

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

LÊ THỊ PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

SỐ BETTI THỨ HAI CỦA MỘT SỐ
ĐẠI SỐ LIE LŨY LINH KIỂU JORDAN

Nghệ An – 2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

LÊ THỊ PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

SỐ BETTI THỨ HAI CỦA MỘT SỐ
ĐẠI SỐ LIE LŨY LINH KIỂU JORDAN

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
MÃ SỐ: 8.46.01.04

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN QUỐC THƠ

Nghệ An – 2021

Mục lục

Mở đầu	2
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.	6
1.1. Dạng chuẩn Jordan của ma trận lũy linh	6
1.2. Đại số Lie toàn phương	9
1.3. Đối đồng điều của đại số Lie toàn phương	12
Chương 2. Số Betti thứ hai của một số đại số Lie lũy linh kiểu Jordan.	14
2.1. Đại số Lie lũy linh kiểu Jordan	14
2.2. Số Betti của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_{2n}	15
2.2.1. Đối đồng điều thứ hai của $j_4(n=2)$	15
2.2.2. Đối đồng điều thứ hai của j_{2n} với $n > 2$	15
2.3. Số Betti của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_{2n+1}	20
2.3.1. Đối đồng điều thứ hai của $j_3(n=1)$	20
2.3.2. Đối đồng điều thứ hai của j_{2n+1} với $n \geq 2$	20
Tài liệu tham khảo	24

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Đại số Lie toàn phương là một đối tượng đại số xuất hiện trong thời gian gần đây và đã được nghiên cứu ở nhiều khía cạnh khác nhau. Xét về mặt cấu trúc, một đại số Lie toàn phương là kiểu tổng quát của đại số Lie nửa đơn, ở đó dạng Killing sẽ tổng quát thành dạng song tuyến tính đối xứng, bất biến và không suy biến. Khi tồn tại một song tuyến tính như thế, mọi đại số Lie toàn phương đều có thể tách thành tổng trực tiếp trực giao của các ideal không suy biến hoặc là tổng trực tiếp trực giao của một ideal tâm không suy biến và một ideal có tâm đẳng cự toàn bộ (xem [2], [5], [8]). Xét về mặt xây dựng, một đại số Lie toàn phương có thể coi như là mở rộng kép của một đại số Lie toàn phương khác có số chiều nhỏ hơn bởi những đạo hàm phản xứng (xem [6], [7]) hoặc trong trường hợp đại số Lie giải được có số chiều chẵn thì nó được xây dựng từ một mở rộng T^* của một đại số Lie bởi một đối chu trình cyclic (xem [2]).

Đối với đại số Lie, mô tả các nhóm đối đồng điều của nó là một trong những bài toán nghiên cứu cấu trúc của đại số Lie nói chung. Hiện nay, sự hiểu biết về đối đồng điều của đại số Lie vẫn còn hạn chế. Bài toán đặt ra ở đây tìm cách mô tả tường minh các nhóm đối đồng điều của đại số Lie $\mathfrak{g}$ cho trước hoặc tính số chiều của nhóm đối đồng điều $H^k(\mathfrak{g}, V)$. Tuy nhiên, trên thực tế hiện nay bài toán trên mới giải quyết được một số các đại số Lie cụ thể. Ngay trong trường hợp đơn giản nhất là bài toán mô tả nhóm đối đồng điều $H^k(\mathfrak{g}, V)$ và tính số chiều của nó vẫn tồn tại nhiều câu hỏi mở. Năm 1983, trong [10] thì J.T.Santharoubane đã mô tả được đối đồng điều của đại số Lie Heisenberg sao

cho đại số Lie Heisenberg là một ideal 1- chiều.

Trong trường hợp $\mathfrak{g}$ là đại số Lie toàn phương, tức là đại số Lie được trang bị một dạng song tuyến tính, bất biến và không suy biến, bài toán mô tả nhóm đối đồng điều thứ hai, hệ số trong $\mathbb{C}$ của $\mathfrak{g}$ (kí hiệu là $H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$) và tính số chiều của nó liên quan mật thiết đến bài toán mô tả không gian đạo hàm phản xứng của $\mathfrak{g}$ và bài toán tính toán các toán tử bờ $\delta = I, (\cdot, \cdot)$, trong đó I là 3- dạng liên kết với $\mathfrak{g}$ và $(\cdot, \cdot)$ là tích Super - Poisson được định nghĩa trên không gian $\wedge(\mathfrak{g}^*)$ chứa các dạng đa tuyến tính phản xứng trên $\mathfrak{g}$ (xem [8]). Cách tiếp cận thứ hai mở ra một hướng đi trong việc tìm kiếm những họ đại số Lie thích hợp với cách tính thông qua tích Super - Poisson và từ đó cung cấp nhiều thông tin cho bài toán nghiên cứu đại số Lie toàn phương.

Trong luận văn này chúng tôi sẽ chọn cách tiếp cận đại số Lie toàn phương bằng các nghiên cứu nhóm đối đồng điều của nó. Mục đích của chúng tôi là sẽ trình bày bài toán tính số chiều của $H^2(J_k, \mathbb{C})$, trong trường hợp J_k là đại số Lie lũy linh kiểu Jordan, bằng phương pháp dựa trên tích Super- Poisson. Từ đó tính được số Betti thứ hai của các đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_k .

Mục đích muốn tìm hiểu về đại số Lie toàn phương nói chung và đồng điều của nó nói riêng, chúng tôi sẽ tập trung vào tính số chiều của nhóm đối đồng điều $H^2(J_k, \mathbb{C})$, trong trường hợp J_k là đại số Lie lũy linh kiểu Jordan. Từ đó tính số Betti thứ hai của J_k . Với những lí do đó chúng tôi chọn đề tài: **Số Betti thứ hai của một số đại số Lie lũy linh kiểu Jordan.**

Mục đích của luận văn dựa trên kết quả bài báo " **A new invariant of quadratic Lie algebras**", Alg. and Rep. Theory. (2012) **Volume 15(6)**, pp 1163-1203 của nhóm tác giả Duong Minh Thanh, Georges Pinczon và Rosane Ushirobira và cùng với một số tài liệu liên quan để đọc hiểu, trình bày một số Ushirobira và cùng một số tài liệu liên quan để đọc hiểu, trình bày một số hệ thống cách tính Betti thứ hai của một số đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_k .

2. Nội dung nghiên cứu của luận văn

2.1 Nhóm đối đồng điều $H^2(J_k, \mathbb{C})$ đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_k .

2.2 Số Betti thứ hai của một số đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_k .

3. Tổng quan và cấu trúc của luận văn

Ngoài phần Lời nói đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo thì nội dung của Luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Nội dung chính trong chương này, chúng tôi trình bày khái niệm về dạng Jordan của ma trận lũy linh, đại số Lie toàn phương, tích Supper - Poisson, đồng điều của đại số Lie toàn phương. Các nội dung trên được chia thành các tiết sau:

1.1. Dạng chuẩn Jordan của ma trận lũy linh.

1.2. Đại số Lie toàn phương.

1.3. Đối đồng điều của đại số Lie toàn phương.

Chương 2. Số Betti thứ hai của một số đại số Lie lũy linh kiểu Jordan. Nội dung chính trong chương này, chúng tôi trình bày cách xây dựng đại số Lie lũy linh kiểu Jordan. Tiếp theo dựa vào cách xây dựng đối đồng điều của đại số Lie toàn phương để mô tả đối đồng điều của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_k . Từ đó tính số Betti thứ hai của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_{2n} và J_{2n+1} , với $n \geq 2$. Các nội dung trên dự kiến được chia thành các tiết sau:

2.1. Đại số Lie lũy linh kiểu Jordan.

2.2. Số Betti của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_{2n} .

2.3. Số Betti của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_{2n+1} .

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Vinh dưới sự hướng dẫn của Thầy giáo TS. Nguyễn Quốc Thợ. Tác giả xin được tỏ lòng kính trọng, biết ơn sâu sắc tới thầy Nguyễn Quốc Thợ, người đã trực tiếp giảng dạy, hướng dẫn, động viên, giúp đỡ tận tình và chu đáo trong suốt quá trình tác giả học tập và thực hiện luận văn.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn các Thầy (Cô) trong Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số thuộc ngành Toán của Viện Sư Phạm Tự Nhiên, các Thầy (Cô) giáo đã trực tiếp giảng dạy, Ban giám hiệu và các Phòng ban chức năng của Trường Đại học Vinh đã hỗ trợ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn

thành nhiệm vụ của một học viên cao học.

Tác giả xin được cảm ơn Thầy (Cô), các đồng nghiệp nơi tác giả đang giảng dạy và công tác đã tạo điều kiện thuận lợi, cổ vũ, động viên và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập.

Cảm ơn sự hi sinh của gia đình - niềm tin, chỗ dựa tinh thần vững chắc để tác giả vượt qua khó khăn, hoàn thành nhiệm vụ học tập của bản thân.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị.

Nội dung trong chương này, chúng tôi trình bày lại một cách có hệ thống khái niệm cơ bản và những kết quả cần thiết liên quan đến ma trận lũy linh kiểu Jordan, đại số Lie toàn phương, tích Super - Poisson, đồng điều của đại số Lie toàn phương,... nhằm mục đích làm cơ sở cho việc trình bày nội dung chương 2.

1.1 Dạng chuẩn Jordan của ma trận lũy linh

Định nghĩa 1.1.1. Cho A là ma trận vuông cấp n , A được gọi là ma trận lũy linh nếu tồn tại số nguyên dương q sao cho $A^q = 0$.

Nhận xét 1.1.2. Nếu $A^q = 0$ thì ta cũng có $A^m = 0$ với m thỏa mãn $m \geq q$.

Số nguyên dương k được gọi là cấp lũy linh của ma trận A nếu $A^k = 0$ và $A^{k-1} \neq 0$.

Ma trận A được gọi là ma trận lũy linh đơn nếu $A - E$ là ma trận lũy linh (E là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận A).

Tính chất 1.1.3.

1. Nếu A là ma trận lũy linh thì A là ma trận suy biến.

Chứng minh: Thật vậy A là ma trận lũy linh nên tồn tại số nguyên dương q sao cho $A^q = 0$.

Ta có: $\det A^q = \det 0 = 0$ suy ra $\det A \times \det A \times \dots \times \det A = 0 \Rightarrow (\det A)^q = 0 \Rightarrow \det A = 0$.

2. Nếu A là ma trận lũy linh thì các ma trận $E - A$ và $E + A$.

Chúng minh: Giả sử $A^k = 0 (k \geq 1)$ ta có:

$E = E - A^k = (E - A) \times (E + A + A^2 + \dots + A^{k-1})$. Như vậy $E - A$ khả nghịch và $(E - A)^{-1} = (E + A) \times (E + A + A^2 + \dots + A^{k-1})$.

Tương tự ta cũng có $E + A$ khả nghịch vì $E = E + A^{2k+1} = (E + A) \times (E - A + A^2 - \dots + A^{2k})$.

Khi đó $(E + A)^{-1} = (E - A + A^2 - \dots + A^{2k})$.

3. Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp $AB = BA$. Khi đó nếu A và B là các ma trận lũy linh thì $A + B$ cũng là ma trận lũy linh.

Chúng minh: Do A và B là các ma trận lũy linh nên tồn tại các số nguyên q, p sao cho $A^p = 0, B^q = 0$, giả sử $p \geq q$, đặt $m = 2p$.

Theo giả thiết $AB = BA$ nên ta có khai triển nhị thức Newton:

$(A + B)^{2m} = \sum_{i=0}^m C_m^i B^{m-i} A^i$, trong 2 số i và $m - i$ có ít nhất 1 số không nhỏ hơn p nên $A^i B^{m-i} = 0$. Vậy $(A + B)^{2m} = 0$.

4. Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp $AB = BA$. Khi đó nếu A và B là các ma trận lũy linh đơn thì ma trận tích AB cũng là ma trận lũy linh đơn.

Chúng minh: Vì $(A - E), (B - E)$ là các ma trận lũy linh nên tồn tại các số nguyên dương p và q sao cho $(A - E)^p = 0, (B - E)^q = 0$.

Ta có $(AB - E) = (A - E)B + (B - E)$, giả sử $p \geq q$, khi đó $AB = BA$ nên ta cũng có tính chất giao hoán $(A - E)B(B - E) = (B - E)(A - E)B$.

Sử dụng khai triển nhị thức Newton, ta thu được:

$$(AB - E)^{2p} = [(A - E)B + (B - E)]^{2p} = \sum_{i=0}^{2p} C_{2p}^i (A - E)^i B^i (B - E)^{2p-i}$$

Trong 2 số i và $2p - i$ phải có một số không nhỏ hơn p nên $(A - E)^i B^i (B - E)^{2p-i} = 0$. Vậy tồn tại số nguyên dương 2p sao cho $(AB - E)^{2p} = 0$, tức $(AB - E)$ là ma trận lũy linh.

Định lí 1.1.4. Cho A và B là các ma trận vuông thực và $A = P^{-1}BP$, ở đó P là một ma trận phức. Khi đó tồn tại ma trận thực Q sao cho $A = Q^{-1}BQ$ với Q là ma trận thực.

Một khối Jordan cỡ $n \times n$ là ma trận có dạng:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 1.1.5. Một ma trận Jordan là một khối có các khối Jordan trên đường chéo.

Một cơ sở Jordan của toán tử tuyến tính $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ là một cơ sở của không gian $\mathfrak{g}$ sao cho ma trận của nó trong cơ sở đó là một ma trận Jordan.

Định lí 1.1.6. (Jordan) Với mọi toán tử tuyến tính $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ trên $\mathbb{C}$, tồn tại một cơ sở Jordan và ma trận Jordan của nó được xác định duy nhất, sai khác hoán vị các khối Jordan của nó.

Chú ý 1.1.7. Dạng chuẩn Jordan của một ma trận được sử dụng một cách rất thuận tiện trong việc thực hiện phép tính lũy thừa của một ma trận. Cụ thể hơn, nếu $A = P^{-1}JP$ thì $A^n = P^{-1}J^nP$. Để tính lũy thừa của khối Jordan $J_n\lambda = \lambda I + N$, ta có công thức khai triển Newton:

$$J^n = \sum_{k=0}^n C_k^n \lambda^k N^{n-k}$$

Định lí 1.1.8. Với mỗi toán tử tuyến tính A trên trường số phức, luôn tồn tại một cơ sở ma trận của nó trong cơ sở đã cho có dạng đường chéo khối với các khối $J_{m_1}(t_1), \dots, J_{m_k}(t_k)$ tương ứng với giá trị riêng thực t_i và các khối $J_{n_1}^*(\lambda_1), \dots, J_{n_s}^*(\lambda_s)$ tương ứng với giá trị riêng phức λ_i và $\overline{\lambda_i}$, ở đó $J_n^*(\lambda)$ là ma trận cỡ $2n \times 2n$ thu được từ khối Jordan $J_n(\lambda)$ bằng cách thay thế mỗi phần tử có dạng $a + bi$ của nó bởi ma trận $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Định lí 1.1.9. Cho A là một toán tử tuyến tính khả nghịch trên trường số phức $\mathbb{C}$. Khi đó A có thể biểu diễn dưới dạng $A = A_s A_u = A_u A_s$, ở đó A_s là toán tử chéo hóa được và A_u là một toán tử lũy đơn (toán tử lũy đơn là tổng của toán tử đồng nhất và toán tử lũy linh). Biểu diễn này là duy nhất.

1.2 Đại số Lie toàn phương

Định nghĩa 1.2.1. Cho không gian vecto hữu hạn chiều trên trường số phức $\mathbb{C}$ là $\mathfrak{g}$. Ta trang bị một phép toán gọi là Tích Lie (hay móc Lie) trên $\mathfrak{g}$:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Phép toán $[\cdot, \cdot]$ là Toán tử song tuyến tính.
2. Phép toán $[\cdot, \cdot]$ phản xứng, tức: $[X, X] = 0$, với mọi $X \in \mathfrak{g}$.
3. Phép toán $[\cdot, \cdot]$ thỏa mãn đẳng thức Jacobi, tức là:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

Khi đó, $\mathfrak{g}$ được gọi là một **đại số Lie** trên $\mathbb{C}$ (hay $\mathbb{C}$ - đại số Lie).

Số chiều của không gian vecto $\mathbb{C}$ chính là số chiều của đại số Lie $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.2.2. Cho đại số Lie $\mathfrak{g}$. Một không gian vecto con A của $\mathfrak{g}$ được gọi là một **đại số Lie con** của $\mathfrak{g}$ nếu $[X, Y] \in A$ với mọi $X, Y \in \mathfrak{g}$

Định nghĩa 1.2.3. Cho đại số Lie $\mathfrak{g}$. Một không gian vecto con I của $\mathfrak{g}$ được gọi là một Ideal của $\mathfrak{g}$ nếu $[X, Y] \in I$ với mọi $X \in \mathfrak{g}, Y \in I$

Cho đại số Lie $\mathfrak{g}$ ta kí hiệu $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}$ được gọi là **đại số dẫn xuất** của đại số Lie $\mathfrak{g}$ và là một ideal của $\mathfrak{g}$. Kí hiệu:

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\} \text{ là ideal của } \mathfrak{g}$$

Định nghĩa 1.2.4. Cho đại số Lie $\mathfrak{g}$ trên trường $\mathbb{C}$. Ta kí hiệu:

$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \dots, \mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$$

. Khi đó **đại số Lie giải được** nếu tồn tại $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sao cho $\mathfrak{g}^{(m)} = \{0\}$.

Định nghĩa 1.2.5. Cho đại số Lie $\mathfrak{g}$ trên trường $\mathbb{C}$. Ta kí hiệu:

$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}], \dots, \mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$$

. Khi đó đại số Lie $\mathfrak{g}$ được gọi là **lũy linh** nếu tồn tại $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sao cho $\mathfrak{g}^{(m)} = \{0\}$.

Định nghĩa 1.2.6. Cho $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ là hai đại số Lie trên trường $\mathbb{C}$. Khi đó ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ được gọi là **đồng cấu đại số Lie** nếu bảo toàn tích Lie, tức là $\varphi[X, Y] = [\varphi X, \varphi Y]$, với $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_1$.

Cho đại số Lie $\mathfrak{g}$. Ta kí hiệu $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ là Idean giải được lớn nhất của $\mathfrak{g}$.

Định nghĩa 1.2.7. Một đại số Lie $\mathfrak{g}$ trên trường số phức $\mathbb{C}$. **Dạng Killing** trên $\mathfrak{g}$ là một ánh xạ song tuyến tính, đối xứng xác định bởi:

$$\kappa(X, Y) := \text{tr}(adX \odot adY), \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Định nghĩa 1.2.8. Cho đại số Lie $\mathfrak{g}$ hữu hạn chiều trên trường số phức và dạng song tuyến tính $B : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ có các tính chất:

1. Đối xứng, tức $B[X, Y] = B[Y, X], \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
2. Không suy biến nếu $B[X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}$ thì $X = 0$
3. Bất biến (hay kết hợp) nếu $B([X, Y], Z) = b(X, [Y, Z]), \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

Đại số Lie $\mathfrak{g}$ trên tồn tại một song tuyến tính vừa đối xứng, không suy biến và bất biến thì được gọi là **đại số Lie toàn phương**, kí hiệu $B(\mathfrak{g}, B)$.

Ví dụ 1.2.9.

1. Trong $\mathbb{R}^3$ với tích Lie là tích có hướng, dạng toàn phương là tích vô hướng.
2. Cho $\mathfrak{g} = \text{Span} X, Y$ với tích Lie cho bởi $[X, Y] = 0$. Dạng song tuyến tính đối xứng B cho bởi $B(X, Y) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0.

Định nghĩa 1.2.10. Cho $B(\mathfrak{g}, B)$ là một đại số Lie toàn phương và V là không gian vectơ con của $\mathfrak{g}$, U là tập con của V. Ta định nghĩa thành phần trực giao của U là: $U^\perp = \{X \in V \mid B(X, Y) = 0, \forall Y \in U\}$.

Từ định nghĩa ta suy ra được những điều sau:

1. $U^\perp$ là không gian con của V.
2. Nếu $U^\perp = 0$ là B không suy biến trên V.
3. Nếu B không suy biến trên V và U là không gian con của V thì:

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$$

4. Nếu B không suy biến và $X \in V$ là vectơ đẳng hướng đối với B.

5. Nếu B là đối xứng, không suy biến trên V . Khi đó tồn tại một cơ sở $X_1, \dots, X_n$ của V sao cho $B(X_i, X_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ \neq 0, i = j \end{cases}$ với V, W là các không gian con của $\mathfrak{g}$. Ta có các tính chất sau:

1. $\mathfrak{g}^\perp = 0$.
2. Nếu $V \subset W$ thì $V^\perp \supset W^\perp$.
3. $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$ và $(V + W)^\perp \supset V^\perp + W^\perp$.
4. $(V^\perp)^\perp = V$ và $\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim \mathfrak{g}$.

Định lý 1.2.11. Cho đại số toàn phương $(\mathfrak{g}, B)$.

1. Nếu $\mathfrak{J}$ là Idean của $\mathfrak{g}$. Khi đó, $\mathfrak{J}^\perp$ cũng là Idean của $\mathfrak{g}$.
2. Nếu thu hẹp B trên $\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}$ không suy biến thì thu hẹp của B trên $\mathfrak{J}^\perp \times \mathfrak{J}^\perp$ cũng không suy biến và $[\mathfrak{J}, \mathfrak{J}^\perp] = 0$ và $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp = \{0\}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J}^\perp$.
3. Nếu $Z(\mathfrak{g})$ là tâm của $\mathfrak{g}$ thì $Z(\mathfrak{g}^\perp) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ và $\dim Z(\mathfrak{g}) + \dim [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \dim \mathfrak{g}$.

Chứng minh:

1. Nếu $\mathfrak{J}$ là Idean của $\mathfrak{g}$. Lấy $A \in \mathfrak{J}^\perp$ và $X \in \mathfrak{g}$ ta có:

$$B([A, X], Y) = B(A, [X, Y]) = 0, Y \in \mathfrak{J} \text{ (do } \mathfrak{J} \text{ là Idean của } \mathfrak{g} \text{)}.$$

Do đó, $[A, X] \in \mathfrak{J}^\perp$.

Suy ra $\mathfrak{J}^\perp$ là Idean của $\mathfrak{g}$.

2. Giả sử $B|_{\mathfrak{J}^\perp \times \mathfrak{J}^\perp}$ là thu hẹp của B trên $\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}$ không suy biến. Lấy $A \in \mathfrak{J}^\perp$ thỏa mãn $B(X, \mathfrak{J}^\perp) = 0$ thì $X \in \mathfrak{J}$ và $B(X, \mathfrak{J}) = 0$.

Do đó $B|_{\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}}$ không suy biến.

Suy ra $B|_{\mathfrak{J}^\perp \times \mathfrak{J}^\perp}$ cũng không suy biến.

Nếu $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}^\perp$ là hai Idean của $\mathfrak{g}$ thì $B([\mathfrak{J}, \mathfrak{J}^\perp], X) = B(\mathfrak{J}, [\mathfrak{J}^\perp, X]) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$ và do B không suy biến trên $\mathfrak{g}$, nên $[\mathfrak{J}, \mathfrak{J}^\perp] = 0$

Nếu $X \in \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp$ thì $B(X, \mathfrak{J}) = 0$. Do B không suy biến trên $\mathfrak{J}$ nên $X = 0$.

Do đó, $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp = 0$.

Ta có: $\{0\} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp = (\mathfrak{J}^\perp)^\perp \cap \mathfrak{J}^\perp = (\mathfrak{J}^\perp \oplus \mathfrak{J})^\perp$.

Suy ra: $0^\perp = ((\mathfrak{J}^\perp \oplus \mathfrak{J})^\perp)^\perp = \mathfrak{J}^\perp \oplus \mathfrak{J}$

3. Nếu $X \in Z(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow [X, \mathfrak{g}] = \{0\} \Leftrightarrow B([X, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$.

$$\Leftrightarrow B(X, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0 \Leftrightarrow X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp.$$

Nên $Z(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ và $\dim Z(\mathfrak{g}) + \dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \dim \mathfrak{g}$.

Nếu thu hẹp của B trên $\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}$ không suy biến thì ta gọi $\mathfrak{J}$ là một Idean không suy biến của $\mathfrak{g}$ và $\mathfrak{g} = \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J}^\perp$. Vì tổng trực tiếp này là tổng trực giao nên ta dùng kí hiệu là: $\mathfrak{g} = \mathfrak{J} \overset{\perp}{\oplus} \mathfrak{J}^\perp$

Mệnh đề 1.2.12. Cho một đại số Lie toàn phương $\mathfrak{g}'$ và $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ là một đẳng cấu của đại số Lie. Khi đó:

$$\mathfrak{g} = \partial' \overset{\perp}{\oplus} \iota'$$

Ở đây, $\partial' = A(\partial)$ thuộc tâm, $\iota' = A(\partial')$, $Z(\iota')$ tự đẳng hướng hoàn toàn thì ι và ι' đẳng cấu với nhau. Hơn nữa, nếu A là một đẳng cấu đẳng cự thì ι và ι' đẳng cấu đẳng cự.

Định nghĩa 1.2.13. (3 - dạng trên một đại số Lie toàn phương)

Cho $(\mathfrak{g}, A)$ là một đại số Lie toàn phương không giao hoán. Khi đó dạng song tuyến tính A sẽ xác định một 3 - dạng $I \in \wedge^3(\mathfrak{g}^*)$ như sau:

$$I(X < Y, Z) := B([X, Y], Z), \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

. Ta gọi I là **3 - dạng liên kết** với $(\mathfrak{g}, A)$.

Nhận xét 1.2.14. Gọi $\{.,.\}$ là móc Super - Poisson trên đại số các dạng phản xứng trên $\wedge(\mathfrak{g}^*)$. Lúc đó 3 - dạng I thỏa mãn $\{I, I\} = 0$.

Ngược lại, cho một không gian vecto toàn phương $(\mathfrak{g}, A)$ và một 3 - dạng $I \in \wedge^3(\mathfrak{g}^*)$ khác 0 thỏa mãn $\{I, I\} = 0$ thì có một cấu trúc đại số Lie toàn phương không giao hoán trên $\mathfrak{g}$ sao cho I là 3 - dạng liên kết với $\mathfrak{g}$.

1.3 Đối đồng điều của đại số Lie toàn phương

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie, V là một không gian vecto và $\rho : \mathfrak{g} \mapsto \text{End}(V)$ là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$ trong V. Với $k \geq 0$, kí hiệu $C^k(\mathfrak{g}, V)$ là không gian các ánh xạ k - tuyến tính phản xứng $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g}$ vào V nếu $k \geq 1$ và $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$.

Định nghĩa 1.3.1. Toán tử đối bờ $\delta_k : C^k(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g}, V)$,

$$\begin{aligned}\delta_k f(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \rho(X_i) (f(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k)) \\ &+ \sum_{i < j}^k (-1)^{i+j} ([X_i, X_j] X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k).\end{aligned}$$

với mọi $f \in C^k(\mathfrak{g}, V)$, $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$, ở đây kí hiệu $\widehat{X_i}$ để chỉ X_i không có trong công thức.

Định nghĩa 1.3.2. Ta nói rằng $f \in C^k(\mathfrak{g}, V)$ là một k - đối chu trình nếu $\delta_k f = 0$ và f là một k - đối bờ nếu có $\mathfrak{g} \in C^{k-1}(\mathfrak{g}, V)$ sao cho $f = \delta_{k-1} \mathfrak{g}$. Kí hiệu $Z^k(\mathfrak{g}, V)$ là tập hợp các k - đối chu trình và $B^k(\mathfrak{g}, V)$ là tập hợp các k -đối bờ, tức là $Z^k(\mathfrak{g}, V) = \text{Ker} \delta_k$ và $B^k(\mathfrak{g}, V) = \text{Im} \delta_{k-1}$. Không gian thương $Z^k(\mathfrak{g}, V) \setminus B^k(\mathfrak{g}, V)$ được kí hiệu là $H^k(\mathfrak{g}, V)$ và được gọi là nhóm đối đồng điều thứ k của $\mathfrak{g}$ hệ số trong V .

Ví dụ 1.3.3. V một chiều, tức là $V = \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Khi đó, $C^0(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$, $C^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ là không gian các ánh xạ k - tuyến tính phản xứng từ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g}$ vào $\mathbb{C}$, tức là $C^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \wedge_k(\mathfrak{g}^*)$ và $\delta_k f(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i < j}^k (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k)$. Trong trường hợp này, việc mô tả nhóm đối đồng điều $H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ cũng như tính toán số Betti $b_k(\mathfrak{g}) = \dim H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$.

Định nghĩa 1.3.4. Cho không gian vectơ phức V hữu hạn chiều được trang bị một song tuyến tính đối xứng B (ta còn gọi (V, B) là một không gian vectơ toàn phương. Pinczon et al. (2007) đã giới thiệu khái niệm tích Supper - Poisson trên không gian $\lambda(V^*)$ chứa các dạng đa tuyến tính phản xứng trên V như sau:

$$\{\Omega, \Omega'\} = (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^n \iota_{X_j} \Omega \wedge \iota_{X_j} \Omega', \forall \Omega \in \wedge^k(V^*), \Omega' \in \wedge(V^*)$$

ở đây, $\{X_j\} j = 1^n$ là một cơ sở trực chuẩn của V . Đối với đại số Lie toàn phương $(\mathfrak{g}, B)$, 3 - dạng liên kết với $\mathfrak{g}$ xác định bởi $I(X, Y, Z) = B([X, Y], Z), \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Pinczon và Ushirobira đã chứng minh được $\{I, I\} = 0$ và $\delta \Omega = \{I, \Omega\}$.

Chương 2

Số Betti thứ hai của một số đại số Lie lũy linh kiểu Jordan.

Chương này là nội dung chính của luận văn. Trong chương này, chúng ta sẽ trình bày cách xây dựng đại số Lie lũy linh kiểu Jordan. Tiếp theo dựa vào cách xây dựng đồng điều của đại số Lie toàn phương để mô tả đối đồng điều của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan. Từ đó tính số Betti thứ hai của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_{2n} và J_{2n+1} , với $n > 2$.

2.1 Đại số Lie lũy linh kiểu Jordan

Cho các khối Jordan lũy linh $J_1 = (0)$, $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $n \geq 2$ và

không gian vectơ $\mathfrak{q} = \mathbb{C}^{2n}$ với một cơ sở chính tắc $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$. Xét ánh xạ tuyến tính $C : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ với ma trận đối với cơ sở chính tắc là $C = \begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & -J_n^t \end{pmatrix}$. Khi đó, $C \in \mathfrak{o}(2n)$. Gọi $\mathfrak{j}_{2n} = \mathfrak{q} \oplus \mathbb{C}X_0 \oplus \mathbb{C}Y_0$ là một mở rộng của $\mathfrak{q}$ bởi C với tích Lie được xác định bởi $[Y_0, X] = C(X)$, $[X, Y] = B(C(X), Y)X_0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{q}$, $[X_0, \mathfrak{j}_{2n}] = 0$.

Nhận xét 2.1.1. Dạng song tuyến tính B được xác định bởi $B(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0, n}$.

Mệnh đề 2.1.2. Khi đó B là một dạng song tuyến tính đối xứng bất biến, không suy biến và $\mathfrak{j}_{2n}$ cùng với B trở thành một đại số Lie toàn phương.

Chứng minh: Vì với $n = 1, j_2$ là đại số Lie giao hoán 4 chiều. Đây là trường hợp tầm thường nên trong trường hợp này ta chỉ xét $n \geq 2$.

Mệnh đề 2.1.3. Cho không gian vectơ $\mathfrak{q} = \mathbb{C}^{2n+1}$ với một cơ sở chính tắc $\{X_1, \dots, X_n, T, Y_1, \dots, Y_n\}$.

Định nghĩa ánh xạ tuyến tính $C : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ với ma trận đối với cơ sở chính tắc $C = \begin{pmatrix} J_{n+1} & M \\ 0 & -J_n^t \end{pmatrix}$, trong đó M là ma trận $(n+1) \times n$ có tất cả các số hạng bằng không ngoại trừ $m_{n+1,n} = -1$. Khi đó $C \in \mathfrak{o}(2n+1)$.

Định nghĩa 2.1.4. Gọi $j_{2n+1} = \mathfrak{q} \oplus \mathbb{C}X_0 \oplus \mathbb{C}Y_0$ là mở rộng của $\mathfrak{q}$ bởi C với tích Lie được xác định như sau: $[Y_0, X] = C(X)$, $[X, Y] = B(C(X), Y)X_0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{q}$, $[X_0, j_{2n+1}] = 0$ Và dạng song tuyến tính được xác định bởi $B(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0, n}$, $B(T, T) = 1$.

Các đại số Lie j_{2n}, j_{2n+1} được gọi là đại số Lie lũy linh kiểu Jordan.

2.2 Số Bettti của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_{2n}

2.2.1 Đối đồng điều thứ hai của $j_4(n=2)$

Xét đại số Lie lũy linh kiểu Jordan j_4 , ta có các tích Lie khác không như sau: $[Y_0, Y_1] = -Y_2$, $[Y_0, Y_1] = C(Y_1) = -Y_2$, $[X_2, Y_1] = X_0$. Dạng song tuyến tính xác định bởi $B(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0, 2}$. Gọi $\{\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$ là cơ sở đối ngẫu của $\{X_0, Y_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$ và $V = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $W = \text{span}\{\beta_1, \beta_2\}$.

Nhận xét 2.2.1.1. 3-dạng liên kết với j_4 được xác định là $I = \beta \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1$.

Định lí 2.2.1.2. $\dim B^2(j_4) = 3$ và $b_2(j_4) = 8$.

Chứng minh: Theo [1,3] 1. $B^2(j_4) = \text{span}\{\iota_X(I) : X \in j_4\} = \text{span}\{\alpha_2 \wedge \beta_1, \beta \wedge \alpha_2, \beta \wedge \beta_1\}$.

2. Ta tính toán $\{I, \cdot\}$ trên các hạng tử trực tiếp ta suy ra

$$H^2(j_4) = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} [\alpha \wedge \alpha_2], [\alpha \wedge \beta_1], [\beta \wedge \alpha_1], [\beta \wedge \beta_2], [\alpha_1 \wedge \alpha_2] \\ [\beta_1 \wedge \beta_2], [\alpha \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta_2], [\alpha \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta_1] \end{array} \right\}$$

2.2.2 Đối đồng điều thứ hai của $\mathfrak{j}_{2n}$ với $n > 2$

Xét đại số Lie lũy linh kiểu Jordan $\mathfrak{j}_{2n}$ với $n > 2$. Ta có các tích Lie khác không như sau: $[Y_0, X_2] = X_1, \dots, [Y_0, X_n] = X_{n-1}, [Y_0, Y_1] = -Y_2, \dots, [Y_0, Y_{n-1}] = -Y_n, [X_2, Y_1] = X_0, [X_3, Y_2] = X_0, [X_{n-1}, Y_{n-2}] = X_0, [X_n, Y_{n-1}] = X_0$. Dạng song tuyến tính xác định bởi $B(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$. Gọi $\{\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ là cơ sở đối ngẫu của $\{X_0, Y_0, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$ và

$$V = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, W = \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}.$$

Mệnh đề 2.2.2.1. 3-dạng liên kết với $\mathfrak{j}_{2n}$ được xác định bởi

$$I = \beta \wedge \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i \right)$$

Hệ quả 2.2.2.2.

$$\begin{aligned} B^2(\mathfrak{j}_{2n}) &= \text{span}\{\iota_X(I) : X \in \mathfrak{j}_{2n}\} \\ &= \text{span}\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i, \beta \wedge \alpha_{i+1}, \beta \wedge \beta_i : i = \overline{1, n-1} \right\} \end{aligned}$$

và $\dim B^2(\mathfrak{j}_{2n}) = 2n - 1$.

Định lí 2.2.2.3. Không gian $C^2(\mathfrak{j}_{2n}, \mathbb{C})$ được phân tích thành tổng trực tiếp các không gian các 2-dạng:

$$\alpha \wedge (V \oplus W), \beta \wedge (V \oplus W), \wedge^2(V), \wedge^2(W), V \wedge W, \langle \alpha \wedge \beta \rangle.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} Z^2(\mathfrak{j}_{2n}) &= \beta \wedge (V \oplus W) \oplus \ker\{I, \wedge^2(V)\} \oplus \ker\{I, \wedge(W)\} \oplus \ker\{I, V \wedge W\} \\ &\oplus \left\langle \alpha \wedge \beta - \sum_{i=1}^n (n+1-i) \alpha_i \wedge \beta_i \right\rangle \end{aligned}$$

$$\dim Z^2(\mathfrak{j}_{2n}) = 2n + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n + 1 = 3n + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Chúng minh:

Sau đây ta tính toán toán tử $\{I, \cdot\}$ trên các hạng tử trực tiếp.

(1) Trên $\alpha \wedge (V \oplus W)$, ta có $\ker \{I, \alpha \wedge (V \oplus W)\} = \{0\}$.

(2) Trên $\beta \wedge (V \oplus W)$, tính toán trực tiếp ta được

$$\dim \ker \{I, \beta \wedge (V \oplus W)\} = 2n.$$

(3) Trên $\wedge^2(V)$, ta có

$$\begin{aligned} \{I, \alpha_{n-1} \wedge \alpha_n\} &= 0, \{I, \alpha_i \wedge \alpha_n\} = \beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \alpha_n \text{ với } 1 \leq i < n-1, \\ \{I, \alpha_i \wedge \alpha_{i+1}\} &= \beta \wedge \alpha_i \wedge \alpha_{i+2} \text{ với } 1 \leq i < n-1, \\ \{I, \alpha_i \wedge \alpha_j\} &= \beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \alpha_j + \beta \wedge \alpha_i \wedge \alpha_{j+1} \text{ với } 1 \leq i < j-1, j \leq n-1. \end{aligned}$$

Do đó $\alpha_{n-1} \wedge \alpha_n \in \ker \{I, \wedge^2(V)\}$. Chú ý rằng mọi $\omega \in \ker \{I, \wedge^2(V)\}$ đều có dạng

$$\omega = \sum_{2 \leq i+1 < j \leq n-1}^{n-1} a_{ij} \cdot \alpha_i \wedge \alpha_j + \sum_{i=1}^{n-2} b_i \cdot \alpha_i \wedge \alpha_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-2} c_j \cdot \alpha_j \wedge \alpha_n + d \cdot \alpha_{n-1} \wedge \alpha_n \in \ker \{I, \wedge^2(V)\}.$$

Giả sử $\omega = \sum_{i=1}^{n-2} b_i \cdot \alpha_i \wedge \alpha_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-2} c_j \cdot \alpha_j \wedge \alpha_n \in \ker \{I, \wedge^2(V)\}$ sao cho các b_i không đồng thời bằng không. Ta có $\{I, \omega\} = \sum_{i=1}^{n-2} b_i \cdot \beta \wedge \alpha_i \wedge \alpha_{i+2} + \sum_{j=1}^{n-2} c_j \cdot \beta \wedge \alpha_{j+1} \wedge \alpha_n = 0$. Gọi i_0 là chỉ số sao cho $b_{i_0} \neq 0$ (không mất tính tổng quát, ta có thể chọn $b_{i_0} = 1$). Để triệt tiêu $\{I, \alpha_{i_0} \wedge \alpha_{i_0+1}\} = \beta \wedge \alpha_{i_0} \wedge \alpha_{i_0+2}$ ta phải có $i_0 + 2 = n, c_{i_0-1} = -b_{i_0}$ nên

$$\omega = \alpha_{n-2} \wedge \alpha_{n-1} - \alpha_{n-3} \wedge \alpha_n$$

hay

$$\alpha_{n-3} \wedge \alpha_n - \alpha_{n-2} \wedge \alpha_{n-1} \in \ker \{I, \wedge^2(V)\}.$$

Giả sử $\omega = \sum_{2 \leq i+1 < j \leq n-1}^{n-1} a_{ij} \alpha_i \wedge \alpha_j + \sum_{i=1}^{n-2} b_i \alpha_i \wedge \alpha_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-2} c_j \alpha_j \wedge \alpha_n \in \ker \{I, \wedge^2(V)\}$ sao cho các a_{ij} không đồng thời bằng không. Ta có

$$\begin{aligned} \{I, \omega\} &= \sum_{2 \leq i+1 < j \leq n-1}^{n-1} a_{ij} \cdot (\beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \alpha_j + \beta \wedge \alpha_i \wedge \alpha_{j+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-2} b_i \cdot \beta \wedge \alpha_i \wedge \alpha_{i+2} + \sum_{j=1}^{n-2} c_j \cdot \beta \wedge \alpha_{j+1} \wedge \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Gọi i_0 là số nhỏ nhất sao cho tồn tại $j_0 > i_0 + 1$ để $a_{i_0 j_0} \neq 0$ (không mất tính tổng quát, ta có thể chọn $a_{i_0 j_0} = 1$). Nếu $j_0 < n-1$, để triệt tiêu $a_{i_0 j_0} \beta \wedge \alpha_{i_0} \wedge \alpha_{j_0+1}$

phải có $a_{i_0-1, j_0+1} = -a_{i_0, j_0} \neq 0$, mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của i_0 . Do đó $j_0 = n-1$. Nếu $i_0 = 1$ thì $\{I, \alpha_{i_0} \wedge \alpha_{j_0}\} = \{I, \alpha_1 \wedge \alpha_{n-1}\} = \beta \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_{n-1} + \beta \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_n$. Theo cách tính $\{I, \omega\}$, ta không thể triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_n$, vô lý, do đó $i_0 > 1$.
Do

$$\{I, \alpha_{i_0} \wedge \alpha_{j_0}\} = \beta \wedge \alpha_{i_0+1} \wedge \alpha_{j_0} + \beta \wedge \alpha_{i_0} \wedge \alpha_n$$

nên $c_{i_0-1} = -a_{i_0, j_0}$, $a_{i_1, j_1} = -a_{i_0, j_0}$ với $i_1 = i_0 + 1, j_1 = j_0 - 1$. Ta lại có

$$\{I, \alpha_{i_1} \wedge \alpha_{j_1}\} = \beta \wedge \alpha_{i_1+1} \wedge \alpha_{j_1} + \beta \wedge \alpha_{i_1} \wedge \alpha_{j_1+1}$$

nên $a_{i_2, j_2} = -a_{i_1, j_1}$ với $i_2 = i_1 + 1, j_2 = j_1 - 1$. Tiếp tục quá trình này ta được $a_{i_s, j_s} = -a_{i_{s-1}, j_{s-1}}$ với $i_s = i_{s-1} + 1 = i_0 + s, j_s = j_{s-1} - 1 = n - s - 1$ sao cho $j_s = i_s + 2$ hoặc $j_s = i_s + 3$.

Nếu $j_s = i_s + 2$ thì $\{I, \alpha_{i_0} \wedge \alpha_{j_0}\} = \beta \wedge \alpha_{i_0+1} \wedge \alpha_{i_0+2} + \beta \wedge \alpha_{i_0} \wedge \alpha_{i_0+3}$. Từ cách tính $\{I, \omega\}$ trên, ta không thể triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_{i_0+1} \wedge \alpha_{i_0+2}$, do đó trường hợp này không xảy ra.

Nếu $j_s = i_s + 3$ thì $\{I, \alpha_{i_0} \wedge \alpha_{j_0}\} = \beta \wedge \alpha_{i_0+1} \wedge \alpha_{i_0+3} + \beta \wedge \alpha_{i_0} \wedge \alpha_{i_0+4}$. Khi đó để triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_{i_0+1} \wedge \alpha_{i_0+3}$, ta cần chọn $b_{i_0+1} = -a_{i_0, j_0}$. Nên ta cần chọn $i_0 > 1, s \geq 0$ sao cho $i_0 + s + 3 = n - s - 1$ hay $i_0 = n - 2l$ với $2 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$.

Do đó $\ker \{I, \wedge^2(V)\} = \text{span} \left\{ \sum_{i=1}^k (-1)^i \alpha_{n-2k+i} \wedge \alpha_{n-i+1} : k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$.

(4) Trên $\wedge^2(W)$, tương tự như trong tính toán trên $\wedge^2(V)$, ta có

$$\ker \{I, \wedge^2(W)\} = \text{span} \left\{ \sum_{i=1}^k (-1)^i \beta_i \wedge \beta_{2k-i+1} : k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}.$$

(5) Trên $V \wedge W$, với $i = \overline{1, n-1}, j = \overline{2, n}$ ta có

$$\begin{aligned} \{I, \alpha_i \wedge \beta_j\} &= \beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \beta_j - \beta \wedge \alpha_i \wedge \beta_{j-1} \\ \{I, \alpha_n \wedge \beta_j\} &= -\beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{j-1}, \{I, \alpha_i \wedge \beta_1\} = \beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \beta_1, \{I, \alpha_n \wedge \beta_1\} = 0 \end{aligned}$$

Do đó $\alpha_n \wedge \beta_1 \in \ker\{I, V \wedge W\}$. Giả sử $\sum_{i=1}^{n-1} b_i \alpha_i \wedge \beta_1 + \sum_{j=2}^n c_j \alpha_n \wedge \beta_j \in \ker\{I, V \wedge W\}$ sao cho các b_i không đồng thời bằng không. Ta có

$$\{I, \omega\} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \cdot \beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \beta_1 - \sum_{j=2}^n c_j \beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{j-1} = 0$$

Gọi i_0 là số nhỏ nhất sao cho $b_{i_0} \neq 0$. Nếu $i_0 < n - 1$, do $\{I, \alpha_{i_0} \wedge \beta_1\} = \beta \wedge \alpha_{i_0+1} \wedge \beta_1$ ta không thể triệt tiêu được nên $i_0 = n - 1$. Khi đó để triệt tiêu $\{I, \alpha_{i_0} \wedge \beta_1\} = \beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_1$, ta chỉ cần chọn $c_2 = b_{n-1}$ do đó $\alpha_{n-1} \wedge \beta_1 + \alpha_n \wedge \beta_2 \in \ker\{I, V \wedge V\}$. Giả sử

$$\omega = \sum_{\substack{i=1, n-1, \\ j=2, n}} a_{ij} \cdot \alpha_i \wedge \beta_j^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \cdot \alpha_i \wedge \beta_1 + \sum_{j=2}^n c_j \cdot \alpha_n \wedge \beta_j \in \ker\{I, V \wedge W\}$$

sao cho các a_{ij} không đồng thời bằng không. Ta có

$$\begin{aligned} \{I, \omega\} &= \sum_{\substack{i=1, n-1, \\ j=2, n}} a_{ij} \cdot (\beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \beta_j - \beta \wedge \alpha_i \wedge \beta_{j-1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} b_i \cdot \beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \beta_1 - \sum_{j=2}^m c_j \cdot \beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{j-1} = 0. \end{aligned}$$

Gọi i_0 là số nhỏ nhất sao cho tồn tại j_0 để $a_{i_0 j_0} \neq 0$ (không mất tính tổng quát, ta có thể chọn $a_{i_0 j_0} = 1$). Nếu $j_0 > 2$, để triệt tiêu $-a_{i_0 j_0} \beta \wedge \alpha_{i_0} \wedge \beta_{j_0-1}$ phải có $a_{i_0-1, j_0-1} = a_{i_0, j_0} \neq 0$, mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của i_0 . Do đó $j_0 = 2$. Nếu $i_0 = 1$ thì

$$\{I, \alpha_{i_0} \wedge \beta_{j_0}\} = \{I, \alpha_1 \wedge \beta_2\} = \beta \wedge \alpha_2 \wedge \beta_2 - \beta \wedge \alpha_1 \wedge \beta_1$$

khi đó ta không thể triệt tiêu $-\beta \wedge \alpha_1 \wedge \beta_1$, vô lí. Nên $i_0 > 1$. Do

$$\{I, \alpha_{i_0} \wedge \beta_{j_0}\} = \beta \wedge \alpha_{i_0+1} \wedge \beta_{j_0} - \beta \wedge \alpha_{i_0} \wedge \beta_1$$

nên $b_{i_0-1} = a_{i_0 j_0}$, $a_{i_1 j_1} = a_{i_0 j_0}$ với $i_1 = i_0 + 1, j_1 = j_0 + 1$. Ta lại có

$$\{I, \alpha_{i_1} \wedge \beta_{j_1}\} = \beta \wedge \alpha_{i_1+1} \wedge \beta_{j_1} - \beta \wedge \alpha_{i_1} \wedge \beta_{j_1-1}$$

nên $a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_1}$ với $i_2 = i_1 + 1, j_2 = j_1 + 1$. Tiếp tục quá trình này đến lúc nào đó, ta được $a_{i, j_0} = a_{i_{s-1} j_{s-1}}$ với $i_s = i_{s-1} + 1 = i_0 + s, j_s = j_{s-1} + 1 = s + 2$ sao cho $i_0 + s = n - 1$ hoặc $s + 3 = n$.

Nếu $i_0 + s \leq n - 1$ và $s + 2 = n$ thì

$$\{I, \alpha_{i_0} \wedge \beta_{j_0}\} = \beta \wedge \alpha_{i_0+1} \wedge \beta_n - \beta \wedge \alpha_{i_0} \wedge \beta_{n-1}$$

ta không thể triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_{i_0+1} \wedge \beta_n$ nên trường hợp này không xảy ra.

Nếu $i_0 + s = n - 1$ và $s + 2 < n$ thì

$$\{I, \alpha_{i_0} \wedge \beta_{j_0}\} = \beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{j_0} - \beta \wedge \alpha_{n-1} \wedge \beta_{j_0-1}$$

Để triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{j_0}$ cần chọn $c_{j_0+1} = a_{ie_{j_0}}$. Do đó để có $\omega \in \ker \{I, V \wedge W\}$ ta phải có $i_0 > 1, s \geq 0$, sao cho $i_0 + s = n - 1$ và $s + 2 < n$. Điều này tương đương với $1 < i_0 \leq n - 1$. Ta chỉ cần chọn $i_0 = 2, \dots, n - 1$. Do đó

$$\ker \{I, V \wedge W\} = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \wedge \beta_1 + \alpha_2 \wedge \beta_2 + \dots + \alpha_n \wedge \beta_n, \dots, \\ \alpha_{n-2} \wedge \beta_1 + \alpha_{n-1} \wedge \beta_2 + \alpha_n \wedge \beta_3, \alpha_{n-1} \wedge \beta_1 + \alpha_n \wedge \beta_2, \alpha_n \wedge \beta_1 \end{array} \right\}$$

$$\text{hay } \ker \{I, V \wedge W\} = \text{span} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \wedge \beta_i, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i, \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_{i+2} \wedge \beta_i, \dots, \alpha_n \wedge \beta_1 \right\}.$$

(6) Trên $\langle \alpha \wedge \beta \rangle$, ta có $\{I, \alpha \wedge \beta\} = \beta \wedge \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i \right)$ thuộc $\{I, (V \wedge W)\}$.

Đồng thời, ta tính được $\{I, \alpha \wedge \beta - \sum_{i=1}^n (n+1-i) \alpha_i \wedge \beta_i\} = 0$ nên $\alpha \wedge \beta - \sum_{i=1}^n (n+1-i) \alpha_i \wedge \beta_i \in \ker \{I, \cdot\}$

Hệ quả 2.2.2.4 Số Bettti của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_{2n} :

$$b_2(i_{2n}) = n + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2.$$

2.3 Số Bettti của đại số Lie lũy linh kiểu Jordan J_{2n+1}

2.3.1 Đối đồng điều thứ hai của $j_3(n=1)$

Xét đại số Lie lũy linh kiểu Jordan j_3 , ta có các tích Lie khác không như sau: $[Y_0, T] = X_1, [Y_0, Y_1] = -T, [T, Y_1] = X_0$. Dạng song tuyến tính xác định bởi $B(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0, 2}, B(T, T) = 1$. Gọi $\{\alpha, \beta, \alpha_1, \gamma, \beta_1\}$ là cơ sở đối ngẫu của $\{X_0, Y_0, X_1, T, Y_1\}$.

Mệnh đề 2.3.1.1. 3-dạng liên kết với j_3 được xác định bởi $I = \beta \wedge \gamma \wedge \beta_1$.

Hệ quả 2.3.1.2.

1. $B^2(j_3) = \text{span} \{\gamma \wedge \beta_1, \beta \wedge \beta_1, \beta \wedge \gamma\}$ và $\dim B^2(j_3) = 3$.
2. $H^2(j_3) = \text{span} \{[\beta \wedge \alpha_1], [\beta_1 \wedge \alpha], [\beta \wedge \alpha - \beta_1 \wedge \alpha_1]\}$ và $b_2(j_3) = 3$.

2.3.2 Đối đồng điều thứ hai của j_{2n+1} với $n \geq 2$.

Xét đại số Lie lũy linh kiểu Jordan j_{2n+1} với $n \geq 2$, ta có các tích Lie $[Y_0, X_2] = X_1, \dots, [Y_0, X_n] = X_n - 1, [Y_0, Y_1] = -Y_2, \dots, [Y_0, Y_n - 1] = -Y_n, [Y_0, Y_n] = -T, [X_2, Y_1] = X_0, [X_3, Y_2] = X_0, \dots, [X_n - 1, Y_n - 2] = X_0, [X_n, Y_n - 1] = X_0$. Dạng song tuyến tính xác định bởi $B(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0, n}, B(T, T) = 1$. Gọi $\{\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ là cơ sở đối ngẫu của $\{X_0, Y_0, X_1, \dots, X_n, T, Y_1, \dots, Y_n\}$ và $V = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, W = \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Mệnh đề 2.3.2.1. 3-dạng liên kết với j_{2n+1} được xác định bởi: $I = \beta \wedge \Omega$.

Hệ quả 2.3.2.2. $B^2(j_{2n+1}) = \text{span}\{\Omega, \beta \wedge \alpha_{i+1}, \beta \wedge \beta_j, \beta \wedge \gamma : i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}\}$ và $\dim B^2(j_{2n+1}) = 2n + 1$.

Định lí 2.3.2.3. $C^2(j_{2n+1})$ được phân tích thành tổng trực tiếp các không gian các 2 dạng:

$$\alpha \wedge (V \oplus W), \beta \wedge (V \oplus W), \langle \alpha \wedge \gamma \rangle, \langle \beta \wedge \gamma \rangle, \wedge^2(V), \wedge^2(W),$$

$$((V \oplus \gamma \oplus W) \wedge W) \setminus (\wedge^2 W), \gamma \wedge V, \langle \alpha \wedge \beta \rangle.$$

Ta có kết quả như sau:

$$Z^2(j_{2n}) = \beta \wedge (V \oplus W) \oplus \langle \beta \wedge \gamma \rangle \oplus \ker\{I, \wedge^2(W)\}$$

$$\oplus ((V \oplus \gamma \oplus W) \wedge W) \setminus (\wedge^2 W) \oplus \left\langle \alpha \wedge \beta - \sum_{i=1}^n (n+1-i) \alpha_i \wedge \beta_i \right\rangle.$$

Chúng minh:

Sau đây ta tính toán toán tử $\{I, .\}$ trên các hạng tử trực tiếp này.

(1) Trên $\alpha \wedge (V \oplus W), \ker\{I, \alpha \wedge (V \oplus W)\} = \{0\}$.

(2) Trên $\beta \wedge (V \oplus W), \ker\{I, \beta \wedge (V \oplus W)\} = \{2n\}$.

(3) Trên $\langle \alpha \wedge \gamma \rangle$, ta có $\{I, \alpha \wedge \gamma\} = \gamma \wedge \sum_{i=1}^{n-1} \wedge \beta_i - \alpha \wedge \beta \wedge \beta_n$.

$\sum_{i=2}^{n-1} x_i (\beta \wedge \beta_n \wedge \beta_i + \beta \wedge \gamma \wedge \beta_{i-1}) - y \cdot \beta \wedge \gamma \wedge \beta_{n-1} - z \beta \wedge \beta_n \wedge \beta_1 = 0$ Để triệt tiêu $\beta \wedge \gamma \wedge \beta_n$ ta phải có $c_n = 0$. Ta có

$$\{I, c_n \cdot \alpha_n \wedge \beta_n\} = c_n (\beta \wedge \gamma \wedge \beta_n - \beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{n-1})$$

Để triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{n-1}$ ta phải có $c_n = a_{n-1,n-1}$. Ta có

$$\{I, a_{n-1,n-1} \cdot \alpha_{n-1} \wedge \beta_{n-1}\} = a_{n-1,n-1} (\beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{n-1} - \beta \wedge \alpha_{n-1} \wedge \beta_{n-2})$$

Tiếp tục triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_{n-1} \wedge \beta_{n-2}$, ta có $a_{n-1,n-1} = a_{n-2,n-2}$. Tiếp tục quá trình triệt tiêu này, ta được $0 = c_n = a_{n-1,n-1} = a_{n-2,n-2} = a_{n-3,n-3} = \dots = a_{2,2} = b_1$. Để triệt tiêu $\beta \wedge \gamma \wedge \beta_{n-1}$ ta phải có $y = c_{n-1}$. Ta có

$$\{I, c_{n-1} \cdot \alpha_n \wedge \beta_{n-1}\} = c_{n-1} (\beta \wedge \gamma \wedge \beta_{n-1} - \beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{n-2})$$

Để triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{n-2}$ ta phải có $c_{n-1} = a_{n-1,n-2}$. Ta có

$$\{I, a_{n-1,n-2} \cdot \alpha_{n-1} \wedge \beta_{n-2}\} = a_{n-1,n-2} (\beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{n-2} - \beta \wedge \alpha_{n-1} \wedge \beta_{n-3})$$

Lập luận tương tự như trên ta được

$$y = c_{n-1} = a_{n-1,n-2} = a_{n-2,n-3} = a_{n-3,n-4} = \dots = a_{3,2} = b_2.$$

$$0 = x_{n-1} = c_{n-2} = a_{n-1,n-3} = a_{n-2,n-4} = a_{n-3,n-5} = \dots = a_{4,2} = b_3.$$

Chú ý rằng để triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_1 \wedge \beta_1$, ta phải có $a_{1,2} = 0$. Giả sử $k > 1$ sao cho $x_{n-k} \neq 0$. Để triệt tiêu

$$\{I, x_{n-k} \cdot \gamma \wedge \beta_{n-k}\} = -x_{n-k} (\beta \wedge \beta_n \wedge \beta_{n-k} + \beta \wedge \gamma \wedge \beta_{n-k-1}),$$

ta phải có:

(a) $x_{n-k} = c_{n-k-1}$. Ta có

$$\{I, c_{n-k-1} \cdot \alpha_n \wedge \beta_{n-k-1}\} = c_{n-k-1} (\beta \wedge \gamma \wedge \beta_{n-k-1} - \beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{n-k-2})$$

Để triệt tiêu $\beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{n-k-2}$ ta phải có $c_{n-k-1} = x_{n-1,n-k-1}$, từ đó dẫn tới

$$x_{n-k} = c_{n-k-1} = a_{n-1,n-k-1} = a_{n-2,n-k-2} = a_{n-3,n-k-3} = \dots = a_{k,2} = b_{k-1}$$

(b) $x_{n-k} = a'_{n-k+1,n}$. Ta có

$$\{I, a'_{n-k+1,n} \beta_{n-k+1,n} \wedge \beta_n\} = -a'_{n-k+1,n} (\beta \wedge \beta_{n-k} \wedge \beta_n + \beta \wedge \beta_{n-k+1} \wedge \beta_{n-1})$$

Để triệt tiêu $\beta \wedge \beta_{n-k+1} \wedge \beta_{n-1}$ ta phải có $a'_{n-k+1,n} = -a'_{n-k+2,n-1}$, từ đó suy ra

$$x_{n-k} = a'_{n-k+1,n} = -a'_{n-k+2,n-1} = a'_{n-k+3,n-2} = \dots = (-1)^l a'_{n-k+1+l,n-l},$$

trong đó $n - k + 1 + l + 3 = n - l$ hoặc $n - k + 1 + l + 2 = n - l$.

- Nếu $n - k + 1 + l + 3 = n - l$, ta viết lại $k = 2l + 4$, đặt $n - k + 1 + l = m$, ta có $\{I, a'_{m,m+3} \cdot \beta_m \wedge \beta_{m+3}\} = -a'_{m,m+3} (\beta \wedge \beta_{m-1} \wedge \beta_{m+3} + \beta \wedge \beta_m \wedge \beta_{m+2})$

Nên $a'_{m,m+3} = -b'_{m+1}$ và $\{I, b'_{m+1} \cdot \beta_{m+1} \wedge \beta_{m+2}\} = -b'_m \beta \wedge \beta_m \wedge \beta_{m+2}$. Đến đây ta triệt tiêu được tất cả nên trường hợp k chẵn này nhận.

- Nếu $n - k + 1 + l + 2 = n - l$, ta viết lại $k = 2l + 3$, đặt $n - k + 1 + l = m$, ta có

$$\{I, a'_{m,m+2} \cdot \beta_m \wedge \beta_{m+2}\} = -a'_{m,m+2} (\beta \wedge \beta_{m-1} \wedge \beta_{m+2} + \beta \wedge \beta_m \wedge \beta_{m+1})$$

Đến đây ta không thể triệt tiêu $\beta \wedge \beta_m \wedge \beta_{m+1}$. Do đó trường hợp k lẻ không xảy ra. Cụ thể hơn, ta tìm những 2-dạng triệt tiêu qua tác động của toán tử $\{I, .\}$ bằng cách xét hai trường hợp của n .

$$\begin{aligned} & \text{(i) Nếu } n \text{ chẵn, } n = 2p : \ker \{I, ((V \oplus \gamma \oplus W) \wedge W) \setminus (\wedge^2 W)\} \\ &= \text{span} \left\{ \gamma \wedge \beta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i, \gamma \wedge \beta_{n-2} + \sum_{i=1}^{n-3} \alpha_{i+3} \wedge \beta_i - \beta_{n-1} \wedge \beta_n \right. \\ & \quad \left. \dots, \gamma \wedge \beta_2 + \alpha_{2p} \wedge \beta_1 - \beta_3 \wedge \beta_{2p} + \beta_4 \wedge \beta_{2p-1} + \dots + (-1)^{(p-2)} \beta_{p-2} \wedge \beta_{p-1} \right\}. \end{aligned}$$

Do đó $\dim \ker \{I, ((V \oplus \gamma \oplus W) \wedge W) \setminus (\wedge^2 W)\} = p$.

$$\begin{aligned} & \text{(ii) Nếu } n \text{ lẻ, } n = 2p + 1 : \ker \{I, ((V \oplus \gamma \oplus W) \wedge W) \setminus (\wedge^2 W)\} \\ &= \text{span} \left\{ \gamma \wedge \beta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i, \gamma \wedge \beta_{n-2} + \sum_{i=1}^{n-3} \alpha_{i+3} \wedge \beta_i + \beta_n \wedge \beta_{n-1} \right. \\ & \quad \dots, \gamma \wedge \beta_3 + \alpha_{2p} \wedge \beta_1 + \alpha_{2p+1} \wedge \beta_2 - \beta_4 \wedge \beta_{2p+1} + \beta_5 \wedge \beta_{2p} - \dots + (-1)^{p+3} \beta_{p+2} \wedge \beta_{p+3}, \\ & \quad \left. \gamma \wedge \beta_1 - \beta_2 \wedge \beta_{2p+1} + \beta_3 \wedge \beta_{2p} - \beta_4 \wedge \beta_{2p-1} + \dots + (-1)^{p-1} \beta_{p-2} \wedge \beta_{p-1} \right\} \end{aligned}$$

Do đó $\dim \ker \{I, ((V \oplus \gamma \oplus W) \wedge W) \setminus (\wedge^2 W)\} = p + 1$. Nói chung cả hai trường hợp của n ta đều nhận được

$$\dim \ker \{I, ((V \oplus \gamma \oplus W) \wedge W) \setminus (\wedge^2 W)\} = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

(7) Trên $\gamma \wedge V$, $\{I, \gamma \wedge \alpha_i\} = -\beta \wedge \beta_n \wedge \alpha_i + \beta \wedge \gamma \wedge \alpha_{i+1}$ với $i = \overline{1, n-1}$ và

$$\{I, \gamma \wedge \alpha_n\} = -\beta \wedge \beta_n \wedge \alpha_n$$

nên $\{I, \gamma \wedge V\} \subset (\beta \wedge \beta_n \wedge V) \oplus (\beta \wedge \gamma \wedge V)$. Giả sử

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \gamma \wedge \alpha_i + b \cdot \gamma \wedge \alpha_n \in \ker\{I, \gamma \wedge V\}.$$

Ta có $\{I, \omega\} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i (\beta \wedge \beta_n \wedge \alpha_i + \beta \wedge \gamma \wedge \alpha_{i+1}) - b \cdot \beta \wedge \beta_n \wedge \alpha_n = 0$. Do đó $b = 0$ dẫn đến $a_i = 0$. Vì vậy $\ker\{I, \gamma \wedge V\} = \{0\}$.

(8) Trên $\langle \alpha \wedge \beta \rangle$, ta có $\{I, \alpha \wedge \beta\} = \beta \wedge \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i \right) \in \{I, (V \wedge W)\}$. Đồng thời, ta tính được $\{I, \alpha \wedge \beta - \sum_{i=1}^n (n+1-i) \alpha_i \wedge \beta_i\} = 0$ nên

$$\alpha \wedge \beta - \sum_{i=1}^n (n+1-i) \alpha_i \wedge \beta_i \in \ker\{I, \cdot\}.$$

Hệ quả 2.3.2.4. Số Betti của đại số lũy linh kiểu Jordan J_{2n+1} :

$$\dim Z^2(j_{2n}) = 2n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 2,$$

$$b_2(j_{2n+1}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$$

.

Tài liệu tham khảo

- [1] Cao Trần Tứ Hải và Dương Minh Thành (2015), "Số Betti và không gian đạo hàm phản xứng của các đại số Lie toàn phương giải được số chiều ≤ 7 ", Tạp chí khoa học Trường ĐHSP Thành phố Hồ Chí Minh, **số 5(70)**, tr86- tr96.
- [2] Bordemann, M. T. (1997), "Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras", Acta. Math. Uni. Comenianae, **XLVI**(2), 151 - 201.
- [3] Duong, M. T., Pinczon, G. Ushirobata, R. (2012). A new invariant of quadratic Lie algebras. Alg. and Rep. Theory, 15(6), 1163-1203.
- [4] Favre, G., Santharoubane, L. J. (1987). Symmetric, invariant, non-degenerate bilinear form on a Lie algebra. J. Algebra, 105, 451-464.
- [5] Figueroa-O'Farrill, J. M., Stanciu, S. (1996). On the structure of symmetric self-dual Lie algebras. J. Math. Phys, 37, 4121-4134.
- [6] Fac, V. (1985) Infinite-dimensional Lie algebras. Cambridge University Press, New York.
- [7] Medina, A., Revoy, P. (1985). Algèbres de Lie et produit scalaire invariant. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 4ème sér. 18, 553-561.
- [8] Pinczon, G., Ushirobata, R. (2007). New Applications of Graded Lie Al-

gebras to Lie Algebras, Generalized Lie Algebras, and Cohomology. J. Lie Theory, 17, 633-667.

[9] Pouseele, H. (2005). On the cohomology of extensions by a Heisenberg Lie algebra. Bull. Austral. Math. Soc., 71, 459-470.

[10] Santharoubane, L. J. (1983). Cohomology of Heisenberg Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 87, 23-28.