

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG THU

PHƯƠNG TRÌNH HÀM  $P(f) = Q(g)$   
TRÊN TRƯỜNG SỐ  $p$ -ADIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG THU

PHƯƠNG TRÌNH HÀM  $P(f) = Q(g)$   
TRÊN TRƯỜNG SỐ  $p$ -ADIC

*Chuyên ngành:* ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

Mã số: 846 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học  
TS. NGUYỄN THỊ NGỌC DIỆP

Nghệ An - 2021

# MỤC LỤC

|                                                                                                   |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Mở đầu</b>                                                                                     | <b>2</b>  |
| <b>Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ</b>                                                               | <b>4</b>  |
| 1.1. Đa tập trong không gian afin và không gian xạ ảnh . . . . .                                  | 4         |
| 1.2. Đường cong phẳng trong mặt phẳng afin . . . . .                                              | 7         |
| 1.3. Trường định chuẩn . . . . .                                                                  | 9         |
| <b>Chương 2. PHƯƠNG TRÌNH HÀM <math>P(f) = Q(g)</math><br/>TRÊN TRƯỜNG SỐ <math>p</math>-ADIC</b> | <b>13</b> |
| 2.1. Một số điều kiện đủ để phương trình hàm không có nghiệm hàm<br>phân hình khác hằng . . . . . | 13        |
| 2.2. Phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ trong trường hợp $Q$ tỷ lệ với $P$ .                          | 23        |
| <b>Kết luận</b>                                                                                   | <b>31</b> |
| <b>Tài liệu tham khảo</b>                                                                         | <b>32</b> |

# MỞ ĐẦU

Giả sử  $P$  và  $Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$  đóng đại số, đầy đủ với giá trị tuyệt đối không Acsimet. Bài toán xem xét nghiệm hàm phân hình  $f$  và  $g$  khác hằng của phương trình hàm  $P(X) = Q(Y)$  từ lâu đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Bằng cách áp dụng lý thuyết phân bố giá trị của Nevanlinna, các tác giả Alain Escassut và Chung Chun Yang đã đưa ra các điều kiện đủ cho tập các không điểm của các đạo hàm bậc nhất của  $P$  và  $Q$  để phương trình hàm  $P(X) = Q(Y)$  không có nghiệm hàm phân hình khác hằng. Trong trường hợp đặc số của trường  $K$  khác 2 và  $\deg(P) = 4$ , các tác giả đã xem xét phương trình hàm trong trường hợp đặc biệt  $Q = aP$  và đã thu được một số điều kiện đặc trưng cho sự tồn tại nghiệm hàm phân hình khác hằng của phương trình  $P(X) = aP(Y)$ .

Trong luận văn này, chúng tôi tập trung nghiên cứu phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$  trên trường không Acsimet.

Nội dung chính của luận văn là tìm hiểu và trình bày một cách chi tiết những kết quả trong bài báo “The functional equation  $P(f) = Q(g)$  in a  $p$ -adic field” của các tác giả Alain Escassut và Chung Chun Yang trên tạp chí Journal of Number Theory [11].

Ngoài phần mục lục, mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được chia thành hai chương.

**Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.** Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản nhằm mục đích làm cơ sở cho việc trình bày nội dung của chương 2. Ngoài ra chúng tôi còn trích dẫn một số kết quả đã có nhằm phục vụ cho các chứng minh ở phần sau.

**Chương 2. Phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$  trên trường số  $p$ -adic.** Trong chương này chúng tôi trình bày một cách chi tiết những kết quả trong bài báo “The functional equation  $P(f) = Q(g)$  in a  $p$ -adic field” của các tác giả Alain Escassut và Chung Chun Yang. Cụ thể chúng tôi trình bày về một số điều kiện đủ để phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$  không có nghiệm hàm phân hình khác hằng và một số điều kiện đặc trưng cho sự tồn tại nghiệm

hàm phân hình khác hằng của phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$  trong trường hợp  $Q$  tỷ lệ với  $P$ .

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Vinh dưới sự hướng dẫn tận tình, chu đáo và nghiêm khắc của cô giáo TS. Nguyễn Thị Ngọc Diệp. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến Cô, người đã chỉ dạy tác giả những kiến thức, kinh nghiệm trong học tập và nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm phòng Sau đại học, Ban lãnh đạo Ngành Toán học – Trường Đại học Vinh.

Tác giả xin cảm ơn quý thầy giáo, cô giáo trong tổ Đại số và Ngành Toán học – Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả suốt thời gian học tập.

Cuối cùng tác giả xin cảm ơn gia đình, đồng nghiệp, các bạn trong lớp cao học 27 – Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số đã cộng tác, giúp đỡ và động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn có thể còn có những hạn chế, thiếu sót, tác giả rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của các Thầy, Cô và các bạn học viên.

*Nghệ An, tháng 5 năm 2021*

**Tác giả**

# CHƯƠNG 1

## KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi trình bày những kiến thức cơ bản nhằm mục đích làm cơ sở cho việc trình bày nội dung của chương 2. Ngoài ra chúng tôi còn trích dẫn một số kết quả đã có nhằm phục vụ cho các chứng minh ở phần sau. Những nội dung này chủ yếu được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [3] và [12].

### 1.1 Đa tập trong không gian afin và không gian xạ ảnh

Trong toàn bộ chương này ta luôn luôn ký hiệu  $k$  là một trường.

**1.1.1 Định nghĩa.** Cho đa thức  $G(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Một điểm  $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{A}^n(k)$  được gọi là *không điểm* của đa thức  $G(x_1, \dots, x_n)$  nếu

$$G(V) = G(v_1, \dots, v_n) = 0.$$

Nếu  $G$  không là hằng thì tập hợp các không điểm của  $G$  được gọi là *siêu mặt* xác định bởi  $G$ , ký hiệu là  $Z(G)$ . Như vậy

$$Z(G) = \{V \in \mathbb{A}^n(k) | G(V) = 0\}.$$

**1.1.2 Định nghĩa.** Nếu  $\mathcal{B}$  là tập hợp các đa thức bất kỳ trong vành đa thức  $k[x_1, \dots, x_n]$  thì tập hợp

$$Z(\mathcal{B}) = \{V \in \mathbb{A}^n(k) | G(V) = 0, \forall G \in \mathcal{B}\}$$

được gọi là *tập đại số* trong  $\mathbb{A}^n(k)$ .

**1.1.3 Ví dụ.** (1) Tập rỗng  $\emptyset$  là một tập đại số vì tập rỗng là tập nghiệm của phương trình  $f = 0$ , với mọi  $f \in k, f \neq 0$ .

(2) Mỗi điểm  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  trong không gian afin  $\mathbb{A}^n(k)$  là một tập

đại số vì  $V$  là tập nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - v_1 = 0 \\ x_2 - v_2 = 0 \\ \dots \\ x_n - v_n = 0 \end{cases}$$

nghĩa là

$$V = Z(x_1 - v_1, x_2 - v_2, \dots, x_n - v_n).$$

(3) Tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính là một tập đại số và được gọi là *đa tập tuyến tính*.

(4)  $\mathbb{A}^n(k)$  là tập đại số trong  $\mathbb{A}^n(k)$  vì  $\mathbb{A}^n(k)$  là tập nghiệm của phương trình  $0 = 0$ .

**1.1.4 Mệnh đề.** (i) Cho  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  là các hệ đa thức trong vành đa thức  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Nếu  $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$  thì  $Z(\mathcal{B}_1) \subseteq Z(\mathcal{B}_2)$ .

(ii) Hợp của hai tập đại số cũng là tập đại số, nghĩa là: Với các hệ đa thức  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  trong vành đa thức  $k[x_1, \dots, x_n]$  ta luôn có

$$Z(\mathcal{B}_1) \cup Z(\mathcal{B}_2) = Z(\mathcal{B})$$

trong đó

$$\mathcal{B} = \{hg | h \in \mathcal{B}_1, g \in \mathcal{B}_2\}.$$

(iii) Giao của một họ tùy ý các tập đại số là một tập đại số, nghĩa là: Với một họ  $\{\mathcal{B}_i\}$  các hệ đa thức trong vành đa thức  $k[x_1, \dots, x_n]$  ta luôn có

$$\bigcap_i Z(\mathcal{B}_i) = Z\left(\bigcup_i \mathcal{B}_i\right).$$

**1.1.5 Chú ý.** Trong không gian afin  $\mathbb{A}^n(k)$  ta luôn có hợp của hai tập đại số là một tập đại số, giao của một họ tùy ý các tập đại số là một tập đại số, tập rỗng và toàn bộ không gian afin  $\mathbb{A}^n(k)$  là các tập đại số. Vì vậy ta có thể trang bị một tôpô trên không gian afin  $\mathbb{A}^n(k)$  bằng cách coi các tập đại số là các tập đóng. Tôpô này được gọi là *tôpô Zariski* trên không gian afin  $\mathbb{A}^n(k)$ .

**1.1.6 Định nghĩa.** (i) Ta nói tập đại số  $U \subset \mathbb{A}^n(k)$  là *khả quy* nếu  $U = U_1 \cup U_2$ , trong đó  $U_1, U_2$  là các tập đại số trong  $\mathbb{A}^n(k)$  và  $U_1 \neq U, U_2 \neq U$ .

Trong trường hợp ngược lại, tập đại số  $U$  được gọi là *bất khả quy*.

(ii) Một tập đại số bất khả quy trong không gian afin  $\mathbb{A}^n(k)$  được gọi là *một đa tạp afin*.

(iii) Một tập con mở của một đa tạp afin được gọi là *đa tạp tựa afin*.

**1.1.7 Định lý.** *Giả sử  $U$  là tập đại số trong không gian afin  $\mathbb{A}^n(k)$ . Khi đó tồn tại duy nhất các tập đại số bất khả quy  $U_1, U_2, \dots, U_m$  sao cho*

$$U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$$

*trong đó  $U_i \not\subset U_j$  với mọi  $i \neq j$ .*

*Các tập đại số bất khả quy  $U_i$  được gọi là các thành phần bất khả quy của tập đại số  $U$  và  $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$  là sự phân tích  $U$  thành các thành phần bất khả quy.*

Giả sử  $H$  là đa thức thuần nhất bậc  $h$  trong vành đa thức  $k[x_1, \dots, x_{n+1}]$ . Ta có

$$H(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_{n+1}) = \lambda^h H(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}),$$

với mọi điểm  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)$ ,  $\lambda \in k$ . Vì vậy nếu  $a$  là nghiệm của  $H$  thì  $\lambda a$  cũng là nghiệm của  $H$ .

Lưu ý rằng điểm 0 là nghiệm của mọi đa thức thuần nhất.

Để xét nghiệm của đa thức thuần nhất ta chia tập  $\mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$  theo quan hệ tương đương

$$a \sim b \text{ nếu tồn tại } \lambda \neq 0 \text{ sao cho } b = \lambda a.$$

Tập hợp các lớp tương đương này được gọi là *không gian xạ ảnh  $n$  chiều trên trường  $k$*  và ký hiệu là  $\mathbb{P}^n(k)$ .

Với mỗi điểm  $a \in \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$  ta cũng dùng ký hiệu  $a$  để chỉ lớp các điểm tương đương với  $a$ . Khi đó ta coi  $a$  như là điểm của không gian xạ ảnh  $\mathbb{P}^n(k)$ .

**1.1.8 Định nghĩa.** (i) Cho đa thức  $E \in k[x_1, \dots, x_{n+1}]$ . Một điểm  $a \in \mathbb{P}^n(k)$  được gọi là *nghiệm xạ ảnh của đa thức  $E$*  nếu  $E(\lambda a) = 0$  với mọi  $\lambda \in k$ .



(ii) Với mỗi tập  $\mathcal{M}$  không rỗng gồm các đa thức thuần nhất trong vành đa thức  $k[x_1, \dots, x_{n+1}]$  thì

$$Z(\mathcal{M}) = \{a \in \mathbb{P}^n(k) \mid E(a) = 0 \text{ với mọi } E \in \mathcal{M}\}$$

được gọi là *tập đại số xạ ảnh* trong không gian xạ ảnh  $\mathbb{P}^n(k)$ .

**1.1.9 Định nghĩa.** (i) Ta nói tập đại số  $U$  trong không gian xạ ảnh  $\mathbb{P}^n(k)$  là *bất khả quy* nếu  $U$  không là hợp của hai tập đại số bé hơn thực sự.

(ii) Một tập đại số bất khả quy trong  $\mathbb{P}^n(k)$  được gọi là *một đa tạp xạ ảnh*.

(iii) Một tập con mở của một đa tạp xạ ảnh gọi là *đa tạp tựa xạ ảnh*.

## 1.2 Đường cong phẳng trong mặt phẳng afin

**1.2.1 Định nghĩa.** Đường cong phẳng  $\mathcal{D}$  trong  $\mathbb{A}^2(k)$  xác định bởi đa thức  $H(x, y)$  là

$$\mathcal{D} = \{(a, b) \in \mathbb{A}^2(k) \mid H(a, b) = 0\}.$$

Đường cong  $\mathcal{D}$  là bất khả quy nếu  $H(x, y)$  bất khả quy. Bậc của đường cong xác định bởi đa thức  $H(x, y)$  là bậc của đa thức  $H(x, y)$ .

Giả sử  $H = \prod_i H_i^{e_i}$ , trong đó  $H_i$  là các nhân tử bất khả quy của  $H$  và  $e_i \geq 1$ . Ta gọi các  $H_i$  là các thành phần của  $H$  và  $e_i$  là bội của thành phần  $H_i$ . Ta nói  $H_i$  là thành phần đơn nếu  $e_i = 1$ , và là thành phần bội nếu  $e_i > 1$ .

Do vành đa thức  $k[x, y]$  là vành nhân tử hóa nên mọi đa thức  $H(x, y) \in k[x, y]$  đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành thành phần bất khả quy

$$H = H_1^{s_1} H_2^{s_2} \dots H_l^{s_l},$$

trong đó  $H_1, H_2, \dots, H_l$  là các đa thức bất khả quy phân biệt và  $s_1, s_2, \dots, s_l$  là các số tự nhiên.

Bây giờ ta ký hiệu

$$\mathcal{D}_i = \{(a, b) \in \mathbb{A}^2(k) \mid H_i(a, b) = 0, i = 1, 2, \dots, l\}.$$

Khi đó  $\mathcal{D}_i (i = 1, 2, \dots, l)$  là các thành phần bất khả quy của đường cong  $\mathcal{D}$ . Đồng thời đường cong  $\mathcal{D}$  có sự phân tích thành các thành phần bất khả quy

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_l.$$

Giả sử  $H(x, y)$  là các đa thức hai biến trên trường  $k$  có bậc  $n$ . Đặt  $\tilde{H}(x, y, z) = z^n H\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ , ta có  $\tilde{H}(x, y, z)$  là một đa thức thuần nhất bậc  $n$  thuộc vành đa thức  $k[x, y, z]$  và được gọi là *sự thuần nhất của đa thức*  $H(x, y)$ .

Ta ký hiệu

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{[a : b : c] \in \mathbb{P}^2(k) \mid \tilde{H}(a, b, c) = 0\}$$

thì  $\tilde{\mathcal{D}}$  được gọi là *đường cong xạ ảnh tương ứng của đường cong*  $\mathcal{D}$ . Điểm  $(a, b)$  thuộc đường cong  $\mathcal{D}$  khi và chỉ khi điểm  $(a, b, 1)$  thuộc đường cong  $\tilde{\mathcal{D}}$ . Đường cong  $\mathcal{D}$  bất khả quy khi và chỉ khi đường cong  $\tilde{\mathcal{D}}$  bất khả quy. Nếu đường cong  $\mathcal{D}$  có sự phân tích thành các thành phần bất khả quy

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_l$$

thì đường cong  $\tilde{\mathcal{D}}$  cũng có sự phân tích thành các thành phần bất khả quy tương ứng

$$\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}_1 \cup \tilde{\mathcal{D}}_2 \cup \dots \cup \tilde{\mathcal{D}}_l.$$

**1.2.2 Định nghĩa.** Cho đường cong phẳng  $\mathcal{D}$  trong không gian afin  $\mathbb{A}^2(k)$  xác định bởi phương trình  $H(x, y) = 0$  và điểm  $M = (u, v) \in \mathcal{D}$ . Điểm  $M$  được gọi là *điểm đơn* của đường cong  $\mathcal{D}$  nếu  $\frac{\partial H}{\partial x}(M) \neq 0$  hoặc  $\frac{\partial H}{\partial y}(M) \neq 0$ . Khi đó đường thẳng xác định bởi phương trình

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_M (x - u) + \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_M (y - v) = 0$$

được gọi là *đường tiếp tuyến* với đường cong  $\mathcal{D}$  tại điểm  $M$ . Một điểm không phải là điểm đơn thì gọi là *điểm kỳ dị*.

Một đường cong được gọi là *trơn* nếu mọi điểm của đường cong đó là điểm đơn.

**1.2.3 Định nghĩa.** Cho đường cong phẳng  $\mathcal{D}$  trong không gian afin  $\mathbb{A}^2(k)$  xác định bởi phương trình  $H(x, y) = 0$  và điểm  $M = (0, 0)$ . Ta viết

$$H = H_t + H_{t+1} + \dots + H_n,$$

trong đó  $H_i$  là đa thức thuần nhất bậc  $i$  trong vành đa thức  $k[x, y]$ ,  $H_t \neq 0$ . Ta gọi  $t$  là số bội của đường cong  $\mathcal{D}$  tại  $M = (0, 0)$  và viết  $t = t_M(H) = t_M(\mathcal{D})$ .

Do  $H_t$  là đa thức thuần nhất hai biến trên trường đóng đại số nên ta có thể viết  $H_t = \prod_i Q_i^{q_i}$  trong đó  $Q_i$  là các nhân tử tuyến tính. Các  $Q_i$  được gọi là *các đường tiếp tuyến* của đường cong  $\mathcal{D}$  tại  $M = (0, 0)$ ;  $q_i$  gọi là *số bội của tiếp tuyến*.  $Q_i$  gọi là *tiếp tuyến đơn* (kép, ...) nếu  $q_i = 1(2, \dots)$ .

Nếu đường cong  $\mathcal{D}$  có  $t$  tiếp tuyến đơn phân biệt tại  $M$  thì ta nói  $M$  là điểm kỳ dị chính tắc của đường cong  $\mathcal{D}$ .

Giả sử  $H = \prod H_i^{l_i}$  là sự phân tích  $H$  thành các thành phần bất khả quy. Khi đó

$$t_M(H) = \sum_i l_i t_M(H_i).$$

Nếu  $Q$  là đường tiếp tuyến của  $H_j$  với số bội  $q_j$  thì  $Q$  là tiếp tuyến của  $H$  với số bội  $\sum_i l_i q_i$ .

**1.2.4 Nhận xét.** Ta có thể mở rộng các định nghĩa trên đây cho điểm  $M = (u, v) \neq (0, 0)$  bằng cách thực hiện phép tịnh tiến  $S(x, y) = (x + u, y + v)$  biến  $(0, 0)$  thành  $M$ . Khi đó  $H^S = H(X + u, Y + v)$  và ta định nghĩa  $t_M(H)$  chính là  $t_{(0,0)}(H^S)$ .

## 1.3 Trường định chuẩn

**1.3.1 Định nghĩa.** Trường  $K$  cùng với ánh xạ  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ , ký hiệu bởi  $(K, \varphi)$  được gọi là một *trường định chuẩn* hay *trường metric* nếu các điều kiện sau đây thỏa mãn:

- 1)  $\varphi(\alpha) \geq 0$ ;  $\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \forall \alpha \in K$ ;
- 2)  $\varphi(\alpha + \beta) \leq \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \forall \alpha, \beta \in K$ ;
- 3)  $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta), \forall \alpha, \beta \in K$ .

Nếu thay điều kiện 2) bởi điều kiện mạnh hơn sau đây:

- 4)  $\varphi(\alpha + \beta) \leq \max\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}, \forall \alpha, \beta \in K$

thì trường định chuẩn  $(K, \varphi)$  được gọi là *trường định chuẩn không Acsimet*.

Hàm  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi  $\varphi(0) = 0, \varphi(\alpha) = 1, \forall \alpha \in K, \alpha \neq 0$ , là một chuẩn trên trường  $K$  và được gọi là *chuẩn tầm thường* trên  $K$ . Như vậy,

một chuẩn  $\varphi$  là không tầm thường trên trường  $K$  nếu tồn tại  $\alpha \in K, \alpha \neq 0$  sao cho  $\varphi(\alpha) \neq 1$ .

Giả sử  $\varphi$  là một chuẩn trên trường  $K$ , khi đó bằng cách đặt

$$d(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha - \beta), \forall \alpha, \beta \in K$$

thì  $d$  là một khoảng cách (mêtric) trên trường  $K$ . Khoảng cách này sẽ xác định một cấu trúc tôpô trên trường  $K$ .

**1.3.2 Ví dụ.** 1) Hàm giá trị tuyệt đối thông thường  $||$  là chuẩn trên trường số hữu tỉ  $\mathbb{Q}$ .

2) Hàm giá trị tuyệt đối thông thường  $||$  là chuẩn trên trường số thực  $\mathbb{R}$ .

3) Hàm môđun  $||$  là chuẩn trên trường số phức  $\mathbb{C}$ .

**1.3.3 Định nghĩa.** Cho  $p$  là một số nguyên tố cố định. Với mỗi số hữu tỉ  $\alpha \neq 0$ , ta viết được một cách duy nhất

$$\alpha = \frac{a}{b} p^n; a, b, n \in \mathbb{Z}, a, b \text{ không chia hết cho } p.$$

Ta định nghĩa chuẩn  $p$ -adic  $||_p$  trên trường số hữu tỉ  $\mathbb{Q}$  là hàm số

$$\varphi_p: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

xác định bởi

$$\varphi_p(0) = |0|_p = 0; \varphi_p(\alpha) = |\alpha|_p = p^{-n}.$$

Ta có  $||_p$  là một chuẩn không Acsimet trên trường số hữu tỉ  $\mathbb{Q}$ .

**1.3.4 Mệnh đề.** Cho  $(K, \varphi)$  là một trường định chuẩn, khi đó ta có:

$$1) \varphi(1) = \varphi(-1) = 1.$$

$$2) \varphi(a) = \varphi(-a), \forall a \in K.$$

$$3) |\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \varphi(a - b), \forall a, b \in K.$$

$$4) \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(a_i).$$

$$5) \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = \frac{1}{\varphi(a)}, \forall a \in K, a \neq 0.$$

$$6) \varphi(ab^{-1}) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}, \forall a, b \in K, b \neq 0.$$

**1.3.5 Định nghĩa.** Giả sử  $(K, \varphi)$  là trường định chuẩn.

- Dãy  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  các phần tử của  $K$ , được gọi là *hội tụ về phần tử*  $\alpha \in K$  (theo chuẩn  $\varphi$ ) nếu với mỗi số thực  $\epsilon > 0$  tùy ý, tồn tại một số tự nhiên  $n_0$  sao cho  $\varphi(\alpha_n - \alpha) < \epsilon, \forall n > n_0$ . Ta kí hiệu:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ .
- Dãy  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  các phần tử của  $K$  được gọi là một *dãy không* (theo chuẩn  $\varphi$ ) nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .
- Dãy  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  các phần tử của  $K$  được gọi là *dãy cơ bản* hay *dãy Cauchy* (theo chuẩn  $\varphi$ ) nếu với mỗi số thực  $\epsilon > 0$  tùy ý, tồn tại một số tự nhiên  $n_0$  sao cho  $\varphi(\alpha_n - \alpha_m) < \epsilon, \forall n, m > n_0$ .

Trường định chuẩn  $(K, \varphi)$  được gọi là *trường định chuẩn đầy đủ* nếu trong nó mọi dãy cơ bản đều là dãy hội tụ (theo chuẩn  $\varphi$ ).

**1.3.6 Định lý.** Trong trường định chuẩn mọi dãy hội tụ là dãy cơ bản. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng.

**1.3.7 Hệ quả.** Trường số hữu tỉ  $\mathbb{Q}$  là trường không đầy đủ theo chuẩn giá trị tuyệt đối.

**1.3.8 Định lý.** Chuẩn  $\varphi$  trên trường  $K$  là chuẩn không Acsimet khi và chỉ khi  $\varphi(n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**1.3.9 Định nghĩa.** Các chuẩn  $\varphi$  và  $\psi$  trên cùng một trường  $K$  được gọi là *tương đương với nhau* và ký hiệu bởi  $\varphi \sim \psi$  nếu chúng xác định trên  $K$  cùng một tính hội tụ, nghĩa là  $\varphi(x_n - x) \rightarrow 0$  khi và chỉ khi  $\psi(x_n - x) \rightarrow 0$  theo chuẩn giá trị tuyệt đối trong trường số thực  $\mathbb{R}$ .

**1.3.10 Mệnh đề.** Giả sử  $\varphi$  và  $\psi$  là các chuẩn trên trường  $K$ . Khi đó  $\varphi$  và  $\psi$  là tương đương với nhau khi và chỉ khi  $\forall x \in K (\varphi(x) < 1 \Leftrightarrow \psi(x) < 1)$ .

**1.3.11 Định lý.** Trên trường hữu hạn chỉ có duy nhất một chuẩn tầm thường.

**1.3.12 Mệnh đề.** Cho  $\varphi$  là chuẩn không Acsimet trên  $K$ . Nếu các giá trị thực  $\varphi(\alpha)$  và  $\varphi(\beta)$  khác nhau thì

$$\varphi(\alpha + \beta) = \max\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}, \forall \alpha, \beta \in K.$$

**1.3.13 Mệnh đề.** *Hàm số  $\varphi(x) = |x|^\alpha$ , với  $\alpha$  là một số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện  $0 < \alpha \leq 1$ , là một chuẩn trên trường số hữu tỉ  $\mathbb{Q}$ .*

**1.3.14 Định lý.** (Định lý Ostrowski) *Các chuẩn  $\varphi(x) = |x|^\alpha$  với  $0 < \alpha \leq 1$  và các chuẩn  $p$ -adic  $|\cdot|_p$  với tất cả các số nguyên tố  $p$  nhận hết các chuẩn không tầm thường của trường số hữu tỉ  $\mathbb{Q}$ . Nói khác đi, một chuẩn không tầm thường trên trường số hữu tỉ  $\mathbb{Q}$  là tương đương với một trong hai chuẩn sau:*

(i) hoặc chuẩn giá trị tuyệt đối  $|\cdot|_\infty$

(ii) hoặc chuẩn  $p$ -adic  $|\cdot|_p$ , với  $p$  là số nguyên tố nào đó.

## CHƯƠNG 2

### PHƯƠNG TRÌNH HÀM $P(f) = Q(g)$ TRÊN TRƯỜNG SỐ $p$ -ADIC

Trong chương này, chúng tôi tìm hiểu một số điều kiện đủ để phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$  trên trường đóng đại số, đầy đủ với giá trị tuyệt đối không Acsimet không có nghiệm hàm phân hình khác hằng. Trong trường hợp đa thức  $Q$  tỷ lệ với đa thức  $P$ , chúng tôi tìm hiểu một số điều kiện đặc trưng cho sự tồn tại nghiệm hàm phân hình khác hằng của phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$ . Nội dung của chương này được tham khảo trong bài báo [11].

#### 2.1 Một số điều kiện đủ để phương trình hàm không có nghiệm hàm phân hình khác hằng

Giả sử  $K$  là trường đóng đại số có đặc số  $\pi$ , đầy đủ với giá trị tuyệt đối không Acsimet và  $K^* = K \setminus \{0\}$ . Với  $a \in K$  và  $r > 0$  ta ký hiệu  $d(a, r^-)$  là đĩa  $\{x \in K \mid |x - a| < r\}$ . Giả sử  $\mathcal{U}(K)$  (tương ứng  $\mathcal{U}(d(a, r^-))$ ) là tập các hàm phân hình trên  $K$  (tương ứng trên  $d(a, r^-)$ ) và  $\mathcal{V}(K)$  (tương ứng  $\mathcal{V}(d(a, r^-))$ ) là tập các hàm nguyên trên  $K$  (tương ứng trên  $d(a, r^-)$ ). Trong tập  $\mathcal{V}(d(a, r^-))$  ta ký hiệu  $\mathcal{V}_b(d(a, r^-))$  là tập con gồm các hàm  $f \in \mathcal{V}(d(a, r^-))$  bị chặn trên đĩa  $d(a, r^-)$  và  $\mathcal{V}_u(d(a, r^-))$  là tập hợp  $\mathcal{V}(d(a, r^-)) \setminus \mathcal{V}_b(d(a, r^-))$ . Tương tự, trong tập  $\mathcal{U}(d(a, r^-))$  ta ký hiệu  $\mathcal{U}_b(d(a, r^-))$  là tập con gồm các hàm  $f \in \mathcal{U}(d(a, r^-))$  có dạng  $\frac{\Phi}{\Psi}$  với  $\Phi, \Psi \in \mathcal{V}_b(d(a, r^-))$  và  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$  là tập  $\mathcal{U}(d(a, r^-)) \setminus \mathcal{U}_b(d(a, r^-))$ .

**2.1.1 Mệnh đề.** ([12]) *Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$  và  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0. Điểm  $(a, b) \in K^2$  là một điểm kỳ dị của đường cong xác định bởi phương trình  $P(x) = Q(y)$  khi và chỉ khi  $P$  và  $Q$  thỏa mãn*

$$P(a) = Q(b), P'(a) = Q'(b) = 0.$$

**2.1.2 Mệnh đề.** *Giả sử  $P \in K[x]$  thỏa mãn  $P' \neq 0$ , bậc của  $P$  bằng 3 và  $P'$  có hai không điểm phân biệt  $c_1, c_2$ . Khi đó  $P(c_1) \neq P(c_2)$ .*

*Chứng minh.* Vì  $P'$  có hai không điểm phân biệt và  $P$  có bậc 3 nên  $\pi \neq 2$  và 3. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng  $P$  là đa thức có hệ tử cao nhất bằng 1 và  $c_1 = 0, c_2 = a$ . Khi đó  $P$  có dạng  $\frac{x^3}{3} - a\frac{x^2}{2} + A$ . Do  $a \neq 0$  nên ta có  $P(0) \neq P(a)$ .  $\square$

**2.1.3 Mệnh đề.** ([6]) *Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ , với  $2 \leq \deg(P) \leq \deg(Q) = 3$  và  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0. Khi đó tồn tại các hàm phân hình khác hằng  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $P(f) = Q(g)$  khi và chỉ khi  $P'$  có không điểm  $a$  và  $Q'$  có không điểm  $b$  thỏa mãn  $P(a) = Q(b)$ .*

Ký hiệu  $\mathcal{X}$  là số mũ đặc trưng của  $K$ , tức là nếu  $\pi = 0$  thì  $\mathcal{X} = 1$  và nếu  $\pi \neq 0$  thì  $\mathcal{X} = \pi$ .

Cho  $h \in \mathcal{U}(d(a, r^-))$  (tương ứng  $h \in \mathcal{U}(K)$ ). Ta gọi hệ số nhánh của  $h$  là số nguyên  $t$  duy nhất sao cho  $\sqrt[t]{h}$  thuộc vào  $\mathcal{U}(d(a, r^-))$  (tương ứng thuộc vào  $\mathcal{U}(K)$ ) và  $h^{(t)} \neq 0$ . Hệ số nhánh của hàm  $h \in \mathcal{U}(d(a, r^-))$  (tương ứng  $h \in \mathcal{U}(K)$ ) ký hiệu là  $v(h)$ .

Lưu ý rằng nếu  $\pi = 0$  thì với mỗi hàm trong  $\mathcal{U}(d(a, r^-))$  hoặc  $\mathcal{U}(K)$  có hệ số nhánh bằng 0.

Với  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , ta ký hiệu  $\gcd(m, n)$  là ước chung lớn nhất của  $m$  và  $n$ .

Giả sử  $f \in \mathcal{U}(d(0, r^-))$  và  $\alpha \in d(0, r^-)$ . Nếu  $f$  có một không điểm (tương ứng một cực điểm) bậc  $n$  tại  $\alpha$ , ta đặt  $\omega_\alpha(f) = n$  (tương ứng  $\omega_\alpha(f) = -n$ ). Nếu  $f(\alpha) \neq 0$  và  $\infty$ , ta đặt  $\omega_\alpha(f) = 0$ .

Giả sử  $f \in \mathcal{U}(d(0, r^-))$  với  $f(0) \neq 0, \infty$ . Ta ký hiệu  $Z(\rho, f)$  là hàm đếm các không điểm của  $f$  trong  $d(0, r^-)$

$$Z(\rho, f) = \sum_{\omega_\alpha(f) > 0, |\alpha| \leq \rho} \omega_\alpha(f) \log \frac{\rho}{|\alpha|}.$$

Tiếp theo, ta đặt

$$\tilde{Z}(\rho, f) = \sum_{\omega_\alpha(f) > 0, \alpha \in d(0, \rho)} \log \frac{\rho}{|\alpha|}.$$

Ta cũng xem xét các hàm đếm các cực điểm của  $f$  trong  $d(0, r^-)$

$$N(\rho, f) = Z\left(\rho, \frac{1}{f}\right) \text{ và } \tilde{N}(\rho, f) = \tilde{Z}\left(\rho, \frac{1}{f}\right).$$



Hàm đặc trưng  $T(\rho, f)$  của  $f$  được xác định bởi

$$T(\rho, f) = \max \{Z(\rho, f) + \log |f(0)|, N(\rho, f)\}.$$

**2.1.4 Nhận xét.** Theo định nghĩa, ta có  $\tilde{Z}(\rho, f) \leq Z(\rho, f) \leq T(\rho, f) + O(1)$ ,  $\tilde{N}(\rho, f) \leq N(\rho, f) \leq T(\rho, f)$  trong  $]0, +\infty[$  với  $f \in \mathcal{U}(K)$  (tương ứng trong  $]0, r[$  với  $f \in \mathcal{U}(d(0, r^-))$ ).

**2.1.5 Định lý.** ([7]) *Giả sử  $f \in \mathcal{U}(d(0, r^-))$ ,  $f(0) \neq 0, \infty$ . Khi đó  $f$  thuộc  $\mathcal{U}_b(d(0, r^-))$  khi và chỉ khi  $T(\rho, f)$  bị chặn trên  $]0, r[$ .*

**2.1.6 Định lý.** ([7]) *Giả sử  $f \in \mathcal{U}(d(0, r^-))$  và  $\deg(P) = n$ . Khi đó*

$$T(\rho, P(f)) = nT(\rho, f) + O(1).$$

**2.1.7 Hệ quả.** ([7]) *Giả sử  $f \in \mathcal{U}(d(0, r^-))$  và  $P$  là đa thức một biến trên trường  $K$ . Khi đó  $f$  thuộc  $\mathcal{U}_b(d(0, r^-))$  khi và chỉ khi  $P(f)$  cũng thuộc  $\mathcal{U}_b(d(0, r^-))$ .*

**2.1.8 Hệ quả.** ([7]) *Giả sử  $f, g \in \mathcal{U}(d(0, r^-))$ ,  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$  và  $f, g$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ . Khi đó  $f$  thuộc  $\mathcal{U}_b(d(0, r^-))$  khi và chỉ khi  $g$  thuộc  $\mathcal{U}_b(d(0, r^-))$ .*

**2.1.9 Định lý.** *Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$  với  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0 và  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$  thỏa mãn  $2 \leq \min(p, q)$ . Giả sử rằng tồn tại  $k$  không điểm phân biệt  $c_1, \dots, c_k$  của  $P'$  sao cho  $P(c_i) \neq P(c_j), \forall i \neq j$ , và  $P(c_i) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Giả sử tồn tại hai hàm  $f, g \in \mathcal{U}_u(d(a, r^-))$  sao cho  $P(f) = Q(g)$ . Đặt  $t = v(f)$ . Khi đó  $\tilde{N}(\rho, f) \geq \frac{T(\rho, f)(kq - p)}{\mathcal{X}^t q} + O(1)$ . Hơn nữa, nếu  $\frac{2p}{3} < q$  thì  $k \leq 2$ . Đồng thời, nếu  $p \neq q$ , thì  $k = 1$ ,  $c_1$  là không điểm đơn của  $P'$  và hoặc là  $q < p$  hoặc là  $\gcd(p, q) = q - p$ .*

**2.1.10 Nhận xét.** Trong các hệ quả sau đây, khi chúng ta giả thiết rằng một trong các hàm  $f$  và  $g$  thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ , thì theo Hệ quả 2.1.8, cả  $f$  và  $g$  đều thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ .

**2.1.11 Hệ quả.** *Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$  với  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0 và  $\deg(P) = \deg(Q)$ . Giả sử tồn tại hai không điểm*

phân biệt  $c_1, c_2$  của  $P'$  sao cho  $P(c_1) \neq P(c_2)$  và  $P(c_i) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$ . Nếu hai hàm  $f, g \in \mathcal{V}(d(a, r^-))$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$  thì  $f, g \in \mathcal{V}_b(d(a, r^-))$ .

*Chứng minh.* Đặt  $q = \deg(P) = \deg(Q)$ . Giả sử rằng kết luận của hệ quả là sai. Khi đó theo Hệ quả 2.1.8, ta có  $f$  và  $g$  không bị chặn. Theo Định lý 2.1.9 ta có  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \tilde{N}(\rho, f) = +\infty$ , điều này vô lý vì  $f \in \mathcal{V}(d(a, r^-))$ .  $\square$

**2.1.12 Định lý.** *Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $\deg(P) = \deg(Q) = 2$  và  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0. Giả sử  $a$  và  $b$  lần lượt là không điểm của  $P'$  và  $Q'$ . Khi đó các phát biểu dưới đây là tương đương:*

- i) *Tồn tại  $f, g \in \mathcal{V}(K) \setminus K$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ ;*
- ii) *Tồn tại  $f, g \in \mathcal{V}_u(d(a, r^-))$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ ;*
- iii)  *$P(a) = Q(b)$ .*

*Chứng minh.* Vì  $\deg(P) = \deg(Q) = 2$  nên ta có thể viết được các đa thức  $P$  và  $Q$  dưới dạng  $P = \alpha^2(x - a)^2 + P(a)$ ,  $Q = \beta^2(x - b)^2 + Q(b)$ , với  $\alpha \neq \beta$ . Đầu tiên ta giả sử rằng  $P(a) = Q(b)$  và  $f \in \mathcal{V}(K)$  (tương ứng  $f \in \mathcal{V}_u(d(a, r^-))$ ). Đặt  $g = \frac{\alpha}{\beta}(f - a) + b$ . Khi đó ta có  $P(f) = Q(g)$ . Do  $\alpha \neq \beta$ ,  $g - f$  không bị chặn trong  $d(a, r^-)$  (tương ứng trong  $K$ ), nên  $g \neq f$ .

Bây giờ, giả sử rằng  $P(a) \neq Q(b)$  và  $f, g \in \mathcal{V}(d(a, r^-))$  (tương ứng  $f, g \in \mathcal{V}(K)$ ) thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ . Giả sử  $\lambda \in K$  sao cho  $\lambda^2 = Q(b) - P(a)$  và  $u$  thỏa mãn  $u^2 = -1$ . Đặt  $\phi = \frac{\alpha}{\lambda}(f - a)$ ,  $\psi = u \frac{\beta}{\lambda}(g - b)$ . Từ  $P(f) = Q(g)$ , ta có  $\phi^2 - \psi^2 = 1$ , do đó  $(\phi + \psi)(\phi - \psi) = 1$ . Theo Hệ quả 2.1.11 ta có  $\phi - \psi$  và  $\phi + \psi$  bị chặn trong  $d(a, r^-)$  (tương ứng là hàm hằng), và do đó cả  $\phi$  và  $\psi$  bị chặn trong  $d(a, r^-)$  (tương ứng  $\phi$  và  $\psi$  là hàm hằng).  $\square$

**2.1.13 Hệ quả.** *Cho  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0 và  $3 \leq \deg(P) = \deg(Q) \leq 4$ . Giả sử rằng tồn tại hai không điểm phân biệt  $c_1, c_2$  của  $P'$  sao cho  $P(c_i) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$  ( $i = 1, 2$ ). Ngoài ra, nếu  $p = 4$ , ta giả thiết rằng  $P(c_1) \neq P(c_2)$ . Nếu hai hàm  $f, g \in \mathcal{V}(d(a, r^-))$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ , thì  $f, g \in \mathcal{V}_b(d(a, r^-))$ .*

*Chứng minh.* Nếu  $p = 3$  thì theo Mệnh đề 2.1.2 ta có  $P(c_1) \neq P(c_2)$ . Áp dụng Định lý 2.1.9 với  $k = 2$  và  $p = q = 3$  hoặc  $p = q = 4$  ta có  $\tilde{N}(\rho, f)$  không bị chặn, điều này mâu thuẫn với  $f$  không bị chặn.  $\square$

**2.1.14 Hệ quả.** *Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $P', Q'$  không đồng nhất bằng không và  $\deg(P) < \deg(Q)$ . Giả sử tồn tại không điểm  $c$  của  $P'$  sao cho  $P(c) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$ . Nếu hai hàm  $f, g \in \mathcal{V}(d(a, r^-))$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ , thì  $f, g \in \mathcal{V}_b(d(a, r^-))$ .*

*Chứng minh.* Đặt  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$ . Giả sử rằng  $f$  hoặc  $g$  không bị chặn. Theo Hệ quả 2.1.8 ta có cả  $f$  và  $g$  không bị chặn. Áp dụng Định lý 2.1.9 với  $k = 1, p < q$  ta có  $\tilde{N}(\rho, f)$  không bị chặn, điều này mâu thuẫn với  $f$  không bị chặn.  $\square$

**2.1.15 Hệ quả.** *Cho  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0 và  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$  thỏa mãn  $p \neq q$  và  $2p < 3q$ . Giả sử rằng tồn tại hai không điểm phân biệt  $c_1$  và  $c_2$  của  $P'$  sao cho  $P(c_1) \neq P(c_2)$  và  $P(c_i) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$  ( $i = 1, 2$ ). Nếu  $f, g \in \mathcal{U}(d(a, r^-))$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ , thì  $f, g \in \mathcal{U}_b(d(a, r^-))$ .*

*Chứng minh.* Giả sử  $k$  là số các không điểm  $c_i$  của  $P$  sao cho  $P(c_i) \neq P(c_j), \forall i \neq j$ , và  $P(c_i) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$  ( $i = 1, 2$ ). Theo Hệ quả 2.1.8, nếu một trong hai hàm  $f, g$  thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ , thì cả hai hàm  $f, g$  thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ . Bởi vậy, nếu  $f$  và  $g$  thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$  thì theo Định lý 2.1.9 và giả thiết  $2p < 3q$ , ta có  $k = 1$ , điều này vô lý. Vậy ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**2.1.16 Hệ quả.** *Cho  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0 và  $3 \leq \deg(P) \leq 4, \deg(Q) \geq 3, \deg(P) \neq \deg(Q)$ . Giả sử rằng tồn tại hai không điểm phân biệt  $c_1$  và  $c_2$  của  $P'$  sao cho  $P(c_i) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$  ( $i = 1, 2$ ). Hơn nữa nếu  $\deg(P) = 4$  thì ta giả thiết rằng  $P(c_1) \neq P(c_2)$ . Nếu  $f, g \in \mathcal{U}(d(a, r^-))$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ , thì  $f, g \in \mathcal{U}_b(d(a, r^-))$ .*

*Chứng minh.* Đặt  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$ . Theo Mệnh đề 2.1.2 ta lưu ý rằng  $P(c_1) \neq P(c_2)$  khi  $p = 3$ . Như vậy  $P(c_1) \neq P(c_2)$  trong mọi trường

hợp. Giả sử rằng một trong hai hàm  $f, g$  thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ . Khi đó theo Hệ quả 2.1.8 cả  $f$  và  $g$  đều thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ . Theo Định lý 2.1.9 ta có  $k = 1$ , điều này mâu thuẫn với giả thiết  $P'$  có hai không điểm phân biệt.  $\square$

**2.1.17 Hệ quả.** *Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0,  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$ , thỏa mãn  $p < q$  và  $q - p \neq \gcd(p, q)$ . Giả sử rằng tồn tại không điểm  $c$  của  $P'$  sao cho  $P(c) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$ . Nếu  $f, g \in \mathcal{U}(d(a, r^-))$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ , thì  $f, g \in \mathcal{U}_b(d(a, r^-))$ .*

*Chứng minh.* Giả sử rằng một trong hai hàm  $f, g$  thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ , thế thì theo Hệ quả 2.1.8 cả hai hàm  $f$  và  $g$  đều thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ . Vì  $p \neq q$ , nên theo Định lý 2.1.9 ta có  $q < p$  hoặc  $\gcd(p, q) = q - p$ , cả hai trường hợp đều bị loại do các giả thiết của hệ quả. Như vậy cả  $f$  và  $g$  đều thuộc  $\mathcal{U}_b(d(a, r^-))$ .  $\square$

**2.1.18 Hệ quả.** *Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0 và  $\deg(P) = \deg(Q) \geq 4$ . Giả sử rằng tồn tại ba không điểm phân biệt  $c_1, c_2, c_3$  của  $P'$  thỏa mãn  $P(c_i) \neq P(c_j), \forall i \neq j$ , và  $P(c_i) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Nếu  $f, g \in \mathcal{U}(d(a, r^-))$  thỏa mãn  $f' \neq 0$  và  $P(f) = Q(g)$ , thì  $f, g \in \mathcal{U}_b(d(a, r^-))$ .*

*Chứng minh.* Đặt  $q = \deg(P) = \deg(Q)$  và giả sử rằng  $f$  hoặc  $g$  thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ . Khi đó, theo Hệ quả 2.1.8 cả  $f$  và  $g$  đều thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$ . Từ  $f' \neq 0$ , chúng ta có  $v(f) = 0$ , do đó theo Định lý 2.1.9 ta có  $\tilde{N}(\rho, f) \geq T(\rho, f) \left( \frac{3q - q}{q} \right) + O(1)$ . Vì thế  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \tilde{N}(\rho, f) - T(\rho, f) = +\infty$ , điều này vô lý.  $\square$

**2.1.19 Định lý.** *Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0 và  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$  với  $2 \leq \min(p, q)$ . Giả sử rằng tồn tại  $k$  không điểm phân biệt  $c_1, \dots, c_k$  của  $P'$  sao cho  $P(c_i) \neq P(c_j), \forall i \neq j$ , và  $P(c_i) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Giả sử rằng tồn tại hai hàm khác hằng  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $P(f) = Q(g)$  và  $t = v(f)$ . Khi đó  $q \leq p$  và  $f$  thỏa mãn  $\tilde{N}(\rho, f) \geq \frac{T(\rho, f)(kq - p)}{\mathcal{X}^t q} + \log \rho + O(1)$ . Hơn nữa, nếu  $\frac{p}{2} < q$ , thì  $k = 1$  và  $c_1$  là một không điểm đơn của  $P'$ .*

**2.1.20 Hệ quả.** Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0 và  $\deg(P) \leq \deg(Q)$ . Giả sử rằng tồn tại một không điểm  $c$  của  $P'$  sao cho  $P(c) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$ . Nếu tồn tại  $f, g \in \mathcal{V}(K)$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ , thì  $f$  và  $g$  là hàm hằng.

*Chứng minh.* Đặt  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$ . Giả sử rằng  $f$  và  $g$  không là hàm hằng. Khi đó theo Định lý 2.1.19 ta có

$$\tilde{N}(\rho, f) \geq T(\rho, f) \left( \frac{q-p}{\mathcal{X}_q^t} \right) + \log \rho + O(1) \geq \log \rho + O(1),$$

do đó  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \tilde{N}(\rho, f) = +\infty$ , điều này vô lý.  $\square$

Từ Định lý 2.1.19 ta cũng có ngay hệ quả sau đây.

**2.1.21 Hệ quả.** Giả sử  $P, Q$  là các đa thức một biến trên trường  $K$ ,  $P', Q'$  không đồng nhất bằng 0 và  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$  với  $2 \leq \min(p, q)$  và  $\frac{p}{2} < q$ . Giả sử tồn tại hai không điểm phân biệt  $c_1, c_2$  của  $P'$  sao cho  $P(c_1) \neq P(c_2)$  và  $P(c_i) \neq Q(d)$  với mọi không điểm  $d$  của  $Q'$  ( $i = 1, 2$ ). Giả sử rằng tồn tại hai hàm  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $P(f) = Q(g)$ . Khi đó  $f$  và  $g$  là các hàm hằng.

**2.1.22 Mệnh đề.** ([9]) Giả sử  $f, g \in \mathcal{V}(K) \setminus \{0\}$ . Nếu  $fg$  là một hàm hằng, thì cả  $f$  và  $g$  là hàm hằng. Giả sử  $f, g \in \mathcal{V}(d(a, r^-)) \setminus \{0\}$ . Nếu  $fg$  bị chặn, thì  $f$  và  $g$  cũng bị chặn.

**2.1.23 Định lý.** ([12]) Giả sử  $f \in \mathcal{V}(K)$ . Khi đó ba điều kiện sau là tương đương:

(i)  $f$  không có không điểm trong  $K$ .

(ii)  $f$  bị chặn trên  $K$ .

(iii)  $f$  là hàm hằng.

**2.1.24 Ký hiệu.** Cho đa thức  $P(x) = \sum_{j=1}^n a_j x^j \in K[x]$ . Với mỗi  $t \in \mathbb{N}$  ta ký hiệu  $P_t(x) = \sum_{j=1}^n \sqrt[t]{a_j x^j}$ .

**2.1.25 Mệnh đề.** ([5]) Giả sử  $\pi \neq 0$ ,  $r > 0$  và  $f \in \mathcal{U}(d(a, r^-))$  (tương ứng  $f \in \mathcal{U}(K)$ ). Khi đó  $\sqrt[t]{f}$  thuộc  $\mathcal{U}(d(a, r^-))$  (tương ứng thuộc  $\mathcal{U}(K)$ ) khi và

chỉ khi  $f' = 0$ . Hơn nữa, tồn tại duy nhất  $t \in \mathbb{N}$  sao cho  $\sqrt[t]{f} \in \mathcal{U}(d(a, r^-))$  và  $(\sqrt[t]{f})' \neq 0$ .

**2.1.26 Bổ đề.** Giả sử  $P, Q \in K[x]$  thỏa mãn  $P'Q' \neq 0$ . Giả sử  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  thỏa mãn  $P(f) = Q(g)$ . Khi đó  $v(f) = v(g)$  và  $P_t(\sqrt[t]{f}) = Q_t(\sqrt[t]{g})$ .

*Chứng minh.* Ta có  $f'P'(f) = g'Q'(g)$ . Do  $P'Q' \neq 0$  nên hoặc  $f' = g' = 0$ , hoặc  $f'g' \neq 0$ . Giả sử  $f' = g' = 0$ . Theo Mệnh đề 2.1.25 tồn tại  $f_1, g_1 \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $(f_1)^{\mathcal{X}} = f, (g_1)^{\mathcal{X}} = g$ . Khi đó, ta có  $P_1(f_1) = Q_1(g_1)$  và do đó ta chuyển sang vấn đề tương tự với  $f_1$  và  $g_1$ . Bằng cách quy nạp, sau  $t$  phép tính, cuối cùng ta thu được  $P_t(\sqrt[t]{f}) = Q_t(\sqrt[t]{g})$  với  $\sqrt[t]{f}, \sqrt[t]{g} \in \mathcal{U}(K)$ ,  $(\sqrt[t]{f})'(\sqrt[t]{g})' \neq 0$ , và  $t = v(f) = v(g)$ .  $\square$

**Chứng minh Định lý 2.1.9 và 2.1.19.** Trước tiên chúng ta giả sử rằng cả hai hàm  $f, g$  có chỉ số nhánh 0. Đặt  $w = \gcd(p, q)$  và  $p = w\bar{p}, q = w\bar{q}$ . Ta có thể giả thiết rằng  $a = 0$  và không có giá trị của hàm phân hình nào tại 0 bằng 0 hoặc  $\infty$ . Ta ký hiệu  $I$  (tương ứng  $J$ ) là khoảng  $[l; +\infty[$  (tương ứng  $[l, \log r[$ ) và biểu thị hàm  $\theta, \tau$  xác định trên  $I$  (tương ứng trên  $J$ ):  $\theta = \tau + O(1)$  nếu  $\theta - \tau$  bị chặn trên  $I$  (tương ứng trên  $J$ ). Ta có  $pT(\rho, f) = qT(\rho, g) + O(1)$ . Khi đó:

(1)  $\bar{p}T(\rho, f) = \bar{q}T(\rho, g) + O(1)$ . Giả sử  $b$  là một cực điểm của  $f$  bội  $k$ . Thế thì  $b$  là một cực điểm của  $g$  bội  $l$  sao cho  $k\bar{p} = l\bar{q}$ , do đó  $\bar{q}$  chia hết  $k$ , vì vậy

(2)  $N(\rho, f) \geq \tilde{q}N(\rho, f)$ . Vì  $c_i$  là một không điểm của  $P'$  nên  $P - P(c_i)$  có nhân tử có dạng  $(x - c_i)^{s_i}R_i(x)$  với  $R_i \in K[x]$ ,  $R_i(c_i) \neq 0$ . Do đó

(3)  $(f - c_i)^{s_i}R_i(f) = Q(g) - P(c_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Đặt  $S = \sum_{i=1}^k (s_i - 1)$ . Ta có  $s_i \geq 2, \forall i = 1, \dots, k$ , do đó  $S \geq k$ .

Theo giả thiết  $Q - P(c_i)$  không triệt tiêu tại bất kỳ không điểm nào của  $Q'$ , do đó  $Q - P(c_i)$  có nhân tử có dạng  $\prod_{j=1}^q (x - b_{i,j})$ , trong đó tất cả các  $b_{i,j}$  là phân biệt với mỗi  $i$  cố định. Điều này dẫn tới

(4)  $\tilde{Z}(\rho, Q - P(c_i)) = \sum_{j=1}^q \tilde{Z}(x - b_{i,j})$ , ( $i = 1, \dots, k$ ). Mặt khác, chúng ta chú ý rằng  $b_{i,j} \neq b_{m,n}$  với  $(i, j) \neq (m, n)$ . Thật vậy, giả sử rằng  $b_{i,j} = b_{m,n}$

với  $(i, j) \neq (m, n)$  nào đó. Thế thì  $i \neq m$ , do đó  $P(c_i) \neq P(c_m)$ , vì vậy  $(Q - P(c_i)) - (Q - P(c_m))$  là hàm hằng khác 0. Nhưng vì  $b_{i,j} = b_{m,n}$  nên  $b_{i,j}$  là một không điểm của  $(Q - P(c_i)) - (Q - P(c_m))$ , điều này vô lý. Như vậy, tất cả các điểm  $b_{i,j}$  là phân biệt ( $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, q$ ). Bây giờ, bằng cách áp dụng Định lý cơ bản thứ hai cho hàm  $g$  tại các điểm  $b_{i,j}$  với mọi  $i = 1, \dots, k$  và  $j = 1, \dots, q$ , ta có

$$(5) \quad (kq - 1)T(p, q) \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q \tilde{Z}(\rho, g - b_{i,j}) + \tilde{N}(\rho, g) + \log \rho + O(1). \text{ Do đó, theo (4) ta có}$$

$$(6) \quad (kq - 1)T(\rho, g) \leq \sum_{i=1}^k \tilde{Z}(\rho, Q - P(c_i)). \text{ Kết hợp (3) và (6) ta được}$$

(7)

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\rho, Q(g) - P(c_i)) &\leq \tilde{Z}(\rho, f - c_i) + \tilde{Z}(\rho, R_i(f)) + O(1) \\ &\leq (p - s_i + 1)T(\rho, f) + O(1) \\ &\leq (p - 1)T(\rho, f) + O(1), (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có  $\tilde{N}(\rho, g) = \tilde{N}(\rho, f)$ . Do đó từ (2) suy ra

$$\tilde{N}(\rho, g) = \tilde{N}(\rho, f) \leq \frac{1}{q}N(\rho, f) \leq \frac{1}{q}T(\rho, f).$$

Tiếp theo, kết hợp (5) và (7) ta có

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\rho, f) &\geq (kq - 1)T(\rho, g) - \sum_{i=1}^k \tilde{Z}(\rho, f - c_i) + \tilde{Z}(\rho, R_i(f)) + \log \rho + O(1) \\ &\geq (kq - 1)T(\rho, g) - T(\rho, f) \sum_{i=1}^k (1 + p - s_i) + \log \rho + O(1) \\ &= (kq - 1)T(\rho, g) - T(\rho, f)(kp - S) + \log \rho + O(1), \end{aligned}$$

do đó

$$(8) \quad \tilde{N}(\rho, f) \geq \left( \frac{Sq - p}{q} \right) T(\rho, f) + \log \rho + O(1). \text{ Vì } k \leq S \text{ nên}$$

$$\tilde{N}(\rho, f) \geq \frac{T(\rho, f)(kq - p)}{q} + O(1).$$

Bây giờ theo (1) ta có thể viết

$$(kq - 1)T(\rho, g) = \frac{kq - 1}{q}pT(\rho, f) + O(1).$$

Do đó, kết hợp (2), (5)-(7) ta thu được

$$(9) \quad \left( \frac{kq-1}{q} \right) pT(\rho, f) \leq \left( \sum_{i=1}^k (p-s_i+1) + \frac{1}{q} \right) T(\rho, f) - \log \rho + O(1).$$

Vì thế, với  $f, g$  thuộc  $\mathcal{U}_u(d(a, r^-))$  trong Định lý 2.1.9 và thuộc  $\mathcal{U}(K)$  trong Định lý 2.1.19, theo Định lý 2.1.5 từ (9) ta suy ra

$$(10) \quad (kq-1)p \leq qkp - q \sum_{i=1}^k s_i + qk + \omega. \text{ Từ đó ta có } (kq-1)\bar{p} \leq \bar{q}kp - \bar{q} \left( \sum_{i=1}^k s_i \right) + \bar{q}k + 1. \text{ Nhưng vì } \bar{q}p = \bar{p}q \text{ nên ta có } \sum_{i=1}^k (s_i-1)\bar{q} \leq \bar{p}+1. \text{ Điều này dẫn đến}$$

$$(11) \quad S\bar{q} \leq \bar{p}+1. \text{ Do đó, trong Định lý 2.1.9, theo (11) ta có } q \leq p \text{ hoặc } \bar{q} = \bar{p}+1, \text{ do đó } \gcd(p, q) = q-p \text{ và } S = 1 = k.$$

Trong Định lý 2.1.19, cả  $f$  và  $g$  đều thuộc  $\mathcal{U}(K)$ . Theo (8) ta có  $\tilde{N}(\rho, f) \geq \left( \frac{kq-p}{q} \right) T(\rho, f) + \log \rho + O(1)$ . Hơn nữa, theo (9) ta có được

$$\left( \frac{kq-1}{q} \right) p < \sum_{i=1}^k (p-s_i+1) + \frac{1}{q}, \text{ do đó } S\bar{q} < \bar{p}+1, \text{ nghĩa là}$$

$$(12) \quad S\bar{q} \leq \bar{p}. \text{ Như vậy, trong Định lý 2.1.19, theo (12) ta có } q \leq p.$$

Bây giờ ta giả sử rằng giả thiết của Định lý 2.1.9 được thỏa mãn và  $p < \frac{3q}{2}$ . Thế thì  $\bar{p} < \frac{3\bar{q}}{2}$  trong Định lý 2.1.9. Do đó theo (11) ta có được

$$(13) \quad \frac{2}{3}S\bar{p} < \bar{p}+1, \text{ do đó } S \leq 2. \text{ Giả sử } S = 2. \text{ Khi đó theo (13) ta có } \bar{p} = 1 \text{ hoặc } 2. \text{ Nếu } \bar{p} = 2, \text{ thế thì do } S\bar{p} < \bar{p}+1 \text{ và } \gcd(\bar{p}, \bar{q}) = 1 \text{ nên ta có } \bar{q} = 1, \text{ điều này mâu thuẫn với giả thiết } p \leq \frac{3q}{2}. \text{ Như vậy, } \bar{p} = 1, \text{ và } p = q = 1. \text{ Do đó, nếu } p \neq q \text{ thì } S = 1, k = 1, s_1 = 2 \text{ và } c_1 \text{ là một không điểm đơn của } P'. \text{ Điều này hoàn thành phép chứng minh Định lý 2.1.9.}$$

Bây giờ, trong Định lý 2.1.19, giả sử  $\frac{p}{2} < q$ , thế thì theo (12) ta có  $S \geq 2$  không thể xảy ra, do đó  $S = k = 1$ . Vì vậy  $c_1$  là không điểm đơn của  $P'$ .

Bây giờ chúng ta xem xét trường hợp tổng quát khi chỉ số nhánh của một trong hai hàm  $f, g$  không bằng 0. Theo Bổ đề 2.1.26 thì  $f$  và  $g$  có cùng chỉ số nhánh  $t$  và thỏa mãn  $P_t(\sqrt[t]{f}) = Q_t(\sqrt[t]{g})$ . Hơn nữa, ta có mọi giả thiết về bậc của  $P_t, Q_t$  đều thỏa mãn. Đặt  $f_{(t)} = \sqrt[t]{f}, g_{(t)} = \sqrt[t]{g}$ , ta có  $\tilde{N}(\rho, f_{(t)}) \geq \frac{T(\rho, f_{(t)})(kq-p)}{q} + O(1)$ . Do  $\tilde{N}(\rho, f_{(t)}) = \tilde{N}(\rho, f)$  và  $T(\rho, f_{(t)}) = \frac{T(\rho, f)}{\mathcal{X}^t}$  nên  $\tilde{N}(\rho, f_{(t)}) \geq \frac{T(\rho, f_{(t)})(kq-p)}{\mathcal{X}^t q} + O(1)$ . Trong trường



hợp  $\frac{2p}{3} < q$ , ta có tất cả các phát biểu cho  $k, p, q$  đúng với  $P_t, Q_t$  và cũng đúng với  $P, Q$ .  $\square$

## 2.2 Phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ trong trường hợp $Q$ tỷ lệ với $P$

Trong mục này chúng tôi trình bày một số điều kiện đặc trưng cho sự tồn tại nghiệm hàm phân hình khác hằng của phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$  trong trường hợp đa thức  $Q$  tỷ lệ với đa thức  $P$ .

**2.2.1 Định nghĩa.** Một tập con  $S$  của  $K$  được gọi là *tập cứng affin* nếu không tồn tại phép biến đổi affin  $\phi$  của  $K$  khác phép đồng nhất sao cho  $\phi(S) = S$ .

**2.2.2 Định nghĩa.** Một đa thức  $P \in K[x]$  được gọi là *thỏa mãn Điều kiện (F)* nếu với bất kì hai không điểm phân biệt  $a, b$  của  $P'$  ta có  $P(a) \neq P(b)$  (tức là  $P$  đơn ánh trên tập các không điểm của  $P'$ ).

**2.2.3 Mệnh đề.** ([14]) *Giả sử  $S$  là tập con của  $K$  gồm bốn phần tử. Khi đó hai điều kiện sau đây là tương đương:*

- (i) *Tập hợp  $S$  không là tập cứng affin;*
- (ii) *Hoặc tập  $S$  có dạng  $\{a, a + u, a + \omega u, a + \omega^2 u\}$ , với  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , hoặc  $S$  có dạng  $\{a - h, a + h, a - k, a + k\}$ , với  $h, k \in K^*$ .*

**2.2.4 Bổ đề.** *Giả sử  $\pi \neq 2$ ,  $P \in K[x]$  có bậc 4 và  $P$  không thỏa mãn Điều kiện (F). Khi đó  $P'$  có ba không điểm phân biệt.*

*Chứng minh.* Vì  $\pi \neq 2$  nên  $P$  không thể có không điểm bội 3. Giả sử  $P$  chỉ có hai không điểm phân biệt và  $P'$  có dạng  $\lambda(x^3 - bx^2)$ . Nếu  $\pi = 3$  ta có  $b = 0$ . Nếu  $\pi \neq 3$ , thế thì vì  $P$  không thỏa mãn Điều kiện (F) nên ta có  $b = 0$ . Như vậy  $P'$  có không điểm bội 3, điều này vô lý.  $\square$

**2.2.5 Mệnh đề.** *Giả sử  $\pi \neq 2$  và cho  $P$  là đa thức một biến trên trường  $K$  với hệ tử cao nhất bằng 1 và  $\deg(P) = 4$ . Khi đó ba phát biểu sau đây là tương đương:*

- (i)  $P$  không thỏa mãn Điều kiện (F).
- (ii)  $P$  có dạng  $[(x - a + l)(x - a - l)]^2 + A$  với  $A \in K, l \in K^*$ .
- (iii) Tồn tại một phép đổi biến biến đổi  $P$  thành một hàm chẵn.

*Chứng minh.* Theo giả thiết  $\pi \neq 2$  và bằng cách đặt  $t = x - a$  ta có (ii) kéo theo (iii) và (iii) kéo theo (i). Giả sử rằng (i) được thỏa mãn, tức là  $P$  không thỏa mãn Điều kiện (F). Theo Bổ đề 2.2.4 ta có  $P'$  có ba không điểm phân biệt. Giả sử  $P(c_3) = P(c_2) = P(c_1)$ . Khi đó  $P - P(c_1)$  có ba không điểm phân biệt có bội  $\geq 2$ , điều này mâu thuẫn với giả thiết  $\deg(P) = 4$ . Do đó, ta có thể giả thiết  $P(c_3) \neq P(c_1)$ . Đặt  $a = \frac{c_1 + c_2}{2}, c_1 = a + l, c_2 = a - l$ . Thế thì  $P$  có dạng  $[(x - a + l)(x - a - l)]^2 + P(c_1)$ , với  $P(c_1) \neq 0$ . Hơn nữa, vì  $P'$  có ba không điểm phân biệt nên ta có  $l \neq 0$ , hay (ii) được thỏa mãn.  $\square$

Từ Mệnh đề 2.2.5 ta có được hệ quả sau đây.

**2.2.6 Hệ quả.** *Giả sử  $\pi \neq 2, P \in K[x], \deg(P) = 4$  và tập các không điểm của  $P$  là tập cứng afin. Khi đó  $P$  thỏa mãn Điều kiện (F).*

**2.2.7 Định lý.** *Giả sử  $P$  là đa thức một biến trên trường  $K$  có bậc  $n$ , không có không điểm bội và  $P$  thỏa mãn Điều kiện (F). Giả sử  $P'(x) = b \prod_{j=1}^l (x - c_j)^{m_j}$ , với  $c_i \neq c_j \forall i \neq j$ . Ký hiệu  $S$  là tập hợp các không điểm của  $P$ . Hơn nữa, nếu  $\pi \neq 0$ , ta giả thiết rằng số bội của nhân tử  $(x - b_j)$  trong  $P(x) - P(c_j)$  là  $m_j + 1, \forall j = 1, \dots, l$ , và nếu  $\pi$  chia hết  $n$ , ta cũng giả thiết rằng hệ số của  $x^{n-1}$  trong  $P$  khác 0.*

*Khi đó không tồn tại  $\lambda \in K$  và các hàm khác hằng phân biệt  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $P(f) = \lambda P(g)$  khi và chỉ khi  $S$  là tập cứng afin và  $P$  thỏa mãn một trong ba điều kiện sau đây:*

- (i)  $l \geq 2, \pi$  chia hết  $n$ ;
- (ii)  $l = 2, \min(m_1, m_2) \geq 2$ ;
- (iii)  $l \geq 3$  và  $P$  không thỏa mãn các điều kiện  $n = 4, m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ,  
 $\frac{P(c_1)}{P(c_2)} = \frac{P(c_2)}{P(c_3)} = \frac{P(c_3)}{P(c_1)} = \omega$ , trong đó  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ .

Hơn nữa, khi  $\lambda = 1$ , không tồn tại các hàm khác hằng khác biệt  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  thỏa mãn  $P(f) = P(g)$  khi và chỉ khi  $(n-2)(n-3) > \sum_{j=1}^l m_j(m_j-1)$ .

**2.2.8 Định lý.** Giả sử  $\pi \neq 2$ ,  $P$  là đa thức một biến trên trường  $K$  có bậc 4 và bốn không điểm phân biệt. Ký hiệu  $S$  là tập hợp các không điểm của  $P$ . Khi đó, không tồn tại  $\lambda \in K$  và các hàm khác hằng phân biệt  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $P(f) = \lambda P(g)$  khi và chỉ khi  $P$  thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

- (i)  $S$  là tập cứng affin;
- (ii)  $P'$  có ba không điểm phân biệt  $c_1, c_2, c_3$ ;
- (iii)  $P$  không thỏa mãn đẳng thức  $\frac{P(c_1)}{P(c_2)} = \frac{P(c_2)}{P(c_3)} = \frac{P(c_3)}{P(c_1)} = \theta$ , trong đó  $\theta^2 + \theta + 1 = 0$ .

*Chứng minh.* Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng  $P$  là đa thức có hệ tử cao nhất bằng 1. Trước tiên, chúng ta lưu ý rằng nếu  $n = 4$ , thì điều kiện  $l = 2$ ,  $\min(l_1, l_2) \geq 2$  trong Định lý 2.2.7 không được thỏa mãn. Vì  $\pi \neq 2$ , ta viết  $P'(x) = b \prod_{j=1}^l (x - c_j)^{m_j}$  với số bội của mỗi nhân tử  $x - c_j$  trong  $P(x) - P(c_j)$  là  $m_j + 1$ . Hơn nữa,  $\pi$  không chia hết  $n$ . Do đó, theo Định lý 2.2.7 ta chỉ cần chứng minh rằng  $S$  là tập cứng affin và nếu  $P'$  có ba không điểm phân biệt không thỏa mãn  $P(c_2) = \lambda P(c_1), P(c_3) = \lambda P(c_2), P(c_1) = \lambda P(c_3)$ , với  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ , thì không tồn tại  $f, g \in \mathcal{U}(K), f \neq g$  sao cho  $P(f) = \lambda P(g)$ . Theo Hệ quả 2.2.6 ta có  $P$  thỏa mãn Điều kiện (F). Vì vậy theo Định lý 2.2.7 không tồn tại  $f, g \in \mathcal{U}(K), f \neq g$  sao cho  $P(f) = \lambda P(g)$ .  $\square$

**2.2.9 Định lý.** Giả sử  $\pi \neq 2$ ,  $P$  là đa thức một biến trên trường  $K$  có bậc 4 và bốn không điểm phân biệt. Khi đó không tồn tại  $\lambda \in K$  và các hàm khác hằng phân biệt  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $P(f) = \lambda P(g)$  khi và chỉ khi  $P$  thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

- (i)  $P$  thỏa mãn Điều kiện (F);
- (ii)  $P'$  có ba không điểm  $c_1, c_2, c_3$ ;
- (iii)  $P$  không thỏa mãn đẳng thức  $\frac{P(c_1)}{P(c_2)} = \frac{P(c_2)}{P(c_3)} = \frac{P(c_3)}{P(c_1)} = \theta$ , với  $\theta^2 + \theta + 1 = 0$ .

*Chứng minh.* Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng  $P$  là đa thức có hệ tử cao nhất bằng 1. Theo Định lý 2.2.8, ta chỉ cần chứng minh rằng nếu  $P$  thỏa mãn Điều kiện (F) hay  $P'$  có ba không điểm phân biệt  $a, b, c$  và  $P$  không thỏa mãn đẳng thức  $\frac{P(a)}{P(b)} = \frac{P(b)}{P(c)} = \omega$ , với  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , thì tập  $S$  gồm các không điểm của  $P$  là tập cứng afin. Thật vậy, giả sử  $S$  không là tập cứng afin. Theo Mệnh đề 2.2.3 thì hoặc tập  $S$  có dạng  $\{a, a+u, a+\omega u, a+\omega^2 u\}$ , với  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , hoặc  $S$  có dạng  $\{a-h, a+h, a-k, a+k\}$ , với  $h, k \in K^*$ . Nhưng nếu  $S$  có dạng  $\{a-h, a+h, a-k, a+k\}$  với  $h, k \in K^*$ , thì  $P$  có dạng  $[(x-a)^2 - l^2]^2 + A$ , và do đó, theo Mệnh đề 2.2.5 ta có  $P$  không thỏa mãn Điều kiện (F). Vậy thì,  $S$  có dạng  $\{a, a+u, a+\omega u, a+\omega^2 u\}$ , với  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , hay  $P$  có dạng  $(x-a)^4 - \alpha(x-a)$ , với  $\alpha \in K$ , và do đó  $P' = 4(x-a)^3 - \alpha$ . Vì vậy, lấy  $\mu \in K$  sao cho  $\mu^3 = \frac{\alpha}{4}$  và  $\omega$  thỏa mãn  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , ta có các không điểm của  $P'$  là  $c_1 = \mu, c_2 = \omega\mu, c_3 = \omega^2\mu$ , do đó  $\frac{P(c_2)}{P(c_1)} = \frac{P(c_3)}{P(c_2)} = \frac{P(c_1)}{P(c_3)} = \omega$ , bị loại theo giả thiết. Điều này chứng tỏ rằng  $S$  là một tập cứng afin. Định lý được chứng minh.  $\square$

Tiếp theo chúng tôi trình bày một số điều kiện đặc trưng cho sự tồn tại nghiệm hàm phân hình khác hằng của phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$  trong trường hợp đa thức  $Q$  tỷ lệ với đa thức  $P$ .

**2.2.10 Định lý.** *Giả sử  $\pi \neq 2$ ,  $P$  là đa thức một biến trên trường  $K$  có bậc 4 và  $\lambda \in K$ . Khi đó, tồn tại các hàm phân hình khác hằng phân biệt  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $P(f) = \lambda P(g)$  với  $\lambda \in K$  khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau thỏa mãn:*

- (i)  $P$  có một không điểm bội  $\geq 3, \lambda \in K^*$ ;
- (ii)  $\lambda = 1$  và tồn tại hai không điểm phân biệt  $c_1, c_2$  của  $P'$  sao cho  $P(c_1) = P(c_2)$ ;
- (iii)  $\lambda = -1$  và tồn tại ba không điểm phân biệt  $c_1, c_2, c_3$  của  $P'$  sao cho  $P(c_1) = P(c_3) = -P(c_2)$ ;
- (iv)  $\lambda = 1$  và  $P'$  có một không điểm bội  $\geq 2$ ;

(v)  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$  và ba không điểm  $c_1, c_2, c_3$  của  $P'$  thỏa mãn điều kiện

$$\frac{P(c_1)}{P(c_2)} = \frac{P(c_2)}{P(c_3)} = \frac{P(c_3)}{P(c_1)} = \lambda.$$

Để chứng minh Định lý 2.2.10, ta cần có các bổ đề sau đây.

**2.2.11 Bổ đề.** ([10]) Giả sử  $\pi \neq 2$  và  $P = [(x-a)^2 - l^2]^2 + A$ , với  $a, A \in K$ ,  $l \in K^*$ . Khi đó  $P'$  có ba không điểm phân biệt  $c_1, c_2$  và  $c_3$  thỏa mãn  $P(c_1) = P(c_3)$ . Hơn nữa,  $P(c_1) = -P(c_2)$  khi và chỉ khi  $A = -\frac{l^4}{2}$ .

**2.2.12 Bổ đề.** ([14]) Giả sử  $P$  là đa thức một biến trên trường  $K$  với hệ tử cao nhất bằng 1,  $\deg(P) = 4$  và  $P$  có bốn không điểm phân biệt. Khi đó

(i)  $P'$  chỉ có hai không điểm phân biệt khi và chỉ khi  $P$  có dạng  $(x-a)^4 - \theta(x-a)^3 + B$ , với  $\theta, B \in K$ .

(ii)  $P'$  có đúng một không điểm khi và chỉ khi  $P$  có dạng  $(x-a)^4 + k$ .

Hơn nữa, nếu  $P'$  có đúng hai không điểm phân biệt thì tồn tại  $f, g \in K(t)$  với  $f \neq g$  sao cho  $P(f) = P(g)$ .

**2.2.13 Bổ đề.** Giả sử  $P \in K[x]$ ,  $\deg(P) = 4$ ,  $\lambda \in K$  và  $\Gamma$  là đường cong xác định bởi phương trình  $P(x) - \lambda P(y) = 0$ . Nếu  $\Gamma$  có ít nhất ba điểm kỳ dị và  $\lambda \neq 1$ , thì tồn tại  $f, g \in K(t) \setminus K$ ,  $f \neq g$  sao cho  $P(f) - \lambda P(g) = 0$ .

*Chứng minh.* Nếu  $\Gamma$  là bất khả quy, thì  $\Gamma$  có giống bằng 0, do đó ta có được điều phải chứng minh. Nếu  $\Gamma$  không bất khả quy thì  $P(x) - \lambda P(y)$  có sự phân tích dưới dạng  $G(x, y)H(x, y)$ , với  $1 \leq \deg(G) \leq 2$  và  $2 \leq \deg(H) \leq 3$ ,  $G$  bất khả quy. Khi đó đường cong xác định bởi phương trình  $G(x, y) = 0$  có giống 0, vì vậy tồn tại  $f, g \in K(t)$  sao cho  $G(f(t), g(t)) = 0, \forall t \in K$ .  $\square$

**2.2.14 Định lý.** ([8]) Giả sử  $\Gamma$  là đường cong bất khả quy trên  $K$  có giống  $\geq 1$ , xác định bởi phương trình  $F(x, y) = 0$ . Khi đó, không tồn tại  $f, g \in \mathcal{U}(K) \setminus K$  sao cho  $F(f(t), g(t))$  đồng nhất bằng 0.

**2.2.15 Bổ đề.** Giả sử  $F \in K[x, y]$  là đa thức bậc 4 và  $\Gamma$  là đường cong xác định bởi phương trình  $F(x, y) = 0$ . Nếu  $\Gamma$  có nhiều nhất một hoặc hai điểm kỳ dị bội một thì không tồn tại  $f, g \in K(t) \setminus K$  sao cho  $F(f, g) = 0$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $X_1, \dots, X_k$  là các điểm kỳ dị của  $\Gamma$  và với mỗi  $j = 1, \dots, k$ , giả sử  $q_j$  là số bội của  $X_j$ . Nếu  $\Gamma$  không bất khả quy thì ta có  $\sum_{j=1}^k q_j \geq 3$ , vì  $\Gamma$  là hợp của hai đường bậc hai hoặc  $\Gamma$  là hợp của một đường bậc ba và một đường thẳng, hoặc  $\Gamma$  là hợp của một đường bậc hai và hai đường thẳng, hoặc  $\Gamma$  là hợp của bốn đường thẳng. Vì vậy từ Định lý 2.2.14 ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**2.2.16 Bổ đề.** ([10]) *Giả sử  $P \in K[x]$ ,  $\lambda \in K \setminus \{1\}$  và  $f, g \in \mathcal{U}(K) \setminus K$  thỏa mãn  $P(f) = \lambda P(g)$ . Khi đó  $f \neq g$ .*

*Chứng minh Định lý 2.2.10.* Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng đa thức  $P$  có hệ tử cao nhất bằng 1. Trong toàn bộ phép chứng minh, với  $\lambda \in K$ , ta ký hiệu  $F_\lambda(x, y)$  là đa thức  $P(x) - \lambda P(y)$  và  $\Gamma_\lambda$  là đường cong xác định bởi phương trình  $F_\lambda(x, y) = 0$ .

Đầu tiên ta sẽ chứng tỏ rằng tồn tại hai hàm phân biệt  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $P(f) = \lambda P(g)$  trong mỗi trường hợp được mô tả trong (i)-(v).

Trước hết ta xem xét trường hợp (i). Qua một phép đổi biến, không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng  $P$  có dạng  $x^4$  hoặc  $P$  có dạng  $x^4 - 4ax^3$ . Nếu  $P$  có dạng  $x^4$  thì với mỗi  $\lambda \in K^*$ , ta tìm được  $f, g \in K(t)$  sao cho  $f^4 = \lambda g^4$ . Bây giờ, giả sử rằng  $P$  có dạng  $x^4 - ax^3$ . Khi đó  $\Gamma_\lambda$  nhận  $(0, 0)$  làm điểm kỳ dị bội 2, do đó  $\Gamma_\lambda$  chứa một đường cong bất khả quy giống 0, vì vậy tồn tại  $f, g \in K(t)$  sao cho  $P(f) = P(g)$ . Nếu  $\lambda \neq 1$  thì theo Bổ đề 2.2.16 ta có  $f \neq g$ . Nếu  $\lambda = 1$  thì  $F_1(x, y)$  phân tích được dưới dạng  $(x - y)G(x, y)$ , trong đó  $\deg(G) = 1$  và  $(0, 0)$  là một điểm kỳ dị của đường cong xác định bởi phương trình  $G(x, y) = 0$  có giống bằng 0. Vì vậy tồn tại  $f, g \in K(t)$ , sao cho  $G(f, g) = 0$ . Khi đó ta có  $f \neq g$  vì  $G(x, x)$  không đồng nhất bằng 0. Như vậy, trong mỗi trường hợp của điều kiện (i), tồn tại  $f, g \in K(t)$ ,  $f \neq g$  sao cho  $G(f, g) = 0$ , với  $\lambda \in K^*$ .

Bây giờ ta xét trường hợp (ii). Ta giả sử tồn tại hai không điểm phân biệt  $c_1, c_2$  của  $P'$  sao cho  $P(c_1) = P(c_2)$ . Khi đó, theo Mệnh đề 2.2.5, đa thức  $P$  có dạng  $[(x - a)^2 - l^2]^2 + A$  với  $a, A \in K, l \in K^*$ . Đặt  $x = a + t$  và  $U(t) = P(a + t)$ , ta có  $U(t) = (t^2 - l^2)^2 + A$ . Do đó, với mỗi  $\phi \in \mathcal{U}(K)$ , ta có  $U(\phi) = U(-\phi)$ , vì vậy  $P(\phi + a) = P(-\phi + a)$ . Như vậy nếu (ii) thỏa mãn thì tồn tại  $f, g \in K(t)$ ,  $f \neq g$  sao cho  $P(f) = P(g)$ .

Với trường hợp (iii), ta giả sử tồn tại ba không điểm phân biệt  $c_1, c_2, c_3$  của  $P'$  sao cho  $P(c_1) = P(c_3) = -P(c_2)$ . Theo Mệnh đề 2.2.5 và Bổ đề 2.2.11 thì  $P$  có dạng  $[(x-a)^2 - l^2]^2 - \frac{l^4}{2}$ , với  $a \in K, l \in K^*$ . Ta lại đặt  $U(t) = P(a+t)$ , thế thì đường cong  $\Delta$  xác định bởi phương trình  $U(x) + U(y) = 0$  chứa bốn điểm kỳ dị bội 1:  $(l, 0), (-l, 0), (0, l), (0, -l)$ . Tương tự, đường cong xác định bởi phương trình  $F_{-1}(x, y) = 0$  chứa bốn điểm kỳ dị bội 1. Khi đó theo Bổ đề 2.2.13 tồn tại  $f, g \in K(t) \setminus K$  sao cho  $P(f) + P(g) = 0$ . Vì vậy theo Bổ đề 2.2.16 ta có  $f \neq g$ .

Với trường hợp (iv), giả sử  $P'$  có một không điểm  $c_j$  bội  $\geq 2$ . Trước tiên ta giả sử rằng  $P'$  có một không điểm bội 3, thế thì  $P$  có dạng  $(x-a)^4 + A$ . Khi  $\lambda = 1$ , ta xét phương trình  $(f-a)^4 = (g-a)^4$ . Đây chính là trường hợp ta đã xét trong điều kiện (i). Bây giờ giả sử rằng  $P'$  có hai không điểm phân biệt  $c_j$  bội  $j$  ( $j = 1, 2$ ). Khi đó theo Bổ đề 2.2.12 tồn tại  $f, g \in K(t)$ , với  $f \neq g$  thỏa mãn  $P(f) = P(g)$ .

Cuối cùng, ta xem xét trường hợp (v). Giả sử rằng ba không điểm  $c_1, c_2, c_3$  của  $P'$  thỏa mãn  $\frac{P(c_1)}{P(c_2)} = \frac{P(c_2)}{P(c_3)} = \frac{P(c_3)}{P(c_1)} = \lambda$  với  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ . Ba điểm  $(c_1, c_2), (c_2, c_3), (c_3, c_1)$  là các điểm kỳ dị của  $\Gamma_\lambda$ , do đó theo Bổ đề 2.2.13, tồn tại  $f, g \in K(t)$ , thỏa mãn  $P(f) = \lambda P(g)$ . Vì  $\lambda \neq 1$  nên theo Bổ đề 2.2.16 ta có  $f \neq g$ .

Như vậy ta đã kiểm tra được rằng trong mỗi trường hợp (i)-(v) tồn tại hai hàm phân biệt  $f, g \in K(t) \setminus K$  thỏa mãn  $P(f) = \lambda P(g)$ .

Ngược lại, ta giả sử rằng tồn tại  $f, g \in \mathcal{U}(K)$ , với  $f \neq g$  sao cho  $P(f) = \lambda P(g)$ .

Đầu tiên ta giả sử rằng  $P'$  có một không điểm bội 3. Không mất tính tổng quát, bằng cách đổi biến ta có thể giả thiết rằng  $P = x^4 + A$ , với  $A \in K$ . Nếu  $A = 0$ , ta có trường hợp (i). Bây giờ giả sử rằng  $A \neq 0$ , khi đó  $\Gamma_\lambda$  không có điểm kỳ dị khi  $\lambda \neq 1$ . Vì thế, theo Bổ đề 2.2.15 không tồn tại  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  sao cho  $F_\lambda(f, g) = 0$ . Như vậy  $\lambda = 1$  và ta có trường hợp (iv).

Bây giờ ta giả sử rằng  $P'$  có hai không điểm phân biệt  $c_j$  với bội  $j$  tương ứng ( $j = 1, 2$ ). Không mất tính tổng quát, bằng cách đổi biến ta có thể giả sử rằng  $P$  có dạng  $x^4 - 4ax^3 + A$ . Thế thì các không điểm của  $P'$  là 0 bội 2 và  $3a$  bội 1. Nếu  $A = 0$  thì ta có trường hợp (i). Bây giờ, giả sử  $A \neq 0$ . Nếu

$\lambda = 1$ , ta có trường hợp (iv). Tiếp theo, giả sử  $\lambda \neq 1$ . Khi đó  $\Gamma_\lambda$  chỉ có các điểm kỳ dị là  $(0, 3a)$ ,  $(3a, 0)$  khi và chỉ khi  $F_\lambda(0, 3a) = F_\lambda(3a, 0) = 0$ , tức là  $A = P(c_1) = \frac{27\lambda a^4}{\lambda - 1}$ , hoặc  $(3a, 3a)$  khi và chỉ khi  $F_\lambda(3a, 3a) = 0$ , tức là  $A = -27a^4$ .

Nếu  $A = -27a^4$  thì điểm kỳ dị có bội 1. Nếu  $A = P(c_1) = \frac{27\lambda a^4}{3(\lambda - 1)}$ , thì cả hai điểm kỳ dị  $(0, 3a)$  và  $(3a, 0)$  đều có bội 1. Như vậy, trong cả hai trường hợp, theo Bổ đề 2.2.15 không tồn tại  $f, g \in \mathcal{U}(K) \setminus K$  sao cho  $F_\lambda(f, g) = 0$ .

Bây giờ, ta giả sử rằng  $P'$  có ba không điểm phân biệt  $c_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Mỗi điểm kỳ dị của  $\Gamma_\lambda$  có bội 1 và có dạng  $(c_i, c_j)$ . Hơn nữa, nếu  $\Gamma_\lambda$  có một hoặc hai điểm kỳ dị, thì theo Bổ đề 2.2.15 không tồn tại  $f, g \in \mathcal{U}(K)$  thỏa mãn  $F_\lambda(f, g) = 0$ . Như vậy, có ba điểm kỳ dị  $(c_i, c_j)$  của  $\Gamma_\lambda$ , và mỗi điểm như thế thỏa mãn  $P(c_i) = \lambda P(c_j)$ . Do đó, hoặc ta có  $P(c_1) = \lambda P(c_2)$ ,  $P(c_3) = \lambda P(c_2)$  và vì vậy  $P(c_3) = P(c_1)$ , hoặc ta có  $P(c_2) = \lambda P(c_1)$ ,  $P(c_3) = \lambda P(c_2)$ . Ta chú ý rằng vì  $\deg(P) = 4$  nên trường hợp  $P(c_j) = 0 \forall j$  không xảy ra, do đó  $P(c_j) \neq 0, \forall j = 1, 2, 3$ . Nếu  $\lambda = 1$ , ta có trường hợp (ii). Nếu  $\lambda = -1$  thì  $P(c_1) = P(c_3) = -P(c_2)$ , ta có trường hợp (iii).

Bây giờ giả sử  $\lambda^2 \neq 1$ . Khi đó

$$\lambda = \frac{P(c_1)}{P(c_2)} = \frac{P(c_2)}{P(c_3)} = \frac{P(c_3)}{P(c_1)}$$

với  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$  và ta có trường hợp (v). Vậy Định lý 2.2.10 được chứng minh.  $\square$



## KẾT LUẬN

Trên cơ sở tham khảo các tài liệu, trong luận văn này chúng tôi đã tập trung tìm hiểu và trình bày những nội dung sau đây:

1. Đa tạp trong không gian afin và không gian xạ ảnh, đường cong trong mặt phẳng afin, trường định chuẩn với giá trị tuyệt đối không Acsimet.
2. Một số điều kiện đủ để phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$  không có nghiệm hàm phân hình khác hằng (Định lý 2.1.9, Định lý 2.1.19, Hệ quả 2.1.20, Hệ quả 2.1.21).
3. Một số điều kiện đặc trưng cho sự tồn tại nghiệm hàm phân hình khác hằng của phương trình hàm  $P(f) = Q(g)$  trong trường hợp đa thức  $Q$  tỷ lệ với đa thức  $P$  (Định lý 2.2.7, Định lý 2.2.8, Định lý 2.2.9, Định lý 2.2.10).

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

## TIẾNG VIỆT

- [1] Ngô Việt Trung (2012), *Nhập môn Đại số giao hoán và Hình học đại số*, Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và công nghệ.
- [2] Trần Thanh Trung (2020), *Đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm nguyên*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.
- [3] Đồng Anh Tú (2020), *Tập xác định duy nhất cho họ các hàm nguyên*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.

## TIẾNG ANH

- [4] V. Berkovich (1990), *Spectral Theory and Analytic Geometry over non-Archimedean Fields*, AMS surveys and Monographs, 33.
- [5] A. Boutabaa, A. Escassut (2000), Applications of the  $p$ -adic Nevanlinna theory to functional equations, *Ann.Inst.Fourier*, 50(3), 751-766.
- [6] A. Boutabaa, A. Escassut (2001), *Nevanlinna Theory in characteristic  $p$  and applications*, Analysis and Applications, Proceedings of the Third ISAAC congress, Kluwer, Dordrecht, 97-107.
- [7] A. Boutabaa, A. Escassut (2001), *Urs and Ursims for  $p$ -adic Mero-morphic Functions inside a disk*, Proceeding of the Edingburgh Mathematical Society, 44, 485-504.
- [8] W. Cherry (1994), Non-Archimedean analytic curves in Abelian varieties, *Math. Ann.*, 300, 396-404.
- [9] A. Escassut (1995), *Analytic Elements in  $p$ -adic Analysis*, World Scientific Publishing Co. Pvt. Ltd, Singapore.
- [10] A. Escassut, L. Haddad, R. Vidal, Urs (1999), Ursim and nonurs for  $p$ -adic Functions and Polynomials, *J. Number Theory*, 75, 133-144.

- [11] A. Escassut and C. C. Yang (2004), The functional equation  $P(f) = Q(g)$  in a  $p$ -adic field, *J. Number Theory*, 105, 344-360.
- [12] W. Fulton (1969), *Algebraic Curves, An Introduction to Algebraic Geometry*, W. Benjamin Inc., New-York.
- [13] P. C. Hu, C. C. Yang (2000), *Meromorphic Functions over non-Archimedean Fields*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [14] X. H. Hua, C. C. Yang (1997), Unique polynomials of entire and meromorphic functions, *Mat. Fiz. Analis Geometriye*, 4(3), 391-398.
- [15] J. T. -Y. Wang (2002), Uniqueness polynomials and bi-unique range sets for rational functions and non-Archimedean meromorphic functions, *Acta Arith.*, 104, 183-200.