúc của các đồ thị phủ rất tốt.

1.1.9 Mệnh đề ([3, Proposition 2.3])**.** *Cho G là đồ thị phủ rất tốt với $2h$ đỉnh. Khi đó các đỉnh của G được gọi là $V(G) = (x_1, ..., x_h, y_1, ..., y_h)$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $X = \{x_1, ..., x_h\}$ là phủ đỉnh tối tiểu của G và $Y = \{y_1, ..., y_h\}$ là tập con độc lập tối đại của G.

(ii) $\{x_i, y_i\} \in E(G)$ với mỗi số nguyên $i = 1, ..., h$.

(iii) Nếu $\{z_i, x_j\}, \{y_j, x_k\} \in E(G)$, thì $\{z_i, x_k\} \in E(G)$ với các chỉ số phân biệt i, j và k và với $z_i \in \{x_i, y_i\}$.

(iv) Nếu $\{x_i, y_j\} \in E(G)$, thì $\{x_i, x_j\} \notin E(G)$.

1.1.10 Định nghĩa. Một *phức đơn hình* Δ trên tập các đỉnh $V(\Delta) = \{x_1, ..., x_n\}$ là tập hợp các tập con của $V(\Delta)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $\{x_i\} \in \Delta$ với mọi $x_i \in V(\Delta)$,

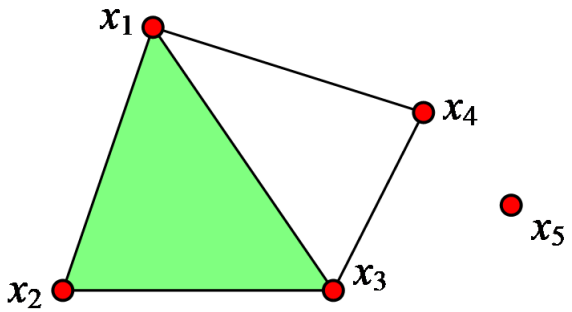
ii) nếu $F \in \Delta$ và $F' \subseteq F$ thì $F' \in \Delta$.

Phần tử $F \in \Delta$ được gọi là một *mặt* của Δ, *số chiều* của F được xác định là $\dim F = |F| - 1$. Số chiều của Δ được ký hiệu là $\dim \Delta$, là $d-1$, với $d = \max\{|F| \,|F \in \Delta\}$. Một *mặt cực đại* của Δ là mặt cực đại đối với quan hệ thứ tự bao hàm. Ta nói rằng Δ là *thuần túy* nếu tất cả các mặt cực đại của Δ có cùng số chiều.

Một phức đơn hình thuần túy Δ được gọi là *liên thông mạnh* nếu với mỗi cặp mặt cực đại $F, G \in \Delta$, có một dãy các mặt cực đại $F = F_0, F_1, ..., F_m = G$ sao cho $\dim(F_i \cap F_{i+1}) = \dim \Delta - 1$, với mọi số nguyên i và $0 \leq i \leq m-1$. Cái *liên kết* của Δ đối với một mặt $F \in \Delta$ được định nghĩa là phức đơn hình

$$\mathrm{lk}_\Delta F = \{G \subseteq V(\Delta) \setminus F \,|G \cup F \in \Delta\}.$$

1.1.11 Ví dụ. Cho phức đơn hình Δ trên tập $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ như hình sau:



Hình 1.8: Phức đơn hình Δ có chiều 2

Ta có

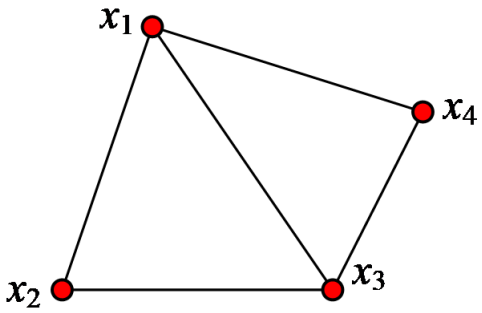
$$\Delta = \{\varnothing, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_3x_4, x_1x_2x_3\}.$$

Tập hợp các mặt ứng với các số chiều của Δ là:

$$\begin{aligned} F_{-1} &= \{\varnothing\}; \\ F_0 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; \\ F_1 &= \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_3x_4\}; \\ F_2 &= \{x_1x_2x_3\}. \end{aligned}$$

Các mặt cực đại của Δ là $\{x_5\}$, $\{x_1x_4\}$, $\{x_3x_4\}$, $\{x_1x_2x_3\}$. Số chiều của Δ là 2 được xác định bởi mặt cực đại $\{x_1x_2x_3\}$. Vì các mặt cực đại của Δ không có cùng số chiều nên Δ không thuần túy.

1.1.12 Ví dụ. Cho phức đơn hình Δ trên tập $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ như hình sau:



Hình 1.9: Phức đơn hình Δ có chiều 1

Ta có

$$\Delta = \{\varnothing, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_3x_4\}.$$

Tập hợp các mặt ứng với các số chiều của Δ là

$$\begin{aligned} F_{-1} &= \{\varnothing\}; \\ F_0 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}; \\ F_1 &= \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_3x_4\}. \end{aligned}$$

Các mặt cực đại của Δ là: $\{x_1x_2\}$, $\{x_1x_3\}$, $\{x_1x_4\}$, $\{x_2x_3\}$ và $\{x_3x_4\}$. Số chiều của Δ là 1. Vì các mặt cực đại của Δ có cùng số chiều là 1 nên Δ thuần túy.

1.1.13 Định nghĩa. Cho $S = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường $\mathbb{K}$. Với mọi tập con $F \subseteq V(\Delta)$, ta đặt $x_F = \prod_{x_i \in F} x_i$. *Iđêan Stanley-Reisner* của phức đơn hình Δ trên $\mathbb{K}$ là iđêan I_Δ của S được sinh bởi các đơn thức không chính phương x_F với $F \notin \Delta$. Vành *Stanley-Reisner* của Δ trên $\mathbb{K}$, ký hiệu là $\mathbb{K}[\Delta]$, được định nghĩa là $\mathbb{K}[\Delta] = S/I_\Delta$. Phức đơn hình Δ được gọi là *Cohen-Macaulay* nếu vành Stanley–Reisner của nó là vành Cohen-Macaulay.

Cho đồ thị G. Phức đơn hình độc lập của G được xác định bởi

$$\Delta(G) = \{A \subseteq V(G) \,|\, A \text{ là tập con độc lập của } G\}.$$

Khi đó iđêan Stanley-Reisner của $A(G)$ là *iđêan cạnh* của G được xác định bởi

$$I(G) = (x_i x_j \,|\{x_1, x_j\} \in E(G)) \subset S.$$

Đồ thị G được gọi là *đồ thị Cohen-Macaulay* nếu $\Delta(G)$ là một phức đơn hình Cohen-Macaulay. Một kết quả đã biết đó là mọi đồ thị Cohen-Macaulay là không trộn lẫn. Kết quả sau đây của Mahmoudi và các cộng sự (2011) cho ta một đặc trưng của các đồ thị phủ rất tốt Cohen-Macaulay.

1.1.14 Mệnh đề. *Cho G là đồ thị phủ rất tốt với $2h$ đỉnh. Khi đó G là đồ thị Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu tập các đỉnh của G, ký hiệu là $V(G) = \{x_1, ..., x_h, y_1, ..., y_h\}$ thỏa mãn các điều kiện (i)-(iv) của Mệnh đề 1.1.9 và $i \leq j$ với $\{x_i, y_j\} \in E(G)$.*

1.1.15 Định nghĩa. Đối ngẫu Alexander của iđêan cạnh của G trong S là iđêan

$$J(G) = I(G)^\vee = \bigcap_{\{x_i,x_j\}\in E(G)} (x_i, x_j)$$

được gọi là *iđêan phủ* của G. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng $J(G)$ được sinh bởi các đơn thức tối tiểu $\prod_{x_i \in C} x_i$, trong đó C là một phủ đỉnh tối tiểu của G.

1.2 Lũy thừa hình thức và giải tự do tối tiểu của iđêan

1.2.1 Định nghĩa. Gọi I là một iđêan của S và đặt $\mathrm{Min}(I)$ là tập các iđêan nguyên tố tối tiểu của I. Với mọi số nguyên $k \geq 0$, *lũy thừa hình thức* thứ k của I, kí hiệu là $I^{(k)}$, được xác định bởi

$$I^{(k)} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(I)} \mathrm{Ker}\left(S \to \left(S/I^k\right)_{\mathfrak{p}}\right).$$

Cho I là iđêan đơn thức không chính phương của S và giả sử rằng I có sự phân tích nguyên sơ thu gọn

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap ... \cap \mathfrak{p}_r,$$

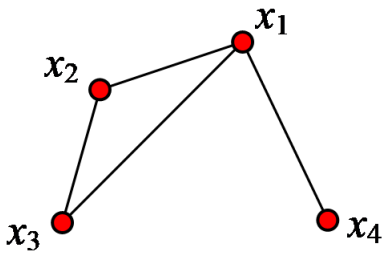
trong đó mỗi $\mathfrak{p}_i$ là một iđêan nguyên sơ của S sinh bởi một tập con các biến của S. Từ [6, Proposition 1.4.4], ta suy ra rằng với mọi số nguyên $k \geq 0$,

$$I^{(k)} = \mathfrak{p}_1^k \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r^k.$$

Đặc biệt, với mọi đồ thị G và với bất kỳ số nguyên $k \geq 0$, ta có

$$J(G)^{(k)} = \bigcap_{\{x_i,x_j\}\in E(G)} (x_i, x_j)^k.$$

1.2.2 Ví dụ. Cho đồ thị như hình vẽ.



Hình 1.10: Đồ thị G

Ta có: $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E(G) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3\}$. Các phủ đỉnh tối tiểu của G gồm có: $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$. Khi đó $J(G) = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3x_4)$. Phân tích nguyên sơ của $J(G)$ là

$$J(G) = (x_1, x_2) \cap (x_2, x_3) \cap (x_1, x_3) \cap (x_1, x_4).$$

Từ đó ta có

$$J^{(k)}(G) = (x_1, x_2)^k \cap (x_2, x_3)^k \cap (x_1, x_3)^k \cap (x_1, x_4)^k.$$

Ví dụ với $k = 2$, ta có

$$\begin{aligned} J^{(2)}(G) &= (x_1, x_2)^2 \cap (x_2, x_3)^2 \cap (x_1, x_3)^2 \cap (x_1, x_4)^2 \\ &= \left(x_1^2, x_2^2, x_1x_2\right) \cap \left(x_2^2, x_3^2, x_2x_3\right) \cap \left(x_1^2, x_3^2, x_1x_3\right) \cap \left(x_1^2, x_4^2, x_1x_4\right) \\ &= \left(x_1^2x_3^2, x_1^2x_2x_3, x_1x_2x_3x_4, x_1^2x_2^2, x_2^2x_3^2x_4^2\right). \end{aligned}$$

1.2.3 Định nghĩa. Cho M là một S-môđun phân bậc và

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1,j}(M)} \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

là giải phân bậc tự do tối tiểu của M.

Các số nguyên $\beta_{i,j}(M)$ được gọi là các *số Betti phân bậc* của M. *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford* (hay ngắn gọn là chỉ số chính quy) của M, kí hiệu là $\operatorname{reg}(M)$, được định nghĩa như sau:

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{j - i \,|\beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

Một iđêan thuần nhất I được gọi là *có giải tuyến tính* nếu với số nguyên d, $\beta_{i,i+t}(I) = 0$ với mọi i và với mọi số nguyên $t \neq d$.

Rõ ràng từ định nghĩa này nếu một iđêan có giải tuyến tính, thì các phần tử sinh tối tiểu của I đều cùng bậc. Theo định lý Eagon-Reiner [6, Theorem 8.1.9] ta có một đồ thị G là Cohen-Macaualy nếu và chỉ nếu iđêan phủ $J(G)$ của nó có giải tự do tuyến tính. Cho I là iđêan thuần nhất được sinh bởi các đa thức thuần nhất bậc d. Ta nói rằng I có *biểu diễn tuyến tính* nếu $\beta_{1,1+t}(I) = 0$ với mỗi số nguyên $t \neq d$. Rõ ràng I sẽ có biểu diễn tuyến tính nếu nó có giải tuyến tính.

Cho I là một iđêan đơn thức của $S = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ với các đơn thức sinh tối tiểu $u_1, ..., u_m$, ở đây $u_j = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{i,j}}$, $1 \leq j \leq m$. Với mọi i thỏa mãn $1 \leq i \leq n$, ký hiệu

$$a_i := \max\{a_{i,j} \,|a \leq j \leq m\},$$

và giả sử rằng

$$T = \mathbb{K}[x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{1,a_1}, x_{2,1}, x_{2,2}, ..., x_{2,a_2}, ..., x_{n,1}, x_{n,2}, ..., x_{n,a_n}]$$

là một vành đa thức trên trường $\mathbb{K}$. Gọi I^{pol} là iđêan đơn thức không chính phương của T với hệ sinh tối tiểu $u_1^{\text{pol}}, ..., u_m^{\text{pol}}$, trong đó

$$u_j^{\text{pol}} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{a_{i,j}} x_{i,k}, 1 \leq j \leq m.$$

Đơn thức u_j^{pol} được gọi là *sự phân cực* của u_j, và iđêan I^{pol} được gọi là *iđêan phân cực* của I. Ta biết rằng $\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}\left(I^{\text{pol}}\right)$, với mỗi cặp số nguyên i và j (xem ví dụ, [6, Corollary 1.6.3]).

1.2.4 Ví dụ. Cho $S = \mathbb{K}[x, y]$ và $I = \left(x^2y, y^2\right)$. Giả sử giải phân bậc tự do tối tiểu của I có dạng như sau:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} I.$$

Dãy phức trên khớp tại F_0 nên $\operatorname{Im}\partial_0 = I = \left(x^2y, y^2\right)$. Suy ra $\operatorname{rank}_S(\operatorname{Im}\partial_0) = \operatorname{rank}_S(I) = 2$. Do tính tối tiểu của giải tự do, ta chọn ta chọn F_0 sinh bởi 2 phần tử e_1, e_2 sao cho $\partial_0(e_1) = x^2y$, $\partial_0(e_2) = y^2$. Do tính bảo toàn bậc của đồng cấu phân bậc nên $\deg e_1 = \deg\left(x^2y\right) = 3$ và $\deg e_2 = \deg y^2 = 2$. Ta có $F_0 = \mathrm{S}e_1 \oplus \mathrm{S}e_2 = S[-3] \oplus S[-2]$.

Suy ra dãy khớp

$$F_1 \xrightarrow{\partial_1} S[-3] \oplus S[-2] \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2y & y^2 \end{bmatrix}} I.$$

Ta có $\operatorname{Im}\partial_1 = \operatorname{Ker}\partial_0$. Suy ra

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\partial_1 &= \{\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 \in F_0 | \alpha_i \in S, \partial_0(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2) = 0\} \\
&= \{\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 \in F_0 | \alpha_i \in S, \alpha_1\partial_0(e_1) + \alpha_2\partial_0(e_2) = 0\} \\
&= \left\{\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 \in F_0 | \alpha_i \in S, \alpha_1x^2y + \alpha_2y^2 = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Chọn $\alpha_1 = y$, $\alpha_2 = -x^2$. Khi đó $\operatorname{Im}\partial_1 = S\left(ye_1 - x^2e_2\right)$. Vì giải tự do tối tiểu nên $\operatorname{rank}(F_1) = \operatorname{rank}_S(\operatorname{Im}\partial_1) = 1$ và $\deg f = \deg\left(ye_1 - x^2e_2\right) = 4$. Do đó $F_1 = Sf \equiv S[-4]$. Bây giờ ta có các dãy khớp

$$F_2 \xrightarrow{\partial_2} S[-4] \xrightarrow{\begin{bmatrix} y \\ -x^2 \end{bmatrix}} S[-3] \oplus S[-2] \xrightarrow{\begin{bmatrix} x^2y & y^2 \end{bmatrix}} I.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\partial_2 = \operatorname{Ker}\partial_1 &= \{\beta f \in F_1 | \beta \in S, \partial_1(\beta f) = 0\} \\
&= \{\beta f \in F_1 | \beta \in S, \beta\partial_1(f) = 0\} \\
&= \left\{\beta f \in F_1 | \beta \in S, \beta\left(ye_1 - x^2e_2\right) = 0\right\} \\
&= \{0\}.
\end{aligned}$$

Suy ra $F_2 = 0$. Vì vậy giải phân bậc tự do tối tiểu của I có dạng

$$0 \xrightarrow{\partial_2} S[-4] \xrightarrow{\begin{bmatrix} y \\ -x^2 \end{bmatrix}} S[-3] \oplus S[-2] \xrightarrow{[x^2y \quad y^2]} I.$$

Từ đó ta có các chỉ số Betti phân bậc khác 0 của I là: $\beta_{0,2}(I) = 1$; $\beta_{0,3}(I) = 1$; $\beta_{1,4}(I) = 1$. Vậy $\operatorname{reg}(I) = \max\{j - i | \beta_{i,j} \neq 0\} = 4 - 1 = 3$.

CHƯƠNG 2

LŨY THỪA HÌNH THỨC VỚI GIẢI TUYẾN TÍNH

Mục tiêu của chương này là trình bày đặc trưng của các đồ thị G với tính chất $J(G)^{(k)}$ có giải tuyến tính với số nguyên $k \geq 2$.

2.1 Lũy thừa hình thức với giải tuyến tính

2.1.1 Mệnh đề. *Cho G là đồ thị phủ rất tốt và giả sử $J(G)^{(k)}$ có giải tuyến tính, với số nguyên $k \geq 1$ nào đó. Khi đó $J(G)$ có giải tuyến tính.*

Chứng minh. Sử dụng Mệnh đề 1.1.9, các đỉnh của G có thể ký hiệu là

$$V(G) = \{x_1, ...x_h, y_1, ..., y_h\}$$

sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn.

(i) $X := \{x_1, ..., x_h\}$ là một phủ đỉnh tối tiểu của G và $Y := \{y_1, ..., y_h\}$ là một tập con độc lập tối đại của G.

(ii) $\{x_i, y_i\} \in E(G)$, với mỗi số nguyên $i = 1, ..., h$.

(iii) Nếu $\{z_i, x_j\}, \{y_j, x_k\} \in E(G)$, thì $\{z_i, x_k\} \in E(G)$, với i, j và k phân biệt và $z_i \in \{x_i, y_i\}$.

(iv) Nếu $\{x_i, y_j\} \in E(G)$, thì $\{x_i, x_j\} \notin E(G)$.

Từ [8, Lemma 3.4], chúng ta biết rằng $\left(J(G)^{(k)}\right)^{\text{pol}}$ là iđêan phủ của đồ thị G_k với tập đỉnh

$$V(G_k) = \left\{x_{i,p}, y_{i,p} \middle| 1 \leq i \leq h \text{ và } 1 \leq p \leq k\right\}$$

và tập cạnh

$$E(G_k) = \{\{x_{i,p}, x_{j,q}\} \,|\, \{x_i, x_j\} \in E(G) \text{ và } p+q \leq k+1\} \bigcup \{\{x_{i,p}, y_{j,q}\} \,|\, \{x_i, y_j\} \in E(G) \text{ và } p+q \leq k+1\}.$$

Theo giả thiết và [6, Corollary 1.6.3] ta có $J(G_k)$ có giải tuyến tính. Như là một hệ quả, từ [6, Theorem 8.1.9] ta suy ra rằng G_k là một đồ thị Cohen-Macaulay. Lưu ý rằng

$$F = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq h \text{ và } 2 \leq j \leq k\}$$

là một tập con độc lập của G_k. Ta có

$$N_{G_k}[F] = F \cup \{x_{i,j} \,|1 \leq i \leq h\,;\, 1 \leq j \leq k-1\}.$$

Do đó, $G_k \backslash N_{G_k}[F]$ đẳng cấu với đồ thị hai phần có được từ G bằng cách xóa các cạnh có điểm kết nằm trong X. Ta ký hiệu đồ thị mới này là G'. Nói cách khác, G' là đồ thị với tập hợp đỉnh $V(G') = V(G)$ và tập cạnh

$$E(G') = \{\{x_i, y_j\} \,|1 \leq i, j \leq h;\, \{x_i, y_j\} \in E(G)\}.$$

Theo đó $\mathrm{lk}_{\Delta(G_k)} F = \Delta(G')$. Từ G_k là Cohen-Macaulay, ta kết luận G' cũng là Cohen-Macaulay. Do đó, G' là đồ thị phủ rất tốt. Sử dụng [3, Lemma 3.5], tồn tại một hoán vị $\sigma : [h] \to [h]$ với tính chất $\sigma(i) \leq \sigma(j)$ bất cứ khi nào $\{x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(j)}\} \in E(G)$. Dễ thấy là đồ thị G với kí hiệu $x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(h)}, y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(h)}$ của các đỉnh của nó cũng thỏa mãn các điều kiện (i)-(iv) của Mệnh đề 1.1.9. Do đó, dùng Mệnh đề 1.1.14, chúng ta kết luận được G là đồ thị Cohen-Macaulay. Như là một hệ quả, [6, Theorem 8.1.9] suy ra rằng $J(G)$ có giải tuyến tính. □

Như chúng ta đã đề cập trong Chương 1, nếu iđêan thuần nhất I có giải tuyến tính thì nó phải được sinh từ các phần tử sinh cùng bậc. Do đó, để đặc trưng các đồ thị G với tính chất $J(G)^{(k)}$ có giải tuyến tính, trước tiên chúng ta cần xác định các đồ thị G sao cho $J(G)^{(k)}$ được sinh từ các phần tử sinh cùng bậc. Điều này sẽ được thể hiện trong bổ đề tiếp theo. Lưu ý rằng đối với một

iđêan đơn thức I, tập duy nhất các đơn thức sinh tối tiểu của I được ký hiệu là $G(I)$.

2.1.2 Bổ đề. *Cho G là một đồ thị không có đỉnh cô lập và giả sử $J(G)^{(k)}$ được sinh trong cùng một bậc, với số nguyên $k \geq 2$ nào đó. Khi đó G là đồ thị phủ rất tốt.*

Chứng minh. Giả sử $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ và u là một đơn thức trong hệ các đơn thức sinh tối tiểu của $J(G)$. Chú ý là $u^{(k)} \in J(G)^k \subseteq J(G)^{(k)}$. Vì $u \in G(J(G))$, với mọi số nguyên $1 \leq i \leq n$, tồn tại đỉnh $N_G(x_i)$ sao cho $u/x_i \notin (x_i, x_j)$. Do đó,

$$u^k \Big/ x_i = (u/x_i)^k x_i^{k-1} \notin (x_i, x_j)^k.$$

Đặc biệt, với mọi số nguyên i, $1 \leq i \leq n$ ta có $u^k \Big/ x_i \in J(G)^{(k)}$. Do đó, u^k thuộc hệ các đơn thức sinh tối tiểu của $J(G)^{(k)}$. Vì $J(G)^{(k)}$ được sinh ra trong cùng một bậc, ta suy ra

$$\deg\left(J(G)^{(k)}\right) = \deg\left(u^k\right) = k \deg(u).$$

Do các đẳng thức ở trên đúng với mọi đơn thức $u \in G(J(G))$, nên $J(G)$ được sinh bởi cùng một bậc. Vì thế, G là một đồ thị không trộn lẫn. Gọi d là bậc của các đơn thức sinh tối tiểu của $J(G)$. Ta có

$$\deg\left(J(G)^{(k)}\right) = kd.$$

Bởi [4] (xem [3, Theorem 0.1]), ta có $d \geq n/2$. Do đó, để hoàn thành chứng minh, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng $d \leq n/2$. Đặt $v := x_1 \dots x_n$. Ta chia phần còn lại của chứng minh thành hai trường hợp sau đây.

Trường hợp 1. Giả sử $k = 2m$ là một số nguyên chẵn. Rõ ràng $v^m \in J(G)^{(k)}$. Điều này suy ra rằng

$$mn = \deg(v^m) \geq \deg\left(J(G)^{(k)}\right) = kd = 2md.$$

Do đó, $n \geq 2d$.

Trường hợp 2. Giả sử $k = 2m+1$ là một số nguyên lẻ. Như trên, cho u là một đơn thức trong tập các đơn thức sinh tối tiểu của $J(G)$. Rõ ràng, $uv^m \in J(G)^{(k)}$. Vì thế,

$$d + mn = \deg(uv^m) \geq \deg\left(J(G)^{(k)}\right) = kd = (2m+1)\,d. \quad \square$$

Từ các định nghĩa trên thì điều kiện có giải tuyến tính mạnh hơn là có một biểu diễn tuyến tính. Tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy trong Mệnh đề 2.1.3 là hai khái niệm này là tương đương đối với các lũy thừa hình thức của iđêan phủ của đồ thị phủ rất tốt. Để chứng minh điều này, ta sử dụng điều kiện Serre sau đây:

Cho M là S- môđun hữu hạn sinh khác không và cho $r \geq 1$ là một số nguyên dương. Khi đó M được gọi là *thoả mãn điều kiện Serre* (S_r), nếu với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của S thì bất đẳng thức sau là đúng

$$\text{depth} M_{\mathfrak{p}} \geq \min\{r, \dim M_{\mathfrak{p}}\}.$$

Ta nói phức đơn hình Δ thỏa mãn điều kiện Serre nếu vành Stanley-Reisner thỏa mãn điều kiện Serre.

2.1.3 Mệnh đề. *Cho G là đồ thị phủ rất tốt và giả sử k là một số nguyên dương. Khi đó $J(G)^{(k)}$ có giải tuyến tính nếu và chỉ nếu $J(G)^{(k)}$ có biểu diễn tuyến tính.*

Chứng minh. Phần "ngược lại" của Mệnh đề là hiển nhiên. Vì vậy, chúng ta chỉ chứng minh phần "nếu". Giả sử $J(G)^{(k)}$ có biểu diễn tuyến tính. Theo [6, Corollary 1.6.3], iđêan $(J(G)^{(k)})^{pol}$ có biểu diễn tuyến tính. Sử dụng [8, Proposition 3.1 và Lemma 3.4], tồn tại đồ thị phủ rất tốt G_k với $(J(G)^{(k)})^{pol} = J(G_k)$. Vì $J(G_k)$ có biểu diễn tuyến tính, nên từ [12, Corollary 3.7], $\Delta(G_k)$ thỏa mãn điều kiện Serre (S_2). Ta biết rằng mọi phức đơn hình thỏa mãn điều kiện Serre (S_2) là liên thông mạnh. Đặc biệt, $\Delta(G_k)$ là phức đơn hình liên thông mạnh. Do đó, ta có thể kết luận từ [3, Theorem 0.2] rằng G_k là đồ thị Cohen-Macaulay. Vì thế, bởi [6, Theorem 8.1.9] ta suy ra rằng $J(G_k)$ có giải tuyến tính. Do đó, theo [6, Corollary 1.6.3], $J(G)^{(k)}$ có giải tuyến tính. $\square$

Định lý tiếp theo là định lý chính của mục này.

2.1.4 Định lí. *Với bất kỳ đồ thị G không có đỉnh cô lập, các điều kiện sau là tương đương.*

(i) $J(G)^{(k)}$ có giải tuyến tính, với mọi số nguyên $k \geq 1$.

(ii) $J(G)^{(k)}$ có giải tuyến tính, với một số nguyên $k \geq 2$.

(iii) $J(G)^{(k)}$ có biểu diễn tuyến tính, với mọi số nguyên $k \geq 1$.

(iv) $J(G)^{(k)}$ có biểu diễn tuyến tính, với một số nguyên $k \geq 2$.

(v) G là đồ thị Cohen-Macaulay phủ rất tốt.

Chứng minh. Nếu G thỏa mãn một trong các điều kiện (i)-(v), thì $J(G)$ được sinh ra từ một bậc đơn. Do đó, sử dụng Bổ đề 2.1.2, ta suy ra G là đồ thị phủ rất tốt. Vì vậy, các tương đương $(i) \Leftrightarrow (iii)$ và $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ theo Mệnh đề 2.1.3. Sự kéo theo $(i) \Rightarrow (ii)$ là tầm thường. Bởi [6, Theorem 8.1.9] và [8, Theorem 3.6], (v) kéo theo (i). Để chứng minh $(ii) \Rightarrow (v)$, như chúng ta đã đề cập ở trên, theo (ii) và Bổ đề 2.1.2 thì G là đồ thị phủ rất tốt. Khi đó sử dụng Mệnh đề 2.1.1 và [6, Theorem 8.1.9], ta kết luận được G là đồ thị Cohen-Macaulay. □

2.1.5 Nhận xét. (1) Giả sử I là iđêan đơn thức không chính phương. Nói chung là không đúng khi nói rằng nếu $I^{(k)}$ có giải tuyến tính, với số nguyên $k \geq 2$, thì I cũng có giải tuyến tính. Ví dụ, cho $I = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_1x_5)$ là iđêan cạnh của đồ thị chu kỳ 5. Có thể kiểm tra dễ dàng rằng $I^{(2)}$ có giải tuyến tính nhưng I thì không.

(2) Giả sử I là iđêan đơn thức không chính phương. Nói chung, nếu $I^{(2)}$ có giải tuyến tính thì không khẳng định được rằng $I^{(k)}$ có cùng tính chất, với mọi số nguyên $k \geq 2$. Ví dụ, cho I cùng là iđêan như trên. Khi đó, $I^{(2)}$ có giải tuyến tính. Mặt khác, $x_1^3x_2^3$ và $x_1x_2x_3x_4x_5$ thuộc tập các đơn thức sinh tối tiểu của $I^{(3)}$. Suy ra $I^{(3)}$ không được sinh cùng một bậc. Do đó, nó không có giải tuyến tính.

2.2 Chỉ số chính quy của lũy thừa hình thức

Nội dung của mục này là trình bày một số kết quả về chỉ số chính quy của lũy thừa hình thức của iđêan phủ của đồ thị. Matinez-Bernal và cộng sự [7, Corollary 5.3] đã chứng minh được rằng chỉ số chính quy của lũy thừa của iđêan phủ của đồ thị hai phần là hàm không giảm. Định lý 2.2.1 là tổng quát hóa kết quả này bằng cách chỉ ra dãy $\left(\operatorname{reg}\left(J(G)^{(k)}\right)\right)_k^{\infty}$ là không giảm với mọi đồ thị hai phần G.

2.2.1 Định lí. *Cho G là một đồ thị. Khi đó với mọi số nguyên $k \geq 1$, ta có*

$$\operatorname{reg}\left(S\Big/J(G)^{(k)}\right) \leq \operatorname{reg}\left(S\Big/J(G)^{(k+1)}\right).$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử G không có đỉnh cô lập. Gọi $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ là tập đỉnh của G. Xét các iđêan không chính phương $\left(J(G)^{(k)}\right)^{\text{pol}} \subseteq T_k$ và $\left(J(G)^{(k+1)}\right)^{\text{pol}} \subseteq T_{k+1}$, trong đó

$$T_r = \mathbb{K}\left[x_{i,p} \,|\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq r\right]$$

với $r = k, k+1$. Từ [6, Corollary 1.6.3], ta có

$$\operatorname{reg}\left(T_r\Big/\left(J(G)^{(r)}\right)^{\text{pol}}\right) = \operatorname{reg}\left(S\Big/J(G)^{(r)}\right).$$

Như là một hệ quả, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\operatorname{reg}\left(T_k\Big/\left(J(G)^{(k)}\right)^{\text{pol}}\right) \leq \operatorname{reg}\left(T_{k+1}\Big/\left(J(G)^{(k+1)}\right)^{\text{pol}}\right).$$

Bởi [8, Lemma 3.4], với $r = k, k+1$, iđêan $\left(J(G)^{(r)}\right)^{\text{pol}}$ là iđêan phủ của đồ thị G_r, với tập đỉnh

$$V(G_r) = \{x_{i,p} \,|\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq r\}$$

và tập cạnh

$$E(G_r) = \{\{x_{i,p}, x_{j,q}\} \,|\, \{x_i, x_j\} \in E(G),\ p + q \leq r + 1\}.$$

Đặt

$$W := \left\{ x_{i,\left[\frac{k+1}{2}\right]+1} \,|1 \leq i \leq n \right\} \subseteq V\left(G_{k+1}\right)$$

và xét ánh xạ $\varphi : V\left(G_k\right) \to V\left(G_{k+1} \backslash W\right)$ được xác định như sau:

$$\varphi\left(x_{i,k}\right) = \begin{cases} x_{i,j} & \text{khi } 1 \leq j \leq \left[\frac{k+1}{2}\right] \\ x_{i,j+1} & \text{khi } j \geq \left[\frac{k+1}{2}\right] + 1. \end{cases}$$

Khi đó φ là một đẳng cấu giữa G_K và $G_{k+1} \backslash W$. Do đó G_k là đồ thị con cảm sinh của G_{k+1}. Từ [5, Lemma 3.1], ta có

$$\operatorname{reg}\left(T_k / J\left(G_k\right)\right) \leq \operatorname{reg}\left(T_{k+1} / J\left(G_{k+1}\right)\right),$$

tức là

$$\operatorname{reg}\left(T_k \Big/ \left(J(G_k)^{(k)}\right)^{\text{pol}}\right) \leq \operatorname{reg}\left(T_{k+1} \Big/ \left(J(G_{k+1})^{(k+1)}\right)^{\text{pol}}\right)$$

và điều này hoàn thành chứng minh. □

2.3 Bậc cực đại của các phần tử sinh của lũy thừa hình thức

Trong mục này, chúng tôi trình bày lại các kết quả về bậc cực đại của các phần tử sinh của lũy thừa hình thức của iđêan phủ. L. X. Dung, T. T. Hien, H. D. Nguyen và T. N. Trung (2019) đã chứng minh rằng $\deg\left(J(G)^{(k)}\right)$ không nhất thiết là một hàm tuyến tính. Tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy trong Định lý 2.3.2 và Hệ quả 2.3.3 rằng $\deg\left(J(G)^{(k)}\right)$ là một hàm tuyến tính đối với một số lớp đồ thị cụ thể. Để chứng minh những kết quả này, chúng ta cần bổ đề sau.

2.3.1 Bổ đề. *Cho G là một đồ thị với tập đỉnh $V\left(G\right) = \{x_1, ..., x_n\}$. Giả sử $x \in V\left(G\right)$ là một đỉnh của G. Đặt $u := \prod_{x_i \in N_G(x)} x_i$ và $J' = J\left(G \backslash N_G\left[x\right]\right) S$. Khi đó $J(G)^{(k)} + (x) = u^k J'^{(k)} + (x)$.*

Chứng minh. Ta có

$$J(G)^{(k)}+(x)=\bigcap_{\{x_i,x_j\}\in E(G)}(x_i,x_j)^k+(x)=\bigcap_{\{x_i,x_j\}\in E(G)}\Big((x_i,x_j)^k+(x)\Big)$$
$$=\left(\bigcap_{\{x_i,x_j\}\in N_G(x)}\Big((x_i,x)^k+(x)\Big)\right)\cap\left(\bigcap_{\{x_i,x_j\}\in E(G);x\notin\{x_i,x_j\}}\Big((x_i,x_j)^k+(x)\Big)\right)$$
$$=\left(\bigcap_{\{x_i,x_j\}\in N_G(x)}\Big((x_i)^k+(x)\Big)\right)\cap\left(\bigcap_{\{x_i,x_j\}\in E(G);x\notin\{x_i,x_j\}}\Big((x_i,x_j)^k+(x)\Big)\right).$$

Chú ý rằng với mọi đỉnh $x_i\in N_G(x)$ và với mọi cạnh $\{x_i,x_j\}\in E(G)$, ta có $(x_i)^k+(x)\subseteq(x_i,x_j)^k+(x)$. Do đó, từ các đẳng thức trên ta suy ra

$$\begin{aligned}J(G)^{(k)}+(x)&=\left(\bigcap_{x_i\in N_G(x)}\Big((x_i)^k+(x)\Big)\right)\cap\left(\bigcap_{\{x_i,x_j\}\in E(G\setminus N_G[x])}\Big((x_i,x_j)^k+(x)\Big)\right)\\&=\left(\left(\bigcap_{x_i\in N_G(x)}(x_i)^k\right)\cap\left(\bigcap_{\{x_i,x_j\}\in E(G\setminus N_G[x])}\Big((x_i,x_j)^k\Big)\right)\right)+(x)\\&=\left(u^k\cap J'^{(k)}\right)+(x)\\&=u^kJ'^{(k)}+(x).\end{aligned}$$

□

Nội dung tiếp theo là trình bày chứng minh định lý chính của mục này như sau.

2.3.2 Định lí. *Cho $\mathcal{H}$ là họ các đồ thị thoả mãn các điều kiện sau.*

(i) Với mọi đồ thị $G\in\mathcal{H}$ và mọi đỉnh $x\in V(G)$, đồ thị $G\setminus N_G[x]$ thuộc $\mathcal{H}$.

(ii) Nếu $G\in\mathcal{H}$ không có đỉnh cô lập, thì nó có một phủ đỉnh tối tiểu với lực lượng nhỏ nhất là $\frac{|V(G)|}{2}$.

Khi đó mọi đồ thị $G\in\mathcal{H}$ và mọi số nguyên $k\geq 1$, ta có

$$\deg\Big(J(G)^{(k)}\Big)=k\deg\left(J(G)\right).$$

Chứng minh. Bằng cách thay $\mathcal{H}$ bởi $\mathcal{H}\cup\{K_2\}$, ta có thể giả sử $K_2\in\mathcal{H}$. Gọi m là số cạnh của G. Ta chứng minh bằng quy nạp theo $k+m$. Trường hợp

$k = 1$ là tầm thường, không có gì để chứng minh. Do đó, ta giả sử $k \geq 2$. Giả sử $m = 1$ và $\{x_1, x_2\}$ là cạnh duy nhất của G. Khi đó $J(G) = (x_1, x_2)$. Như vậy, $\deg(J(G)) = 1$ và $\deg\left(J(G)^{(k)}\right) = k$. Do đó, giả sử rằng $m \geq 2$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử G không có đỉnh cô lập. Từ [10, Lemma 3.1], ta có $\deg\left(J(G)^{(k)}\right) \geq k \deg(J(G))$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng với mọi đơn thức $w \in G\left(J(G)^{(k)}\right)$, bất đẳng thức $\deg(w) \leq k \deg(J(G))$ là đúng. Giả sử $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ và đặt $v := x_1...x_n$. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Giả sử v chia hết w. Khi đó w/v thuộc tập các đơn thức sinh tối tiểu của $\left(J(G)^{(k)} : v\right)$. Từ [9, Lemma 3.4], ta có

$$\left(J(G)^{(k)} : v\right) = J(G)^{(k-2)}.$$

Do đó, sử dụng giả thiết quy nạp, ta kết luận được

$$\deg(w/v) \leq (k-2)\deg(J(G)).$$

Vì vậy

$$\deg(w) \leq (k-2)\deg(J(G)) + n.$$

Trường hợp 2. Giả sử v không chia hết w. Khi đó, tồn tại một biến, g là x_j không chia hết w. Đặt $u := \prod_{x_i \in N_G(x_j)} x_i$. Từ Bổ đề 2.3.1, ta có w thuộc tập các đơn thức sinh tối tiểu của $u^k J(G \backslash N_G[x_j])^{(k)}$. Nói cách khác, u^k chia hết w, và

$$w/u^k \in G\left(J((G) \backslash N_G[x_j])^{(k)}\right).$$

Từ giả thiết quy nạp

$$\deg(w) - k\deg_G(x_j) = \deg(w) - k\deg(u) \leq k\deg(J(G \setminus N_G[x_j]). \tag{1}$$

Mặt khác, nếu C là phủ đỉnh tối tiểu của $G \backslash N_G[x_j]$, thì $C \cup N_G(x_j)$ là phủ đỉnh tối tiểu của G. Vì thế,

$$\deg(J(G \setminus N_G[x_j])) + \deg_G(x_j) \leq \deg(J(G)). \tag{2}$$

Sử dụng (1) và (2), ta có thể kết luận rằng

$$\deg(w) \leq k \deg\left(J\left(G \backslash N_G[x_j]\right)\right) + k\deg_G(x_j) \leq k \deg\left(J(G)\right). \quad \square$$

Như là một hệ quả của Định lý 2.3.2, ta có khẳng định sau đây.

2.3.3 Hệ quả. *Cho G là một đồ thị không trộn lẫn hoặc không vuốt. Khi đó với mọi số nguyên $k \geq 1$, ta có*

$$\deg\left(J(G)^{(k)}\right) = k \deg\left(J(G)\right).$$

Đặc biệt, $\deg\left(J(G)^{(k)}\right)$ *là một hàm tuyến tính của k.*

Chứng minh. Ta có mọi đồ thị không trộn lẫn G không có đỉnh cô lập có phủ đỉnh tối tiểu với lực lượng nhỏ nhất là $\frac{|V(G)|}{2}$. Ngoài ra, từ chứng minh của [10, Theorem 3.7] ta có mọi đồ thị không vuốt G không có đỉnh cô lập có phủ đỉnh tối tiểu với lực lượng nhỏ nhất là $\frac{|V(G)|}{2}$. Gọi $\mathcal{H}$ là lớp các đồ thị không trộn lẫn hoặc không vuốt. Khi đó từ Định lý 2.3.2 ta có điều phải chứng minh. $\square$

KẾT LUẬN

Dựa vào các tài liệu tham khảo, luận văn đã hoàn thành được các nội dung cơ bản sau:

1. Trình bày các khái niệm chung về đồ thị.

2. Trình bày các khái niệm và tính chất về lũy thừa hình thức của một iđêan trong vành đa thức.

3. Trình bày các khái niệm về giải tự do tuyến tính tối tiểu của một iđêan trong vành đa thức.

4. Trình bày khái niệm và các tính chất của về chỉ số chính quy.

5. Trình bày một số kết quả về giải tự do tuyến tính và chỉ số chính quy của lũy thừa hình thức của iđêan phủ của đồ thị phủ tốt, phủ rất tốt.

6. Đưa ra một số ví dụ cụ thể cho từng phần nội dung dựa trên tài liệu tham khảo chính.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Danh mục tài liệu tham khảo bao gồm các tài liệu sau, trong đó tài liệu tham khảo chính là [11].

TIẾNG VIỆT

[1] Trần Thị Tuyết Hồng (2018), *Chỉ số chính quy của lũy thừa iđêan cạnh của đồ thị được phủ rất tốt*, Luận văn thạc sĩ Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, Trường Đại học Vinh.

[2] Phan Trúc Lâm (2020), *Chỉ số chính quy của lũy thừa hình thức của iđêan phủ của đồ thị*, Luận văn thạc sĩ Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, Trường Đại học Vinh.

TIẾNG ANH

[3] M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai (2011), Cohen–Macaulay edge ideals whose height is half of the number of vertices, *Nagoya Math. J.* **201**, 116–130.

[4] I. Gitler, C. E. Valencia (2005), Bounds for invariants of edge-rings, *Comm. Algebra*, **33**, no. 5, 1603–1616.

[5] H. T. Hà (2014), Regularity of squarefree monomial ideals, *Connections between Algebra, Combinatorics, and Geometry*, Springer Proceedings in Mathematics Statistics, **76**, 251–276.

[6] J. Herzog, T. Hibi (2011), *Monomial Ideals*, Springer-Verlag.

[7] J. Martínez-Bernal, S. Morey, R.H. Villarreal, C. E. Vivares (2019), Depth and regularity of monomial ideals via polarization and combinatorial optimization, *Acta Math. Vietnam.* **44**, 243–268.

[8] S. A. Seyed Fakhari (2018), Symbolic powers of cover ideal of very well-covered and bipartite graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **146**, 97–110.

[9] S. A. Seyed Fakhari (2017), Depth and Stanley depth of symbolic powers of cover ideals of graphs, *J. Algebra*, **492**, 402–413.

[10] S. A. Seyed Fakhari (2019), Regularity of symbolic powers of cover ideals of graphs, *Collect. Math.*, **70**, no. 2, 187–195.

[11] S. A. Seyed Fakhari (2021), On the minimal free resolution of symbolic powers of cover ideals of graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Published electronically (DOI: https://doi.org/10.1090/proc/15534).

[12] K. Yanagawa (2000), Alexander duality for Stanley–Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}^n$-graded modules, *J. Algebra,* **225**, no. 2, 630–645.