BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

TRẦN QUANG VINH

ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI NGHIỆM CỦA MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An, tháng 06 năm 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

TRẦN QUANG VINH

ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI NGHIỆM CỦA MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Chuyên ngành: **ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ**
Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN HỮU QUANG

Nghệ An, tháng 06 năm 2022

Mục lục

1 Kiến thức chuẩn bị **6**
1.1 Các ký hiệu và tính chất cơ bản 6
1.2 Tập afin 7
1.3 Tập lồi 8
1.4 Nón 9
1.5 Ánh xạ bậc hai 10
1.6 Ma trận giả nghịch đảo Moore–Penrose 11

2 Điều kiện có nghiệm của một số hệ phương trình **13**
2.1 Các kết quả liên quan đến SD and ND 14
2.2 Điều kiện có nghiệm của một số hệ phương trình, bất phương trình bậc hai 21

Tài liệu tham khảo **47**

LỜI NÓI ĐẦU

Điều kiện có nghiệm của phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương đại số là một trong những vấn đề quan trọng trong Đại số, đặc biệt chúng có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế. Cho đến nay phần lớn các kết quả đạt được là cho trường hợp phương trình đa thức bậc k một biến số. Tình hình trở nên phức tạp hơn nếu chúng ta xem xét vấn đề này với hệ phương trình, hệ bất phương trình đa thức nhiều biến. Do đó trong khuôn khổ luận văn này chúng tôi nghiên cứu về vấn đề tồn tại nghiệm của một số hệ phương trình, bất phương trình bậc hai nhiều biến.

Trên cơ sở bài báo [6] và các tài liệu tham khảo [8, 11, 7], chúng tôi lựa chọn đề tài: "**Điều kiện tồn tại nghiệm của một số hệ phương trình, bất phương trình bậc hai**". Cụ thể chúng tôi tập trung vào tìm hiểu các hệ có dạng sau

$$(\mathbf{B_1}) : \begin{cases} x^T Ax + 2a^T x + a_0 < 0 \\ x^T Bx + 2b^T x + b_0 \leq 0 \end{cases} ; \ (\mathbf{B_2}) : \begin{cases} x^T Ax + 2a^T x + a_0 < 0 \\ x^T Bx + 2b^T x + b_0 = 0 \end{cases},$$

trong đó A, B là các ma trận đối xứng cấp n, a, b là các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$, a_0, b_0 là các số thực.

Nội dung luận văn được chia ra thành hai chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhằm mục đích trình bày một số kiến thức liên quan đến nội dung Chương 2, chủ yếu chúng tôi tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 6, 3].

Chương 2. Điều kiện tồn tại nghiệm của một số hệ phương trình, bất phương trình bậc hai
Chương này trình bày một cách có hệ thống hướng tiếp cận bài toán bằng việc sử dụng tính chất của tập ảnh của ánh xạ bậc hai dạng

$$F(x) = (x^T Ax + a^T x + a_0, x^T Bx + b^T x + b_0).$$

Qua đó ứng dụng vào bài toán tìm điều kiện cần và đủ để các hệ $\mathbf{B_1}$ và $\mathbf{B_2}$ vô nghiệm.

Luận văn này được thực hiện dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Hữu Quang, nhân dịp này tác giả xin gửi lời cảm ơn đến thầy giáo hướng dẫn. Tác giả cũng được xin gửi lời cảm ơn đến các nhà giáo, nhà khoa học thuộc Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, Khoa Toán học, Trường Sư phạm - Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho chúng tôi hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu.

Xin gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn đã tạo điều kiện về thời gian, tinh thần và vật chất cho chúng tôi để hoàn thành nhiệm vụ học tập sau đại học.

Mặc dù tác giả đã hết sức cố gắng trình bày một cách chi tiết những nội dung chuyên sâu một cách chặt chẽ, nhưng với kiến thức và thời gian có hạn nên luận văn này không tránh khỏi những sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô giáo và của các bạn học viên lớp sau đại học ngành toán để chúng tôi thu được một bản luận văn hoàn thiện hơn.

Nghệ An, tháng 6 năm 2022

Tác giả

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Các ký hiệu và tính chất cơ bản

Cho trước một tập $K \subseteq \mathbb{R}^n$, Bao đóng của K ký hiệu là $\bar{K}$; Phần trong của K ký hiệu là $\mathrm{Int}K$; Phần trong tương đối của K ký hiệu là $\mathrm{ri}K$; Biên của K ký hiệu là $\mathrm{bd}K$; Phần bù của K ký hiệu là $\mathcal{C}(K)$. Ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$, tức $\langle a, b \rangle = a^\top b$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}^n$. Ký hiệu $K^\perp$ là không gian con bù trực giao với K, nghĩa là $K^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in K\}$; trong trường hợp $K = \{u\}$, ta ký hiệu $K^\perp$ đơn giản bởi $u^\perp$.

Cho trước ma trận A cỡ $m \times n$, $A^\top$ là ký hiệu của ma trận chuyển vị của A. Tập tất các ma trận đối xứng cấp n được ký hiệu bởi $\mathcal{S}^n$.

Ta nói rằng hai ma trận A, B trong $\mathcal{S}^n$ có tính chất *chéo hóa được đồng thời*, ký hiệu SD (Simultaneous Diagonalization), nếu tồn tại ma trận không suy biến C sao cho cả hai $C^\top AC$ và $C^\top BC$ đều có dạng đường chéo.

Một ma trận đối xứng A là xác định dương, tức $\langle Ax, x \rangle > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ (nửa xác định dương, tức $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$) được ký hiệu bởi $A \succ 0$ (tương ứng $A \succeq 0$). Tập tất cả các ma trận xác định dương, nửa xác định dương được ký hiệu lần lượt là $\mathcal{S}^n_{++}$ và $\mathcal{S}^n_{+}$.

Ta có các kết quả cơ bản về ma trận xác định dương và nửa xác định dương như sau.

Định lí 1.1.1. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

(1) Ma trận đối xứng A là nửa xác định dương;

(2) Mọi giá trị riêng của A là không âm;

(3) Tồn tại ma trận B sao cho $A = B^T B$.

Định lí 1.1.2. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

(1) Ma trận đối xứng A là xác định dương;

(2) Mọi giá trị riêng của A là dương;

(3) Tồn tại ma trận B không suy biến sao cho $A = B^T B$.

Định lí 1.1.3 (Schur's complement)**.** *Cho $A \succ 0$. Khi đó*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C - B^T A^{-1} B \succeq 0.$$

Định nghĩa 1.1.4. Cặp ma trận A và B được gọi là không suy biến, ký hiệu là (ND), nếu

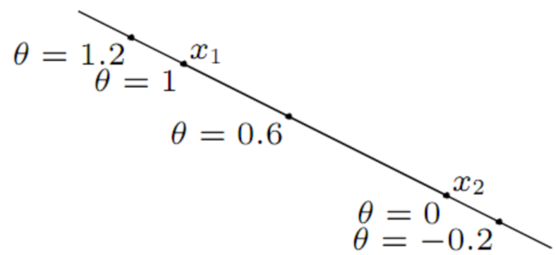
$$\langle Au, u\rangle = 0 = \langle Bu, u\rangle \Longrightarrow u = 0. \tag{1.1}$$

1.2 Tập afin

Định nghĩa 1.2.1. Đường thẳng đi qua hai điểm $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ là tập tất cả các điểm x có dạng (xem Hình 1.2)

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \ (\theta \in \mathbb{R}).$$

Tập afin là tập chứa tất cả các đường thẳng đi qua hai điểm của tập đó.



Ví dụ 1.2.2. Tập tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ là một tập afin. Ngược lại, cho trước tập afin D, luôn tồn tại một hệ phương trình tuyến tính mà nó có tập nghiệm là D.

1.3 Tập lồi

Định nghĩa 1.3.1. Một tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu mọi $t \in [0, 1]$ và $x, y \in A$ thì $tx + (1-t)y$ cũng thuộc tập A.

Nhận xét 1.3.2. Một tính chất cơ bản nhưng khá quan trọng để kiểm tra tính lồi của tập con $A \subset \mathbb{R}^n$, (được suy ra ngay từ Định nghĩa 1.3.1): tập $A \subset \mathbb{R}^n$ là lồi nếu và chỉ nếu $A \cap H_u^a$ là lồi với mọi siêu phẳng afin $H_u^a \subset \mathbb{R}^n$.

Giao của một họ các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ là một tập lồi. Do đó tồn tại một tập lồi bé nhất chứa tập con bất kỳ $A \subset \mathbb{R}^n$, nó là giao của tất cả các tập lồi chứa A.

Định nghĩa 1.3.3. Bao lồi của một tập $A \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi bé nhất trong $\mathbb{R}^n$ chứa A, nó được ký hiệu bởi $\mathrm{Conv}(A)$.

Nhận xét 1.3.4. Định nghĩa 1.3.3 suy ra rằng A là lồi nếu và chỉ nếu $A = \mathrm{Conv}(A)$. Mặc dù nhận xét này là khá hiển nhiên nhưng nó khá hữu dụng trong một số trường hợp, nó cung cấp một cách để kiểm tra tính lồi của $A \subset \mathbb{R}^n$.

Từ định nghĩa của $\mathrm{Conv}(A)$, ta có

$$\mathrm{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i : a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}. \tag{1.2}$$

Từ (1.2) ta dễ dàng suy ra rằng $\mathrm{Conv}(L(A)) = L(\mathrm{Conv}(A))$ đúng cho với mọi ánh xạ tuyến tính $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và mọi $A \subset \mathbb{R}^n$.

Bổ đề sau nói về một số tính chất liên quan đến tập lồi và bao lồi.

Bổ đề 1.3.5. *Giả sử $A \subset \mathbb{R}^n$, khi đó*

(i) Nếu A là tập compact thì $\mathrm{Conv}(A)$ *cũng là tập compact;*

(ii) Nếu A là lồi thì bao đóng của nó cũng lồi;

(iii) Nếu A là lồi và có phần trong khác rỗng thì phần trong của A cũng là một tập lồi.

1.4 Nón

Định nghĩa 1.4.1. Tập hợp $K \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là nón nếu với mọi $\lambda \in \mathbb{R}^+$ và mọi $x \in K$, λx cũng thuộc tập K.

Nhận xét 1.4.2. Cho trước tập K bất kỳ, ta đặt $\mathrm{cone}(K) \doteq \bigcup_{t \geq 0} tK$, dễ thấy $\mathrm{cone}(K)$ là cái nón bé nhất chứa K và $\overline{\mathrm{cone}}(K) \doteq \overline{\bigcup tK}$. Trong trường hợp K là tập một điểm $\{u\}$, ta ký hiệu $\mathrm{cone}K = \mathbb{R}_+ u$ và $\mathbb{R}u \doteq \{tu : t \in \mathbb{R}\}$.

Định nghĩa 1.4.3. Nón đối cực của K, ký hiệu K^*, là tập được xác định như sau

$$K^* \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, a \rangle \geq 0 \quad \forall a \in K\}.$$

Tập lồi K được gọi là nhọn nếu $P \cap (-P) = \{0\}$.

1.5 Ánh xạ bậc hai

Cho trước một hàm bậc hai dạng

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle a, x \rangle + k_1$$

trong đó $A \in \mathcal{S}^n, a \in \mathbb{R}^n$ và $k_1 \in \mathbb{R}$, ta đặt

$$f_H(x) \doteq \langle Ax, x \rangle, \quad f_L(x) \doteq \langle a, x \rangle.$$

Nếu $g(x)$ là một hàm bậc hai khác

$$g(x) = \langle Bx, x \rangle + \langle b, x \rangle + k_2,$$

trong đó $B \in \mathcal{S}^n, b \in \mathbb{R}^n$ và $k_2 \in \mathbb{R}$, ta đặt

$$z_{u,v} \doteq \begin{pmatrix} \langle Au, v \rangle \\ \langle Bu, v \rangle \end{pmatrix}, \quad F_H(u) \doteq \begin{pmatrix} f_H(u) \\ g_H(u) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Kết quả sau đây liên quan đến tập ảnh của ánh xạ thuần nhất bậc hai.

Định lí 1.5.1 ([8], Định lý 1)**.** *Với $m \geq 2$ thì tập $F_H(R^n)$ là một nón lồi. Hơn nữa, nếu* (1.1) *đạt được thì hoặc $F_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^2$ hoặc $F_H(\mathbb{R}^n)$ là đóng và là cái nón nhọn.*

Với $f(x), g(x)$ là các hàm bậc hai tổng quát thì tập $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ trong đó $F(x) = (f(x), g(x))^T$ có thể không lồi, ví dụ sau đây khẳng định điều này.

Ví dụ 1.5.2. Xem xét $f\left(x_1, x_2\right) = x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2, g\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 1$, và ta xác định tập

$$M \doteq \left\{\left(f\left(x_1, x_2\right), g\left(x_1, x_2\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : \left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Rõ ràng $(0,0) = (f(0,1), g(0,1)) \in M$ và $(-2,0) = (f(-1,0), g(-1,0)) \in M$, nhưng $(-1,0) = \frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(-2,0) \notin F\left(\mathbb{R}^2\right)$. Ta thấy ngay rằng

$$F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}_+(-1,1), \text{ and } F\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{\left(t - t^2, t^2 - 1\right) : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Một ví dụ khác, Ví dụ 2.2.3, trong đó

$$F\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{(0,0\right\} \cup \left[\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R} \times \{0\})\right], \quad F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Chú ý rằng $F\left(\mathbb{R}^2\right) + \mathbb{R}_+ d$ vẫn không lồi, trong đó $-d \in \operatorname{bd} F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$.

1.6 Ma trận giả nghịch đảo Moore–Penrose

Định nghĩa 1.6.1. Cho trước ma trận A cỡ $m \times n$, ma trận giả nghịch đảo của A, ký hiệu A^+, là ma trận thỏa mãn đồng thời bốn điều kiện sau đây

(P1) $AA^+A = A$;

(P2) $A^+AA^+ = A^+$;

(P3) $(AA^+)^T = AA^+$;

(P4) $(A^+A)^T = A^+A$.

Định lí 1.6.2 ([4])**.** *Với mọi ma trận A, ma trận giả nghịch đảo A^+ luôn tồn tại và duy nhất và nó được xác định như sau*

$$\begin{aligned} A^+ &= \lim_{\delta \to 0} \left(A^T A + \delta^2 I\right)^{-1} A^T \\ &= \lim_{\delta \to 0} A^T \left(A A^T + \delta^2 I\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.6.3. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, dễ thấy rằng A là một ma trận suy biến, do đó không tồn tại A^{-1}, nhưng ma trận giả nghịch đảo của nó là $A^+ = \dfrac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Chương 2

Điều kiện có nghiệm của một số hệ phương trình

Cho đến nay có nhiều hướng để tiếp cận bài toán điều kiện tồn tại nghiệm của các hệ phương trình bất phương trình bậc hai có dạng sau:

$$(\mathbf{B_1}) : \begin{cases} f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0 < 0 \\ g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0 \leq 0 \end{cases} ; \tag{2.1}$$

$$(\mathbf{B_2}) : \begin{cases} f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0 < 0 \\ g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0 = 0 \end{cases} , \tag{2.2}$$

trong đó A, B là các ma trận đối xứng cấp n, a, b là các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$, a_0, b_0 là các số thực.

Chúng tôi chọn tìm hiểu cách tiếp cận thông qua ảnh của ánh xạ đa thức bậc hai $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2, F(x) = (f(x), g(x))$.

2.1 Các kết quả liên quan đến SD and ND

Trong phần này chúng tôi dùng các ký hiệu sau: $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, đặt $u_\perp \doteq (-u_2, u_1)$, khi đó $\|u\| = \|u_\perp\|$ và $\langle u_\perp, u\rangle = 0$.

Mệnh đề 2.1.1. *Cho trước $u, v \in \mathbb{R}^2$. Ta có các khẳng định sau*
(a) $\langle v_\perp, u\rangle = -\langle u_\perp, v\rangle$;
(b) $\langle v_\perp, u\rangle \neq 0 \Longleftrightarrow \{u, v\}$ *là độc lập tuyến tính;*
(c) Giả sử $\{u, v\}$ là độc lập tuyến tính thì
(c1) $h = t_1u + t_2v, t_2 \geq 0$ *(tương ứng $t_2 > 0$)* $\Longleftrightarrow \langle u_\perp, v\rangle \langle u_\perp, h\rangle \geq 0$ *(tương ứng > 0);*
(c2) $h = t_1u + t_2v, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \Longleftrightarrow \langle u_\perp, v\rangle \langle u_\perp, h\rangle \geq 0$ *và* $\langle v_\perp, u\rangle \langle v_\perp, h\rangle \geq 0$*;*

Bổ đề sau đây rất hữu ích trong việc nghiên cứu ảnh của ánh xạ đa thức bậc hai.

Bổ đề 2.1.2. *Giả sử X là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ và h_1 là một phần tử của $\mathbb{R}^2$ sao cho*

$$F(X) + \mathbb{R}h + \mathbb{R}_+h_1 \subseteq F(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

Khi đó $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:
(a) $\{h_1, h\}$ là độc lập tuyến tính và $\bar{X} = \mathbb{R}^n$;
(b) $\{h_1, h\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $X = \mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Giả sử $0 < t < 1$ và $x, y \in \mathbb{R}^n$ với $F(x) \neq F(y)$. Ta sẽ chứng minh đẳng thức sau là đúng

$$f_t \doteq tF(x) + (1-t)F(y) \in F(\mathbb{R}^n).$$

(a): Bởi giả thiết $\langle h_\perp, h_1\rangle \neq 0$, và do đó, từ (2.3) và Mệnh đề 2.1.1 ta có, với mọi $x_0 \in X$,

$$H\left(x_0\right) \doteq \left\{u : \langle h_\perp, h_1\rangle \langle h_\perp, u - F\left(x_0\right)\rangle > 0\right\} \subseteq F\left(\mathbb{R}^n\right). \qquad (2.4)$$

Bổ đề là đúng nếu ta chứng minh được:

$$f_t \doteq tF(x) + (1-t)F(y) \in H\left(x_0\right),$$

với x_0 nào đó trong X.

Ta xét 2 trường hợp đặc biệt $(a1) : \langle h_\perp, h_1\rangle \langle h_\perp, F(y) - F(x)\rangle > 0$ (trường hợp "$<$" được thực hiện tương tự). Vì

$$\langle h_\perp, h_1\rangle \langle h_\perp, f_t - F(x)\rangle > 0,$$

bởi tính trù mật và liên tục, ta có $\bar{x} \in X$ gần x sao cho $f_t \in H(\bar{x})$, và do đó $f_t \in F\left(\mathbb{R}^n\right)$ nhận được từ (2.4).

$(a2) : \langle h_\perp, h_1\rangle \langle h_\perp, F(y) - F(x)\rangle = 0$. Ta xem xét hàm số $q_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ và $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$q_1(\lambda) \doteq F(\lambda x + (1-\lambda)y), \quad q(\lambda) \doteq \langle h_\perp, h_1\rangle \langle h_\perp, q_1(\lambda) - F(x)\rangle.$$

Rõ ràng q là hàm bậc hai thỏa mãn $q(0) = q(1) = 0$. Trước tiên ta xem xét trường hợp $q \equiv 0$. Bởi tính liên tục, $q_1([0,1])$ là tập liên thông nằm trong đường thẳng $F(x) + \mathbb{R}h$ đi qua $F(x)$ và $F(y)$. Do đó, $f_t \in q_1([0,1]) \subseteq F\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Bây giờ ta xét trường hợp $q \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $q\left(\lambda_1\right) < 0$, nghĩa là, $\langle h_\perp, h_1\rangle \langle h_\perp, F\left(\lambda_1 x + \left(1-\lambda_1\right)y\right) - f_t\rangle =$
$\langle h_\perp, h_1\rangle \langle h_\perp, F\left(\lambda_1 x + \left(1-\lambda_1\right)y\right) - F(x)\rangle < 0.$

Do đó bởi lấy $\bar{x} \in X$ gần $\lambda_1 x + (1-\lambda_1) y$, ta có

$$\langle h_\perp, h_1 \rangle \langle h_\perp, f_t - F(\bar{x}) \rangle > 0,$$

và dó đó, bởi (2.4), ta có $f_t \in F(\mathbb{R}^n)$.

(b) : Vì $\{h_1, h\}$ là phụ thuộc tuyến tính, nên (2.3) có nghĩa rằng với mọi $x_0 \in X$,

$$H_0(x_0) \doteq \left\{u \in \mathbb{R}^2 : \langle h_\perp, u - F(x_0) \rangle = 0\right\} \subseteq F(\mathbb{R}^n).$$

Giả sử $q(\lambda) = \langle h_\perp, F(\lambda x + (1-\lambda) y) - f_t \rangle$ thì q là liên tục và $q(0) = t \langle h_\perp, F(y) - F(x) \rangle, q(1) = (1-t) \langle h_\perp, F(x) - F(y) \rangle$. Ta nhận thấy rằng hoặc $q(0) = 0 = q(1)$ hoặc $q(0)q(1) < 0$. Trong trường hợp thứ nhất $q(\lambda) = 0$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$, và do đó $f_t \in F(\mathbb{R}^n)$. Với trường hợp thứ hai, ta có $\lambda_0 \in (0, 1)$ sao cho $q(\lambda_0) = 0$, điều này dẫn đến $f_t \in H_0(\lambda_0 x + (1-\lambda_0) y) \subseteq F(\mathbb{R}^n)$. □

Mệnh đề 2.1.3. *Cho các khẳng định sau:*

(a) $F_H(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$;

(b) A và B có tính chất ND;

(c) $F_H(\mathbb{R}^2)$ là đóng.

Khi đó ta có mối liên hệ sau $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$.

Chứng minh. $(a) \Rightarrow (b)$: Giả sử $u \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $F_H(u) = 0$. Giả sử ngược lại $u \neq 0$, lấy $v \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\{u, v\}$ là phụ thuộc tuyến tính, ta có với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$F_H(\alpha u + \beta v) = \alpha^2 F_H(u) + \beta^2 F_H(v) + 2\alpha\beta z_{u,v}.$$

Do đó $F_H(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}_+ F_H(v) + \mathbb{R} z_{u,v}$, điều này là không thể nếu $F_H(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Giả sử $F_H(x_k)$ là một dãy sao cho $F_H(x_k) \to z$. Nếu $\|x_k\|$ là bị chặn, thì ta có điều phải chứng minh. Nếu $\|x_k\|$ không bị chặn, ta luôn có thể giả sử rằng $\|x_k\| \to +\infty$ và $\frac{x_k}{\|x_k\|} \to u$. Do đó $\|u\| = 1$ và

$$\frac{1}{\|x_k\|^2} F_H(x_k) = F_H\left(\frac{x_k}{\|x_k\|}\right) \to F_H(u) = 0,$$

bởi giả thiết, $u = 0$, điều này mâu thuẫn. □

Ví dụ 2.1.4 sau đây chỉ ra rằng $(a) \Longrightarrow (b)$ có thể không đúng cho không gian có chiều lớn hơn 2. Tuy nhiên, với $n \geq 3$, từ (a) suy ra sự tồn tại $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$, sao cho $F_H(u) = 0$, xem hệ quả [[9], p. 401]. Chú ý rằng (b) $\Longrightarrow$ (c) vẫn còn đúng cho các không gian có số chiều cao hơn 2, xem [9, Định lý 6].

Ví dụ 2.1.4. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, $F_H\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathbb{R}^2$, nhưng A và B không có tính chất ND.

Kết quả sau đây cung cấp một tính chất cho cặp ma trận có tính chất chéo hóa được đồng thời (ký hiệu là SD), trong không gian 2 chiều.

Định lí 2.1.5. *Các khẳng định sau là tương đương:*

(a) A và B là chéo hóa được đồng thời;

(b) $\exists\, u, v \in \mathbb{R}^2$ sao cho $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}_+ u + \mathbb{R}_+ v$;

(c) $F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ là đóng và $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) \neq \mathbb{R}^2$.

Chứng minh $(a) \Longrightarrow (b)$: Bởi giả thiết, tồn tại các véc tơ độc lập tuyến tính $x, y \in \mathbb{R}^2$, sao cho $z_{x,y} = 0$. Do đó, $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \{F_H(\alpha x + \beta y) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Từ phương trình $F_H(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 F_H(x) + \beta^2 F_H(y)$ ta có điều phải chứng minh.

$(b) \Longrightarrow (c)$: là hiển nhiên.

$(c) \Longrightarrow (a)$: Ta biết rằng $F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ là một nón lồi. Trước hết ta kiểm tra rằng $F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ không thể là một nửa không gian. Thật vậy, giả sử rằng $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{y \in \mathbb{R}^2 : \langle p, y\rangle \geq 0\right\}$ với $p \in \mathbb{R}^2, p \neq 0$. Do đó tồn tại $u, v \in \mathbb{R}^2$ sao cho $F_H(u) = p_\perp$ và $F_H(v) = -p_\perp$, điều này suy ra rằng $\{u, v\}$ là độc lập tuyến tính. Vì $F_H(\alpha u + \beta v) = \alpha^2 F_H(u) + \beta^2 F_H(v) + 2\alpha\beta z_{u,v}$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có $2\alpha\beta \langle p, z_{u,v}\rangle \geq 0$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Do đó $\langle p, z_{u,v}\rangle = 0$, nên ta có $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{y \in \mathbb{R}^2 : \langle p, y\rangle = 0\right\}$. Do đó, tập hợp $F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ thuộc một trong các dạng: (i) gốc tọa độ $\{0\}$; (ii) một nửa đường thẳng; (iii) một nón nhọn, (iv) một đường thẳng.

(i): Ta dễ dàng lấy được hai véc tơ độc lập tuyến tính u và v. Thật vậy, vì $F_H(u) = F_H(v) = F_H(u+v) = 0$, ta có $z_{u,v} = 0$.

(ii): Giả sử rằng $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}_+ p$, và lấy $u \in \mathbb{R}^2$ sao cho $F_H(u) = p$, và chọn $v \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\{u, v\}$ là độc lập tuyến tính. Với $z_{u,v} \neq 0$, ta thực hiện như sau. Vì $F_H(u+v) = F_H(u) + F_H(v) + 2z_{u,v}$, ta có $0 = \langle p_\perp, z_{u,v}\rangle$, suy ra rằng $z_{u,v} = \lambda p$ với $\lambda \in \mathbb{R}$. Điều này suy ra rằng $z_{u,v-\lambda u} = 0$ với $\{u, v - \lambda u\}$ là độc lập tuyến tính, and do đó tính chất SD đạt được.

(iii): Ta có, với cặp véc tơ độc lập tuyến tính p, q (xem Mệnh đề 2.1.1):

$$F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}_+ p + \mathbb{R}_+ q = \{z : \langle p_\perp, q\rangle \langle p_\perp, z\rangle \geq 0, \langle q_\perp, p\rangle \langle q_\perp, z\rangle \geq 0\} \quad (2.5)$$

với tính chất $\langle p_\perp, q\rangle = -\langle q_\perp, p\rangle \neq 0$. Lấy u, v trong $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn $F_H(u) = p$, $F_H(v) = q$. Điều này suy ra u và v là độc lập tuyến tính. Từ (2.5), ta có,

$\langle p_\perp, q\rangle \langle p_\perp, F_H(tu+v)\rangle \geq 0$, với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do đó $\langle p_\perp, z_{u,v}\rangle = 0$. Tương tự ta có $\langle q_\perp, z_{u,v}\rangle = 0$. Do đó $z_{u,v} = 0$, điều phải chứng minh.

(iv): Trường hợp này tương tự (ii). Lấy $u, v \in \mathbb{R}^2$ sao cho $F_H(u) = p_\perp, F_H(v) = -p_\perp$, điều này suy ra $\{u, v\}$ là độc lập tuyến tính. Do đó $\{u, v-\lambda u\}$ là độc lập tuyến tính với λ nào đó trong $\mathbb{R}$ và $z_{u,v-\lambda u} = 0$. $\square$

Ví dụ sau chỉ ra rằng trong định lý trên u và v không nhất thiết phải độc lập tuyến tính; Ví dụ 2.1.4 cho thấy rằng (a) không suy ra được (b) trong không gian có chiều lớn hơn 2, vì $\mathbb{R}^2 = F_H\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathbb{R}_+(1,0)+\mathbb{R}_+(0,1)+\mathbb{R}_+(-1,-1)$, là rõ ràng tính chất SD đạt được cho cặp A và B; trong khi đó Ví dụ 2.1.7 cho thấy tính chất đóng của tập $F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ có thể không đạt được, suy ra $(c) \Longrightarrow (a)$ có thể sai.

Ví dụ 2.1.6. Với

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = 0, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có $C^\top AC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ có dạng chéo. Dễ dàng thấy rằng

$$F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}_+(1,0) + \mathbb{R}_+(-1,0) = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Ví dụ 2.1.7. Xét trường hợp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$F_H(x_1, x_2) = (x_1+x_2)^2 (1,0) + \left(x_1^2 - x_2^2\right)(0,1),$$

và $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}) \cup \{(0,0)\}$, nhưng nó không đóng và rõ ràng cặp A và B không chéo hóa được đồng thời.

Định lí 2.1.8. *Các khẳng định sau là tương đương:*

(a) Tính chất ND đạt được cho cặp A và B;

(b) $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$ *và* $F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ *là một tập đóng khác đường thẳng, trong đó* $\operatorname{Ker} A, \operatorname{Ker} A$ *tương tứng là hạt nhân của ma trận* A, B.

Chứng minh $(a) \Longrightarrow (b)$: phần đầu của (b) là hiển nhiên và tính đóng của $F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ là hệ quả của Mệnh đề 2.1.3. Điều còn lại cần chứng minh $F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ là khác đường thẳng.

Nếu $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$, ta có điều phải chứng minh; do đó giả sử rằng $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) \neq \mathbb{R}^2$. Bởi Định lý 2.1.5, tồn tại $u, v \in \mathbb{R}^2$, độc lập tuyến tính, sao cho $z_{u,v} = 0$. Nghĩa là $F_H(\alpha u + \beta v) = \alpha^2 F_H(u) + \beta^2 F_H(v)$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Rõ ràng $F_H(u) \neq 0 \neq F_H(v)$, và nếu $F_H(u) = -\lambda^2 F_H(v)$ với $\lambda \neq 0$, thì $F_H(u + \lambda v) = 0$. Do đó $u + \lambda v = 0$, điều này không thể đạt được, do đó $F_H(u) \neq -\lambda^2 F_H(v)$ với mọi $\lambda \neq 0$. Nên $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \{\alpha^2 F_H(u) + \beta^2 F_H(v) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ không là đường thẳng.

$(b) \Longrightarrow (a)$: Vì $F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ là đóng, bởi Định lý 2.1.5, hoặc $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$ hoặc tính chất SD đạt được. Trường hợp thứ nhất, Mệnh đề 2.1.3 suy ra rằng (a) thỏa mãn. Giả sử rằng tính chất SD đạt được cho cặp A, B, tức tồn tại $u, v \in \mathbb{R}^2$, độc lập tuyến tính, sao cho $z_{u,v} = 0$. Giả sử $w \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $F_H(w) = 0$, ta khẳng định rằng $w = 0$. Bởi cách viết $w = \lambda_1 u + \lambda_2 v$ với $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, ta có $F_H(w) = \lambda_1^2 F_H(u) + \lambda_2^2 F_H(v)$. Chúng ta chia ra các tình huống sau.

Nếu $F_H(u) = 0$ (tương ứng $F_H(v) = 0$), thì $\langle Au, u\rangle = 0$ và $\langle Bu, u\rangle = 0$

(tương ứng $\langle Av, v\rangle$ và $\langle Bv, v\rangle = 0$), nó kéo theo $\langle Au, v\rangle = 0$ và $\langle Bu, v\rangle = 0$, cho phép ta suy ra $Au = 0 = Bu$ (tương ứng $Av = 0 = Bv$). Nó cho thấy rằng $u = 0$ (tương ứng $v = 0$), Điều này là không thể.

Bây giờ ta xem xét $F_H(u) \neq 0 \neq F_H(v)$. Giả sử, ngược lại rằng $\lambda_i \neq 0$ với $i = 1, 2$. Khi đó, từ $F_H(w) = \lambda_1^2 F_H(u) + \lambda_2^2 F_H(v) = 0$, ta có $F_H(u) = -\lambda F_H(v)$ với $\lambda > 0$. Điều này suy ra rằng $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{\alpha^2 F_H(u) + \beta^2 F_H(v) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ là một đường thẳng, mâu thuẫn. Do đó $\lambda_i = 0$ với $i = 1, 2$, và do đó $w = 0$, chứng minh được hoàn thành. $\square$

Với chứng minh tương tự như định lý trên, ta có kết quả sau nói về mối liên hệ giữa ND và SD.

Hệ quả 2.1.9. *Các khẳng định sau là tương đương:*

(*a*) $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) \neq \mathbb{R}^2$ *và tính chất ND đạt được cho A và B;*

(*b*) *ker* $A\cap$ *ker* $B = \{0\}, F_H\left(\mathbb{R}^2\right)$ *khác đường thẳng và cặp A, B có tính chất SD;*

(*c*) $\exists\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *sao cho* $\lambda_1 A + \lambda_2 B \succ 0$.

Chứng minh $(a) \Longrightarrow (b)$ là hệ quả của Định lý 2.1.5 và Định lý 2.1.8; chiều ngược lại được suy ra từ định lý trước. Sự tương đương giữa (a) và (c) nhận được từ [6, Hệ quả 1], với $n \geq 2$.

2.2 Điều kiện có nghiệm của một số hệ phương trình, bất phương trình bậc hai

Phần đầu của mục này dành cho việc nghiêm cứu ảnh của ánh xạ bậc hai dạng $F(x) = (f(x), g(x))$ (Định lý 2.2.16). Ta đặt

$$f(x) \doteq \langle Ax, x\rangle + \langle a, x\rangle, g(x) \doteq \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle \tag{2.6}$$

và $F(x) = (f(x), g(x))$, ta có $F(0) = (0, 0)$.

Chúng ta bắt đầu với kết quả đơn giản nhưng khá hữu ích sau đây.

Mệnh đề 2.2.1. *Giả sử* $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ *khi đó*

(*a*) $F(\mathbb{R}u) = \{\alpha^2 F_H(u) + \alpha F_L(u) : \alpha \in \mathbb{R}\}$;

(*b*) $\operatorname{co} F(\mathbb{R}u) = F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ F_H(u)$, *trong đó* $\operatorname{co} F(\mathbb{R}u)$ *là tập lồi bé nhất chứa* $F(\mathbb{R}u)$.

Chứng minh (*a*) là hiển nhiên và (*b*) là hệ quả của bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} tF(\alpha u) + (1-t)F(\beta u) &= \left[t\alpha^2 + (1-t)\beta^2\right] F_H(u) + [t\alpha + (1-t)\beta]F_L(u) \\ &= \left[(t\alpha + (1-t)\beta)^2 + \left(t - t^2\right)(\alpha - \beta)^2\right] F_H(u) + [t\alpha + (1-t)\beta]F_L(u) \\ &= F((t\alpha + (1-t)\beta)u) + \left(t - t^2\right)(\alpha - \beta)^2 F_H(u). \end{aligned} \tag{2.7}$$

□

Bổ đề 2.2.2. *Giả sử* $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ *và* $0 \neq d \in \mathbb{R}^2$. *Ta có các khẳng định sau:*

(*a*) *Nếu* $\{F_H(u), F_L(u)\}$ *là phụ thuộc tuyến tính thì* $F(\mathbb{R}u)$ *là tập lồi.*

(*b*) *Giả sử* $\{F_H(u), F_L(u)\}$ *là độc lập tuyến tính thì*

(*b1*) *nếu* $d = F_H(u)$ *thì* $F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d = \operatorname{co} F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d = \operatorname{co} F(\mathbb{R}u)$;

(*b2*) *nếu* $d = -F_H(u)$ *thì*

$$F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d = F(\mathbb{R}u) \cup \mathcal{C}(\operatorname{co} F(\mathbb{R}u)) = \overline{\mathcal{C}(\operatorname{co} F(\mathbb{R}u))} \neq \operatorname{co} F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d$$

(*b3*) *nếu* $\{d, F_H(u)\}$ *là độc lập tuyến tính thì* $F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d = \operatorname{co} F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d \neq coF(\mathbb{R}u)$.

Chứng minh. Ta viết $F(tu) = t^2 F_H(u) + tF_L(u)$.

(a): trong trường hợp này tập $F(\mathbb{R}u)$ hoặc là một điểm hoặc là một tia, do đó nó lồi.

(b1): Từ Mệnh đề 2.2.1, ta có

$$\operatorname{co}(F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d) = \operatorname{co} F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d = F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ F_H(u) + \mathbb{R}_+ d, \quad (2.8)$$

từ tính lồi của $F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d$ đạt được nếu $d = F_H(u)$.

(b2): Ta có các phương trình sau, do tính độc lập tuyến tính của $\{F_H(u), F_L(u)\}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{co} F(\mathbb{R}u) &= \left\{ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i F(\alpha_i u) : \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \alpha_i^2 F_H(u) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \alpha_i F_L(u) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \alpha F_H(u) + \beta F_L(u) : \alpha \geq \beta^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Do đó $\mathcal{C}(\operatorname{co} F(\mathbb{R}u)) = \left\{ \alpha F_H(u) + \beta F_L(u) : \alpha < \beta^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$, và ta có $\overline{\mathcal{C}(\text{coF}\, F(\mathbb{R}u))} = \left\{ \alpha F_H(u) + \beta F_L(u) : \alpha \leq \beta^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d$, vì $F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d = \left\{ \left(\beta^2 - t\right) F_H(u) + \beta F_L(u) : \beta \in \mathbb{R}, t \geq 0 \right\}$ bởi Mệnh đề 2.2.1.

(b3): Ta viết $F_L(u) = \lambda_1 F_H(u) + \lambda_2 d$ với $\lambda_2 \neq 0$. Bởi (2.8), ta cần kiểm tra rằng $F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ F_H(u) + \mathbb{R}_+ d \subseteq F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d$. Điều này đòi hỏi việc giải một phương trình bậc hai, việc này luôn thực hiện được. Thật vậy, lấy $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda_+ \geq 0$, $\gamma_+ \geq 0$, ta cần tìm $\beta \in \mathbb{R}$ và $r_+ > 0$ sao cho

$$\alpha \lambda_2 + \lambda_+ = \beta \lambda_2 + r_+, \quad \alpha^2 + \alpha \lambda_1 + \gamma_+ = \beta^2 + \beta \lambda_1. \qquad (2.10)$$

Ta luôn có thể giải hệ này bằng cách thay thế β từ phương trình thứ nhất của (2.10) vào phương trình thứ hai, điều này chứng minh tính lồi của $F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d$.

Bây giờ ta kiểm tra khẳng định cuối cùng. Từ giả thiết, chúng ta có thể viết $d = \sigma_1 F_H(u) + \sigma_2 F_L(u)$ với $\sigma_2 \neq 0$. Từ (2.9), $x \in \operatorname{co} F(\mathbb{R}u)$ nếu và chỉ nếu $x = \alpha^2 F_H(u) + \beta F_L(u)$ với $\alpha^2 \geq \beta^2$. Bởi lấy $\gamma > 0$ đủ lớn sao cho $y \doteq F(tu) + \gamma d = \left[t^2 + \sigma_1 \gamma\right] u_H + \left[t + \sigma_2 \gamma\right] u_L$ với $t^2 + \sigma_1 \gamma < (t + \sigma_2 \gamma)^2$, ta nhận được $y \in F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d$ và $y \notin \cos F(\mathbb{R}u)$. □

Ví dụ tiếp theo cho ta thấy rằng $F(\mathbb{R}u)$ có thể không lồi với u nào đó, nhưng nó trở nên lồi khi ta thêm một hướng cụ thể.

Ví dụ 2.2.3. Với

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

các ma trận a, B đều bằng 0. Giả sử $u = (u_1, u_2), u_1 u_2 \neq 0$ thì $F_H(u) = (2u_1 u_2, 0), F_L(u) = (0, u_1)$ và $F(\mathbb{R}u) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{2u_2}{u_1} y^2\right\}$ là không lồi, tuy nhiên, $F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d$ là lồi nếu và chỉ nếu $d \neq (-2u_1 u_2, 0)$, trong đó,

$$F\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{(0,0\} \cup \left[\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})\right]\right., \quad F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Ta chú ý rằng, bởi tính lồi,

$$\overline{F_H\left(\mathbb{R}^n\right)} = \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow F_H\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \operatorname{int} F_H\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}^2. \tag{2.11}$$

Như một hệ quả của bổ đề trước, ta nhận được đặc trưng của tính lồi của tập ảnh của ánh xạ bậc hai.

Định lí 2.2.4. *Nếu $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ thì*

(a) $F(\mathbb{R}u)$ là lồi khi và chỉ khi $\{F_H(u), F_L(u)\}$ là phụ thuộc tuyến tính;

(b) trong trường hợp $\{F_H(u), F_L(u)\}$ là độc lập tuyến tính và $d \neq 0$, ta có

$$F(\mathbb{R}u) + \mathbb{R}_+ d \text{ lồi} \iff -d \notin \mathbb{R}_+ F_H(u).$$

Các kết quả tiếp theo được xét trên không gian có chiều lớn hơn. Trước hết, ta đề cập tới một kết quả của Polyak:

Định lí 2.2.5 ([11], Định lý 2.2)**.** *Nếu $n \geq 2$ và tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\alpha A + \beta B \succ 0$, thì $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ là lồi (và đóng).*

Định lý tiếp theo là một sự mở rộng của các kết quả trước. Thật vậy, Hệ quả 1 trong [8] thiết lập sự tương đương sau

$$\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha A + \beta B \succ 0 \iff A, B \text{ có tính chất ND và } F_H\left(\mathbb{R}^n\right) \neq \mathbb{R}^2. \tag{2.12}$$

Để ý rằng trong trường hợp này $F_H\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}^2$, ta có $F\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}^2$ bởi Bổ đề 2.2.11.

Định lí 2.2.6. *Giả sử tính chất ND đạt được cho cặp A và B. Khi đó*

(a) hoặc $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$ hoặc $F\left(\mathbb{R}^2\right)$ là lồi;

(b) nếu $n \geq 3$ thì $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ là lồi.

Chứng minh. (a) : Giả sử rằng $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) \neq \mathbb{R}^2$. Từ Mệnh đề 2.1.3 và Định lý 2.1.5, ta có tính chất SD đạt được cho A và B, điều này có nghĩa là tồn tại $\{u, v\}$ độc lập tuyến tính thỏa mãn $z_{u,v} = 0$. Do đó $F\left(\mathbb{R}^2\right) = F(\mathbb{R}u) + F(\mathbb{R}v)$.

Hơn nữa, $F_H(u) \neq 0 \neq F_H(v)$ và bởi sự lựa chọn của u và $v, F_H(u) \neq -\rho F_H(v)$ với mọi $\rho > 0$. Ta có khẳng định sau

$$\operatorname{co} F(\mathbb{R}u) + F(\mathbb{R}v) \subseteq F(\mathbb{R}u) + F(\mathbb{R}v). \tag{2.13}$$

Bởi Bổ đề 2.2.2, ta chỉ cần xét trường hợp $\{F_H(u), F_L(u)\}$ độc lập tuyến tính. Ta có thể viết μ_i và $\sigma_i, i = 1, 2, F_H(v) = \mu_1 F_H(u) + \mu_2 F_L(u)$ và $F_L(v) = \sigma_1 F_H(u) + \sigma_2 F_L(u)$. Lấy bất kỳ $x \in \operatorname{co} F(\mathbb{R}u) + F(\mathbb{R}v)$; khi đó, bởi Mệnh đề 2.2.1, $x = F(\alpha u) + \gamma^2 F_H(u) + F(\beta v)$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và $\gamma \in \mathbb{R}$ nào đó.

Ta tìm kiếm $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ thỏa mãn $x = F(\lambda_1 u) + F(\lambda_2 v)$. Từ hai phương trình cuối, ta nhận được

$$\begin{gathered}\lambda_1^2 + \lambda_2^2\mu_1 + \lambda_2\sigma_1 - \alpha^2 - \gamma^2 - \beta^2\mu_1 - \beta\sigma_1 = 0;\\ \lambda_1 + \lambda_2^2\mu_2 + \lambda_2\sigma_2 - \alpha - \beta^2\mu_2 - \beta\sigma_2 = 0.\end{gathered}$$

Từ phương trình thứ 2, ta có $\lambda_1 = \alpha + \beta^2\mu_2 + \beta\sigma_2 - \lambda_2^2\mu_2 - \lambda_2\sigma_2$, nó được thay vào bên trái của phương trình thứ nhất ta nhận được một đa thức với biến λ_2, ký hiệu đa thức này là $p(\lambda_2)$. Mục tiêu của chúng ta là tìm một nghiệm của p. Để ý rằng $\lambda_2 = \beta$ suy ra $\lambda_1 = \alpha$ và do đó $p(\beta) = -\gamma^2 \leq 0$. Nếu $\mu_2 \neq 0$, bậc cao nhất của p là $\mu_2^2\lambda^4$ nó dần ra $+\infty$ khi $\lambda_2 \to +\infty$; nếu $\mu_2 = 0$, bậc cao nhất của p là $\left(\sigma_2^2 + \mu_1\right)\lambda_2^2$, với μ_1 là dương bởi sự lựa chọn của u và v. Do đó, trong hai trường hợp, $p(\lambda_2) > 0$ với λ_2 đủ lớn. Do đó, tồn tại $p(\lambda_2) = 0$, và dó đó (2.13) được chứng minh.

Bây giờ ta kiểm tra rằng $\operatorname{Conv} F\left(\mathbb{R}^2\right) = F\left(\mathbb{R}^2\right)$. Thật vậy, nó đạt được từ biểu thức sau:

$$\begin{aligned}\operatorname{co} F\left(\mathbb{R}^2\right) &= \operatorname{co} F(\mathbb{R}u) + \operatorname{co} F(\mathbb{R}v) = \operatorname{co} F(\mathbb{R}u) + F(\mathbb{R}v) + \mathbb{R}_{++}F_H(v)\\ &= F(\mathbb{R}u) + F(\mathbb{R}v) + \mathbb{R}_{++}F_H(v) = F(\mathbb{R}u) + \operatorname{co} F(\mathbb{R}v))\\ &\subseteq F(\mathbb{R}u) + F\left(\mathbb{R}v = F\left(\mathbb{R}^2\right)\right.\end{aligned}$$

(b): Ta sẽ thấy ngay cách rút ngọn về trường hợp $n = 2$, do đó (a) có thể được áp dụng cho trường hợp này. Giả sử $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $t \in (0,1)$, ta có

$$tF(x) + (1-t)F(y) \in tF(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y) + (1-t)(F(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y). \tag{2.14}$$

Do đó, để chứng minh tính lồi của $F(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y)$ ta chỉ cần xét trường hợp $\{x, y\}$ là độc lập tuyến tính. Lấy bất kỳ $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, thì

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) &= \lambda_1^2\langle Ax, x\rangle + 2\lambda_1\lambda_2\langle Ax, y\rangle + \lambda_2^2\langle Ay, y\rangle + \lambda_1\langle a, x\rangle + \lambda_2\langle a, y\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle Ax, x\rangle & \langle Ax, y\rangle \\ \langle Ax, y\rangle & \langle Ay, y\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle a, x\rangle & \langle a, y\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Một biểu diễn tương tự cho g. Bởi ký hiệu

$$\widetilde{A}(x,y) \doteq \begin{pmatrix} \langle Ax, x\rangle & \langle Ax, y\rangle \\ \langle Ax, y\rangle & \langle Ay, y\rangle \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}(x,y) \doteq \begin{pmatrix} \langle Bx, x\rangle & \langle Bx, y\rangle \\ \langle Bx, y\rangle & \langle By, y\rangle \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}(x,y) \doteq \begin{pmatrix} \langle a, x\rangle \\ \langle a, y\rangle \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}(x,y) \doteq \begin{pmatrix} \langle b, x\rangle \\ \langle b, y\rangle \end{pmatrix},$$

ta có thể viết

$$\begin{aligned} F(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y) &= \left\{ \tilde{F}(\lambda) \doteq \begin{pmatrix} \langle \widetilde{A}(x,y)\lambda, \lambda\rangle \\ \langle \widetilde{B}(x,y)\lambda, \lambda\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \tilde{a}(x,y), \lambda\rangle \\ \langle \tilde{b}(x,y), \lambda\rangle \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \tilde{F}\left(\mathbb{R}^2\right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Bây giờ ta áp dụng phần (a) cho vế phải của (2.15). Không khó để kiểm tra rằng nếu tính chất ND đạt được cho A và B, thì tính chất ND cũng đạt được cho $\widetilde{A}(x,y)$ và $\widetilde{B}(x,y)$ với $\{x, y\}$ độc lập tuyến tính. Hơn nữa, vì $F_H(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^2$, ta có $\tilde{F}_H\left(\mathbb{R}^2\right) \neq \mathbb{R}^2$. Bởi áp dụng (a), ta kết luận rằng $\tilde{F}\left(\mathbb{R}^2\right) = F(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y)$ là lồi, và do đó ta có tính lồi của $F(\mathbb{R}^n)$.

Để thiết lập được kết quả cơ bản thứ hai cho trường hợp không có tính chất ND, ta cần một vài kết quả cơ sở.

Mệnh đề 2.2.7. *Giả sử $n \geq 2$ và $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ sao cho $F_H(v) = 0$. Các khẳng định sau là đúng:*

(a) $\quad F_H\left(\mathbb{R}^2\right) \neq \mathbb{R}^2$ *và* $\{Av, Bv\}$ *là phụ thuộc tuyến tính.*

(b) nếu $n \geq 3$ thì hoặc là $F_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^2$ hoặc là $\{Av, Bv\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

(c) Tập $Z \doteq \{z_{u,v} : u \in \mathbb{R}^n\}$ là không gian véc tơ con, và nếu $F_H(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^2$ thì với mọi $u \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $z_{u,v} \neq 0$,

$$\mathrm{bd}F_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}z_{u,v} \tag{2.16}$$

Đặc biệt, nếu $Av \neq 0$ và $Bv = \lambda Av$ (tương ứng $Bv \neq 0$ và $Av = \lambda Bv$) với $\lambda \in \mathbb{R}$ nào đó, thì

$$bd\ F_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}(1, \lambda)\ \left(\text{tương ứng } bd\ F_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}(\lambda, 1)\right). \tag{2.17}$$

Chứng minh (a): Phần đầu được suy ra từ Mệnh đề 2.1.3. Bởi giả thiết $\{Av, Bv\} \subseteq v^{\perp}$, nên $\{Av, Bv\}$ là phụ thuộc tuyến tính .

(b): Vì $\{Av, Bv\} \subseteq v^{\perp}$. Giả sử $v, x, y \in \mathbb{R}^n$ độc lập tuyến tính. Ta xét trường hợp thứ nhất với $\{z_{v,x}, z_{v,y}\}$ phụ thuộc tuyến tính. Với trường hợp này tồn tại hai số không đồng thời bằng không $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda_1 z_{v,x} + \lambda_2 z_{v,y} = 0$. Do đó $z_{v,\lambda_1 x+\lambda_2 y} = 0$, nó suy ra rằng

$$\{Av, Bv\} \subseteq [\operatorname{span}\{v, \lambda_1 x + \lambda_2 y\}]^{\perp}.$$

Không gian con này có chiều $n-2$. Nếu $n-2=1$, chứng minh kết thúc; nếu $n-2 \geq 2$, ta tiếp tục thực hiện như trên cho đến khi đạt được số chiều 1, trường hợp này ta kết luận rằng $\{Av, Bv\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Bây giờ ta xem xét trường hợp $\{z_{v,x}, z_{v,y}\}$ độc lập tuyến tính. Lấy bất kỳ $w \in \mathbb{R}^2$ và viết $w = \alpha z_{v,x} + \beta z_{v,y}$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nào đó. Ta dễ dàng đạt được cho mọi $\varepsilon > 0$:

$$F_H\left(\frac{1}{\varepsilon}x + \alpha\frac{\varepsilon}{2}v\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}F_H(x) + \alpha z_{v,x}, \quad F_H\left(\frac{1}{\varepsilon}y + \beta\frac{\varepsilon}{2}v\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}F_H(y) + \beta z_{v,y}$$

Bởi kết quả của Dines, $F_H(\mathbb{R}^n)$ là nón lồi, do đó

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(F_H(x) + F_H(y)\right) + w \in F_H(\mathbb{R}^n), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Cho $\varepsilon \to +\infty$, ta có $w \in \overline{F_H(\mathbb{R}^n)}$, chứng minh rằng $\overline{F_H(\mathbb{R}^n)} = \mathbb{R}^2$, và kết quả nhận được từ (2.11).

(c): Rõ ràng Z là một không gian véc tơ con. Giả sử $u \in \mathbb{R}^n, z_{u,v} \neq 0$. $F_H(u \pm tv) = F_H(u) \pm 2tz_{u,v}$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, nó suy ra rằng $\pm z_{u,v} \in \overline{F_H(\mathbb{R}^n)}$. Vì tập này là lồi và khác $\mathbb{R}^2$, $\overline{F_H(\mathbb{R}^n)}$ hoặc là nửa không gian hoặc là đường thẳng $\mathbb{R}z_{u,v}$. Trong mỗi trường hợp ta đều nhận được (2.16).

Với phần cuối cùng, dễ nhận thấy rằng $z_{Av,v} = \|Av\|^2(1,\lambda) \neq (0,0)$ nếu $Av \neq 0$. □

Khi không có tính chất ND, kết quả sau khẳng định tính lồi của $F\left(\mathbb{R}^2\right)$ dưới điều kiện không rỗng của phần trong của phần thuần nhất.

Mệnh đề 2.2.8. *Giả sử rằng tính chất ND không đạt được. Nếu* $\mathrm{IntF_H}\left(\mathbb{R}^2\right) \neq \emptyset$*, thì* $F\left(\mathbb{R}^2\right)$ *là lồi.*

Chứng minh Giả sử $v \neq 0$ thỏa mãn $F_H(v) = 0$. Lấy $u \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\{u, v\}$ độc lập tuyến tính. Nó dẫn đến $F_H\left(\mathbb{R}^2\right) = F_H(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) = \mathbb{R}_+ F_H(u) + \mathbb{R}z_{u,v}$. Vì $\mathrm{Int}F_H\left(\mathbb{R}^2\right) \neq \emptyset$, ta có ngay $\{F_H(u), z_{u,v}\}$ độc lập tuyến tính. Ta sẽ kiểm tra rằng $F\left(\mathbb{R}^2\right) = F(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v)$ là lồi. Từ Định lý 2 trong [10], ta chỉ cần chứng minh rằng $F(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) = F_H(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) + F(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v)$.

Giả sử $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ và $s = (s_u, s_v), h = (h_u, h_v) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $F_L(u) = s_u z_{u,v} + h_u F_H(u)$ và $F_L(v) = s_v z_{u,v} + h_v F_H(u)$. Ta phải tìm $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $F(\alpha u + \beta v) + F_H(\gamma u + \delta v) = F(\lambda_1 u + \lambda_2 v)$. Phương trình này kết hợp với tính độc lập tuyến tính của $\{F_H(u), z_{u,v}\}$ nó dẫn đến hai phương trình sau:

$$
\begin{aligned}
2\lambda_1\lambda_2 - 2(\alpha\beta + \gamma\delta) + s_u(\lambda_1 - \alpha) + s_v(\lambda_2 - \beta) = 0 \\
\lambda_2^2 - \left(\beta^2 + \delta^2\right) + h_u(\lambda_1 - \alpha) + h_v(\lambda_2 - \beta) = 0.
\end{aligned}
$$

Nếu $h_u \neq 0$, từ phương trình thứ hai ta có một biểu diễn cho λ_1 và thay thế nó vào phương trình thứ nhất, ta nhận được một phương trình đa thức bậc ba với biến λ_2, do đó nó có ít nhất một nghiệm. Do đó một nghiệm sẽ nằm trong (λ_1, λ_2).

Bây giờ ta xét trường hợp $h_u = 0$. Phương trình thứ hai là bậc hai biến λ_2, ta có biệt thức $\Delta = (h_v + 2\beta)^2 + 4\delta^2 \geq 0$. Do đó phương trình thứ hai luôn có nghiệm $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Vì phương trình đầu là tuyến tính với biến λ_1, ta sẽ luôn tìm được λ_1 nếu hệ số $2\lambda_2 + s_u$ là khác 0. Nó thỏa mãn nếu $\Delta > 0$. Nếu $\Delta = 0$ và tình huống xấu nhất $2\lambda_2 + s_u = 0$, ta dễ dàng suy ra rằng phương trình đầu thỏa mãn. $\square$

Với cách biểu diễn sau

$$F(\mathbb{R}^n) = F\left((\ker A \cap \ker B)^{\perp}\right) + F_L(\ker A \cap \ker B),$$

nó cho thấy rằng không mất tính tổng quát giả sử $\mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Ker}\, B = \{0\}$. Ta có tập $K \doteq \mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Ker}B$ với $\dim K^{\perp} = m$. Lấy một cơ sở $\{u_i : 1 \leq i \leq m\}$ của $K^{\perp}$. Ta có $F\left(K^{\perp}\right) = \tilde{F}(\mathbb{R}^m)$ là cặp hàm bậc hai với dữ kiện sau: $\tilde{A} = (\langle u_i, Au_j\rangle)_{ij}, \tilde{B} = (\langle u_i, Bu_j\rangle)_{ij}, \tilde{a} = (\langle a, u_1\rangle, \ldots, \langle a, u_m\rangle)$ và $\tilde{b} = (\langle b, u_1\rangle, \ldots, \langle b, u_m\rangle)$.

Chúng ta chứng minh rằng $\widetilde{K} \doteq \ker \tilde{A} \cap \ker \tilde{B} = \{0\}$. Lấy $z \in \tilde{K}$. Khi đó

$$\left\langle u_i, A\left(\sum_{j=1}^{m} z_j u_j\right)\right\rangle = 0 \text{ and } \left\langle u_i, B\left(\sum_{j=1}^{m} z_j u_j\right)\right\rangle = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Nó có nghĩa là $\sum_{j=1}^{m} z_j u_j \in K^{\perp} \cap K^{\perp\perp} = \{0\}$, và do đó $\tilde{K} = \{0\}$. Điều kiện này sẽ được giả định trong (b) của bổ đề sau, đây là kết quả tương tự Định lý Dines với tính chất ND không thỏa mãn.

Bổ đề 2.2.9. *Tập $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi dưới các điều kiện sau:*

(a) $F_L(\ker\ A \cap\ \ker\ B) \neq \{0\}$, hoặc tương đương, $\{a, b\} \not\subseteq (\ker\ A \cap \ker\ B)^{\perp}$;

(b) $\emptyset \neq \operatorname{int} F_H(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^2$.

Chứng minh (a): Giả sử $u \in \mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Ker}B$ và đặt $0 \neq h \doteq F_L(u)$. Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x + tu) = F(x) + th \in F(\mathbb{R}^n)$, Bổ đề 2.1.2 cho ta điều cần chứng minh.

(b): Ta áp dụng quá trình như trên để xem xét $F\left(K^{\perp}\right) = \tilde{F}(\mathbb{R}^m)$ và $F(\mathbb{R}^n) = \tilde{F}(\mathbb{R}^m) + F_L(K)$ với $K \doteq \mathrm{Ker}A \cap\ \mathrm{Ker}B$. Rõ ràng $\dim K\ {\perp}^{\perp} =$

$m \geq 2$ vì $\emptyset \neq \mathrm{Int} F_H(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Int}\ \tilde{F}_H(\mathbb{R}^m)$. Do đó, nếu tính chất ND đạt được cho $\tilde{A}$ và $\tilde{B}$, bởi Định lý 2.2.6, $\tilde{F}(\mathbb{R}^m)$ là lồi, và do đó $F(\mathbb{R}^n)$ cũng lồi. Trường hợp không thỏa mãn tính chất ND, ta tiến hành với F, bởi giả sử rằng $\mathrm{Ker} A \cap \mathrm{Ker} B = \{0\}$. Giả sử $v \neq 0$ thỏa mãn $F_H(v) = 0$. Không khó để kiểm tra rằng $\{z_{u,v} : u \in \mathbb{R}^n\}$ được chứa trong đường thẳng đi qua gốc tọa độ; ta có $z_{-u,v} = -z_{u,v}$ và $\mathrm{Ker} A \cap \mathrm{Ker}\, B = \{0\}$. Do đó, $\{z_{u,v} : u \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}\pi$ với $\pi \neq 0$. Ta đặt

$$X_v \doteq \{u \in \mathbb{R}^n : z_{u,v} \neq 0\}, \quad Y_v \doteq \{u \in \mathbb{R}^n : F_H(u) \notin \mathbb{R}\pi\},$$

và xem xét $C_v \doteq X_v \cap Y_v$. Ngoài ra X_v khác rỗng vì $\mathrm{Ker} A \cap \mathrm{Ker} B = \{0\}$, nó cũng trù mật ($u_0 \in X_v$ suy ra $u + \frac{1}{k}u_0 \in X_v$ với mọi $u \in \mathbb{R}^n$ và $k \in \mathbb{N}$); Y_v khác rỗng $\emptyset \neq \mathrm{Int} F_H(\mathbb{R}^n)$, và mở bởi tính liên tục. Nó cũng trù mật (lấy $u_0 \in Y_v$ àn chú ý rằng với mọi $u \notin Y_v$, ta có ngay

$$\left\langle \pi_\perp, F_H\left(u + \frac{1}{k}u_0\right)\right\rangle = \frac{2}{k}\langle \pi_\perp, z_{u,u_0}\rangle + \frac{1}{k^2}\langle \pi_\perp, F_H(u_0)\rangle \neq 0,$$

với mọi $k \in \mathbb{N}$ đủ lớn, suy ra rằng $u + \frac{1}{k}u_0 \in Y_v$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ đủ lớn). Hệ quả là, C_v không rỗng và trù mật vì nó là giao của hai tập trù mật, một trong chúng là mở. Chú ý rằng mọi $u \in C_v$, $\{u, v\}$ là độc lập tuyến tính và do đó $F(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v)$ thỏa mãn mọi giả thiết của Bổ đề 2.2.8, do đó nó lồi. Hơn nữa

$$\begin{aligned} F_H(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) &= \{0\} \cup \{\mathbb{R}\pi + \mathbb{R}_{++}F_H(u)\} \\ &= \{0\} \cup \left\{h \in \mathbb{R}^2 : \langle \pi_\perp, F_H(u)\rangle \langle \pi_\perp, h\rangle > 0\right\}, \end{aligned}$$

trong đó phương trình thứ hai suy ra từ Mệnh đề 2.1.1. Mặt khác, tất cả các phần tử của dạng $\langle \pi_\perp, F_H(u)\rangle$ có cùng dấu vì $F_H(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^2$. Do đó, bởi Định lý 2 trong [10], ta có

$$
\begin{aligned}
F\left(\mathbb{R}^n\right) \supseteq F(\mathbb{R}u+\mathbb{R}v) &= F(\mathbb{R}u+\mathbb{R}v)+F_H(\mathbb{R}u+\mathbb{R}v)\\
&\supseteq F(\mathbb{R}u+\mathbb{R}v)+\mathbb{R}\pi+\mathbb{R}_{++}F_H(u)\\
&= F(\mathbb{R}u+\mathbb{R}v)+\left\{h\in\mathbb{R}^2 : r\left\langle \pi_\perp, h\right\rangle>0\right\},
\end{aligned}
$$

với $F_H(u)\notin\mathbb{R}\pi$ với mọi $u\in C_v$ và hằng số $r\neq 0$ nào đó. Do đó, bởi Bổ đề 2.1.2 (với $X=\mathbb{R}C_v+\mathbb{R}v)$, $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ là lồi. □

Chú ý 2.2.10. Ví dụ 2.1.7 cho ta một trường hợp khi

$$\theta\neq \operatorname{int} F_H\left(\mathbb{R}^2\right)\neq\mathbb{R}^2.$$

Bổ đề 2.2.11. *Giả sử rằng $F_H\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}^2$. Khi đó $n\geq 2$ và $F\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}^2$.*

Chứng minh. Ta xét trường hợp $n=2$ và giả sử $L_1\in\mathbb{R}^2$ là một véc tơ khác 0. Lấy u và v thỏa mãn $F_H(u)=-F_H(v)=L_1$. Do đó $\{u,v\}$ độc lập tuyến tính. Vì $F_H\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}^2, \{z_{u,v}, L_1\}$ độc lập tuyến tính. Tập $L_2\doteq z_{u,v}$. Do đó, tồn tại $\sigma_i,\ \rho_i, i=1,2$, sao cho $F_L(u)=2\sigma_1L_1+\rho_1L_2$ và $F_L(v)=-2\sigma_2L_1+\rho_2L_2$. Cho trước $x\in\mathbb{R}^2$, ta sẽ tìm $\lambda_i\in\mathbb{R}, i=1,2$, thỏa mãn

$$x=F\left(\left(\lambda_1-\sigma_1\right)u+\left(\lambda_2-\sigma_2\right)v\right). \tag{2.18}$$

Mặt khác, ta có

$$
\begin{gathered}
F\left(\left(\lambda_1-\sigma_1\right)u+\left(\lambda_2-\sigma_2\right)v\right)\\
=\left[\lambda_1^2-\lambda_2^2\right]L_1+\left[2\lambda_1\lambda_2+\left(\rho_1-\sigma_2\right)\lambda_1+\left(\rho_2-\sigma_1\right)\lambda_2\right]L_2-C,
\end{gathered}
$$

với $C = \left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right) L_1 + \left(\sigma_1\rho_1 + \sigma_2\rho_2\right) L_2$. Bởi các viết $x = x_1L_1 + x_2L_2 - C$ và đặt $\pi_1 = \rho_1 - \sigma_2, \pi_2 = \rho_2 - \sigma_1$, (2.18) cho ta

$$x_1 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \quad x_2 = 2\lambda_1\lambda_2 + \pi_1\lambda_1 + \pi_2\lambda_2. \tag{2.19}$$

Ta chia thành hai trường hợp.

Đầu tiên giả sử tập $\{(2,\pi_1),(\pi_2,-x_2)\}$ là phụ thuộc tuyến tính . Khi đó, tồn tại t_0 sao cho $t_0(2,\pi_1) = (\pi_2,-x_2)$. Do đó, phương trình thứ hai trong (2.19) rút gọn thành $0 = (\lambda_1 + t_0)(2\lambda_2 + \pi_1)$. Nếu $0 = \lambda_1 + t_0$ thì $x_1 = t_0^2 - \lambda_2^2$ với mọi $\lambda_2 \in \mathbb{R}$; nếu $0 = 2\lambda_2 + \pi_1$ thì $x_1 = \lambda_1^2 - \left(\frac{\pi_1}{2}\right)^2$ với mọi $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Từ đó ta suy ra rằng phương trình đầu trong (2.19) cũng thỏa mãn.

Bây giờ giả sử rằng tập $\{(2,\pi_1),(\pi_2,-x_2)\}$ là độc lập tuyến tính, nó tương đương với $2x_2 + \pi_1\pi_2 \neq 0$ bởi Mệnh đề 2.1.1. Từ phương trình thứ hai trong (2.19), ta đạt được, bởi giả sử thêm $2\lambda_2 + \pi_1 \neq 0$ (vì ngược lại ta có điều phải chứng minh).

$$\lambda_1 = \frac{x_2 - \pi_2\lambda_2}{2\lambda_2 + \pi_1} = -\frac{\pi_2}{2} + \frac{2x_2 + \pi_1\pi_2}{2(2\lambda_2 + \pi_1)}.$$

Do đó,

$$x_1 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = \left(-\frac{\pi_2}{2} + \frac{2x_2 + \pi_1\pi_2}{2(2\lambda_2 + \pi_1)}\right)^2 - \lambda_2^2 \doteq p(\lambda_2).$$

Vì $p((-\infty, -\frac{\pi_1}{2})) = \mathbb{R} = p((-\frac{\pi_1}{2}, +\infty))$, ta kết luận rằng 2.19 có nghiệm, với $F\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$.

Bây giờ ta xem xét $n \geq 3$. Lấy u và v thỏa mãn $F_H(u) = (1,0)$ và $F_H(v) = (0,1)$. Khi đó $\mathbb{R}_+^2 \subseteq F_H(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v)$, nó suy ra rằng $\mathrm{Int}F_H(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) \neq \emptyset$. Trong trường hợp $F_H(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) = \mathbb{R}^2$, ta áp dụng kết quả trên để đi đến kết luận rằng $\mathbb{R}^2 = F(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v)$ và do đó $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^2$. Nếu ngược lại, $F_H(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) \neq \mathbb{R}^2$, từ Bổ đề 2.2.9, ta có sự lồi của $F(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v)$). Bởi Định lý 2 trong [10], $\mathbb{R}^2_+ \subseteq F(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) + F_H(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) = F(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v) \subseteq F(\mathbb{R}^n)$. Tương tự, ta cũng có các tập $-\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ và $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ là chứa trong $F(\mathbb{R}^n)$, và do đó $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^2$. □

Áp dụng hai bổ đề trên và Định lý 2.2.6, ta nhận được kết quả sau

Định lí 2.2.12. *Giả sử $n \geq 2$. Nếu $\mathrm{IntF_H}(\mathrm{\mathbb{R}^n}) \neq \emptyset$ hoặc ND đạt được cho cặp A và B thì $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi.*

Bây giờ chúng ta mô tả một quá trình để tìm một phép đổi biến phù hợp.

Bổ đề 2.2.13. *Giả sử $d = (d_1, d_2) \neq 0$, và xét F như 2.6 với $A = d_1 I$ và $B = d_2 I$ với I là ma trận đơn vị cỡ n và a, b và các véc tơ tùy ý trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, tồn tại $t_0 \geq 0, k \in \mathbb{R}^2, \bar{x} \in \mathbb{R}^2$ và một ma trận vuông C thỏa mãn $C^\top C = I$ sao cho, nếu $x = Cy - \bar{x}$ thì ta có*

(a) $\widetilde{F}(x) = \tilde{F}(y) - k$ trong đó $\tilde{F}$ được xác định trong các thành phần của $\tilde{A} = A, \widetilde{B} = B, \tilde{a} = -d_2 t_0 e_1$, $\tilde{b} = d_1 t_0 e_1$ với $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$;

(b) nếu $n \geq 2$ thì $F(\mathbb{R}^n) = \tilde{F}(\mathbb{R}e_1) + \mathbb{R}_+ d - k = \mathrm{co}\tilde{F}(\mathbb{R}e_1) - k$, và tồn tại $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ với $\tilde{F}_H(\bar{y}) = d$ và $\tilde{F}_L(\bar{y}) = 0$;

(c) các phát biểu sau là tương đương (hoặc chúng không đạt được nếu $n \geq 2$):

(c1) $\{d, F_L(x)\}$ là độc lập tuyến tính với mọi $x \in F_H^{-1}(d)$;

(c2) $\left\{d, \tilde{F}_L(y)\right\}$ là độc lập tuyến tính với mọi $y \in \tilde{F}_H^{-1}(d)$.

Chứng minh. (a) : Vì d và $d_\perp$ là độc lập tuyến tính, do đó tồn tại $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = 2\bar{x}_i d + \bar{y}_i d_\perp$$

với mọi i. Với bất kỳ $x \in \mathbb{R}^n$, ta viết

$$\begin{aligned} F(x) &= \langle x, x\rangle d + 2\langle \bar{x}, x\rangle d + \langle \bar{y}, x\rangle d_\perp \\ &= \langle x+\bar{x}, x+\bar{x}\rangle d + \langle \bar{y}, x+\bar{x}\rangle d_\perp - \langle \bar{x}, \bar{x}\rangle d - \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle d_\perp. \end{aligned}$$

Nếu $\bar{y} = 0$, ta chọn $t_0 = 0, C = I$ và nó kéo theo kết luận của bổ đề; ngược lại ta lấy $x + \bar{x} = Cy$ với $C = \begin{pmatrix} \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} & W \end{pmatrix}$ trong đó W là ma trận có các cột trực giao và là cơ sở của $\bar{y}^\perp$. Rõ ràng $C^\top C = I$ và, bởi cách chọn $t_0 = \|\bar{y}\|$, ta có

$$F(x) = \tilde{F}(y) - k, \quad \tilde{F}(y) = \langle y, y\rangle d + t_0 y_1 d_\perp, \quad k \doteq \|\bar{x}\|^2 d + \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle d_\perp \tag{2.20}$$

(b): Từ phương tình cuối, ta có

$$F(x) = y_1^2 d + \|\bar{y}\| y_1 d_\perp + d \sum_{i \geq 2} y_i^2 - k$$

nó suy ra rằng $F(\mathbb{R}^n) = \tilde{F}(\mathbb{R}_1) + \mathbb{R}_+ d - k$; phương trình thứ hai trong (b) được suy ra từ Mệnh đề 2.2.1 vì $\widetilde{F}_H(e_1) = d$. Hơn nữa, ta có $\widetilde{F}_H(e_2) = d$ và $\tilde{F}_L(e_2) = 0$.

$(c1) \Rightarrow (c2)$: Từ các kết quả trên, ta suy ra

$$F(x) = F(Cy - \bar{x}) = F(Cy) + F(-\bar{x}) - 2z_{Cy,\bar{x}} = \tilde{F}(y) - k$$

với $k = -F(-\bar{x}), \widetilde{F}_H(y) = F_H(y) = F_H(Cy)$ và $\tilde{F}_L(y) = F_L(Cy) - 2z_{Cy,\bar{x}}$. Giả sử $y \in \tilde{F}_H^{-1}(d)$. Khi đó $F_H(Cy) = d$, và bởi $(c1)\,\{F_L(Cy), d\}$ độc lập tuyến tính. Do đó $\left\{\tilde{F}_L(y), d\right\}$ cũng là độc lập tuyến tính, vì $\tilde{F}_L(y) = F_L(Cy) - 2z_{Cy,\bar{x}}$ và $z_{Cy,\bar{x}} = \begin{pmatrix} \langle \bar{x}, ACy\rangle \\ \langle \bar{x}, BCy\rangle \end{pmatrix} = \langle \bar{x}, Cy\rangle d$.

$(c2) \Rightarrow (c1)$: tương tự.

Trường hợp $n \geq 2$, cả hai $(c1)$ và $(c2)$ đều không đúng, nó được suy ra từ (b). $\square$

Định lý tiếp theo đặc trưng những hướng d sao cho $F(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ d$ là không lồi.

Định lí 2.2.14. *Giả sử f, g là các hàm bậc hai và $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2, d \neq 0$. Các khẳng định sau là tương đương:*

(a) $F(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ d$ không lồi;

(b) Các biểu thức sau là đúng:

$(b1)$ $\{a, b\} \subseteq (KerA \cap \operatorname{Ker} B)^{\perp}$;

$(b2)$ $d_2 A = d_1 B$;

$(b3)$ $-d \in F_H(\mathbb{R}^n)$;

$(b4)$ $[\langle Au, u\rangle = -d_1, \langle Bu, u\rangle = -d_2] \Longrightarrow d_1\langle b, u\rangle \neq d_2\langle a, u\rangle$.

Chứng minh $(a) \Rightarrow (b)$: Từ Bổ đề 2.2.9, ta có $F_L(\operatorname{Ker}A \cap \operatorname{Ker}B) = \{0\}$ và do đó $(b1)$ là đúng, hơn nữa $\operatorname{Int}F_H(\mathbb{R}^n) = \emptyset$. Bây giờ ta giới thiệu hàm $\tilde{F}$ có dạng giống như F, nhưng trên $\mathbb{R}^{n+1}$, với $\tilde{F}(0) = 0$ và các dữ kiện

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \tilde{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Thì ta có $\tilde{F}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = F(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ d$ và $\tilde{F}_H\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = F_H(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ d$. Vì (b2) là đúng khi và chỉ khi $F_H(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}d$, ta có ngay $\operatorname{Int}\tilde{F}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) \neq \emptyset$ nếu $F_H(\mathbb{R}^n) \not\subseteq \mathbb{R}d$. Do đó, nếu $(b2)$ là không đúng thì $\widetilde{F}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ là lồi bởi Bổ đề 2.2.9, nên, $F(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ d$ là lồi, nó chứng minh khẳng định (a) suy ra $(b2)$.

(b3): Bây giờ ta kiểm tra rằng $F_H^{-1}(-d) \neq \emptyset$. Nếu ngược lại $-d \notin F_H(\mathbb{R}^n)$, ta có $F_H(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}_+ d$ bởi $(b2)$. Do đó, hoặc $F_H(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ hoặc $F_H(\mathbb{R}^n) =$

$\mathbb{R}_+ d$. Trường hợp thứ nhất $A = 0$ và $B = 0$, suy ra tính lồi của $F(\mathbb{R}^n)$, điều này không thể vì đã giả sử (a) đúng. Trường hợp thứ hai cũng không thể xẩy ra vì phần (c) của Mệnh đề 2.2.7, vậy (b3) phải đúng.

$(b4)$: Lấy $u \in \mathbb{R}^n$ sao cho $F_H(u) = -d$ và $F_L(u) = \lambda_0 d$ với $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ nào đó. Từ (b2) với mọi $x \in \mathbb{R}^n, z_{x,u} \in \mathbb{R}d$. Điều này cùng với sự thật rằng $F(x + tu) = F(x) + 2z_{x,u} - t^2 d + t\lambda_0 d$, ta nhận được $F(x) + \mathbb{R}d \in F(\mathbb{R}^n)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Do đó, tính lồi của $F(\mathbb{R}^n)$ được suy ra từ Bổ đề 2.1.2, điều này mâu thuẫn với (a).

$(b) \Rightarrow (a)$: Vì A đối xứng, ta luôn tìm được ma trận không suy biến D thỏa mãn $D^\top AD = d_1 \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & -I_{m_2} \end{pmatrix}$, trong đó I_l là ma trận đơn vị cỡ l (vì (b1) ta có thể bỏ qua các giá trị riêng nếu có), và $m_2 \geq 1$ bởi (b3). Từ $(b2)$, ta cũng có $D^T BD = d_2 \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & -I_{m_2} \end{pmatrix}$.

Áp dụng bổ đề trước cho cả hai khối tương ứng với các ma trận A và B. Do đó, ta có $m_2 = 1$ vì ngược lại $(b3)$ là không thể do phần (c) của Bổ đề 2.2.13. Do đó từ nay trở đi ta có thể giả sử $m_1 = m$ và $m_2 = 1$. Từ Bổ đề 2.2.13, tồn tại $0 \leq t_1, t_2, k \in \mathbb{R}^2, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ và một ma trận vuông $C = \begin{pmatrix} C_{m_1} & 0 \\ 0 & C_{m_2} \end{pmatrix}$ sao cho $C^\top C = I$, và nếu $x = Cy - \bar{x}$, có ngay $F(x) = \widetilde{F}(y) - k$, trong đó $\widetilde{F}$ là như F với dữ kiện $\tilde{A} = D^\top AD, \widetilde{B} = D^\top BD$, $\tilde{a} = -d_2 t_1 e_1 - d_2 t_2 e_{m+1}$, và $\tilde{b} = d_1 t_1 e_1 + d_1 t_2 e_{m+1}$.

Bởi (b3), $\left\{d, \widetilde{F}_L(y)\right\}$ là độc lập tuyến tính với mọi $y \in \widetilde{F}_H^{-1}(-d)$. Diễn tả cuối này có nghĩa là $\widetilde{F}_H(y) = \left(\sum_{i=1}^m y_i^2 - y_{m+1}^2\right) d = -d$, nó rút ngọn lại thành $y_{m+1}^2 = 1 + \sum_{i=1}^m y_i^2$.

Mặt khác, $\widetilde{F}_L(y) = (t_1 y_1 + t_2 y_{m+1})\, d_\perp$. Khi đó $\left\{d, \widetilde{F}_L(y)\right\}$ độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu $t_1y_1 + t_2y_{m+1} \neq 0$.

Ta chỉ ra rằng $F(\mathbb{R}^n)+\mathbb{R}_+d$ là không lồi. Trước hết, để ý rằng $\vec{F}(\pm\gamma e_{m+1}) = -\gamma^2 d \pm \gamma t_1 d_\perp$, do đó $-\gamma^2 d \pm \gamma t_1 d_\perp - k \in F(\mathbb{R}^n)$ với mọi $\gamma > 0$. Bây giờ ta kiểm tra rằng với mọi $\gamma > 0$,

$$-\gamma^2 d - k = \frac{-\gamma^2 d + \gamma t_1 d_\perp - k - \gamma^2 d - \gamma t_1 d_\perp - k}{2} \notin F(\mathbb{R}^n),$$

nó suy ra rằng $-\gamma^2 d - k \notin F(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ d$ với mọi γ đủ lớn. Giả sử rằng tồn tại $y \in \mathbb{R}^{m+1}$ sao cho $-\gamma^2 d = \tilde{F}(y)$. Nhưng

$$\tilde{F}(y) = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - y_{m+1}^2\right) d + (t_1y_1 + t_2y_{m+1})\, d_\perp.$$

Do đó

$$y_{m+1}^2 = \gamma^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i^2 \text{ và } t_1y_1 + t_2y_{m+1} = 0. \tag{2.21}$$

Nó dẫn đến một sự mâu thuẫn, vì phương trình thứ hai suy ra rằng

$$\widetilde{F}\left(\frac{1}{\gamma}y\right) = \tilde{F}_H\left(\frac{1}{\gamma}y\right) = -d$$

và do đó $\left\{d, \tilde{F}_L\left(\frac{1}{\gamma}y\right)\right\}$ phải là độc lập tuyến tính, nó là, như ta thấy ở trên, $t_1y_1 + t_2y_{m+1} \neq 0$. □

Từ các kết quả trước ta có đinh lý sau.

Định lí 2.2.15. *Nếu $n \geq 1$ và f, g là các hàm bậc hai. Nếu $F(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+d$ là lồi với mọi $d \in \mathbb{R}^2, d \neq 0$, thì $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi.*

Chứng minh. Nếu $F(\mathbb{R}^n)$ là không lồi thì $F_H(\mathbb{R}^n) \neq \{0\}$, và bởi Bổ đề 2.2.9, F_L $(\mathrm{Ker}A \cap\ \mathrm{Ker}B) = \{0\}$ và $\mathrm{Int}F_H(\mathbb{R}^n) = \emptyset$. Từ điều kiện cuối, $F_H(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}d$ với $d \in \mathbb{R}^2$ nào đó, nó tương đương, như ta dã thấy trong chứng minh của định lý trước, với $d_2A = d_1B$. Thực sự hoặc $F_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}d$ hoặc $F_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}_+d$ hoặc $F_H(\mathbb{R}^n) = -\mathbb{R}_+d$. Trong trường hợp $F_H^{-1}(-d) \neq \emptyset$, ta thực hiện như sau. Bởi Định lý 2.2.14, $\{d, F_L(u)\}$ phụ thuộc tuyến tính với $u \in F_H^{-1}(-d)$ nào đó (hoặc tất cả). Thì với những cái mà $u, F_L(u) = \gamma d$ với $\gamma \in \mathbb{R}$ nào đó. Mặt khác, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, tất cả $t \in \mathbb{R}$, giả sử rằng $d_2 \neq 0$, có ngay

$$
\begin{aligned}
F(x + d_2tu) &= F(x) - d_2^2t^2d + \gamma d_2td + 2td_2z_{x,u} \\
&= F(x) - d_2^2t^2d + \gamma d_2td + 2t\langle Bx, u\rangle d.
\end{aligned}
$$

Với trường hợp $d_1 \neq 0$, có ngay

$$F(x + d_1tu) = F(x) - d_1^2t^2d + \gamma d_1td + 2t\langle Ax, u\rangle d)\,.$$

Từ đây, ta suy ra $F(\mathbb{R}^n) - \mathbb{R}_+d \subseteq F(\mathbb{R}^n)$. Nếu $F_H^{-1}(-d) = \emptyset$ nhưng $F_H^{-1}(d) \neq \emptyset$, ta thực hiện với $\tilde{d} = -d$ để đi đến phương trình tương tự như trên, suy ra $F(\mathbb{R}^n) - \mathbb{R}_+\tilde{d} \subseteq F(\mathbb{R}^n)$. Do đó $F(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+d \subseteq F(\mathbb{R}^n)$. Các lập luận trên chứng minh, bất kỳ một trong ba tình huống trên $F_H(\mathbb{R}^n)$, ta có $F(\mathbb{R}^n) + F_H(\mathbb{R}^n) \subseteq F(\mathbb{R}^n)$. Do đó, $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi vì nó là hệ quả của Định lý 2 trong [10], điều này mâu thuẫn, vậy $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi. □

Kết hợp hai định lý trên, ta nhận được một kết quả về tính lồi của tập ảnh cho cặp hàm bậc hai, nó là tổng quát hóa của Định lý Dines (xem [8, Định lý 2]).

Định lí 2.2.16. *Giả sử $n \geq 1$ và f, g là các hàm bậc hai. Khi đó, $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi nếu và chỉ nếu với mọi $d \in \mathbb{R}^2, d \neq 0$, một trong các điều kiện sau thỏa mãn:*

$(C1)$ $F_L(ker\ A \cap \ker B) \neq \{0\}$;

$(C2)$ $d_1 B \neq d_2 A$;

$(C3)$ $-d \notin F_H(\mathbb{R}^n)$;

$(C4)$ $\exists u \in F_H^{-1}(-d) : d_1\langle b, u\rangle = d_2\langle a, u\rangle$.

Bây giờ ta sẽ áp dụng các kết quả trên cho các bài toán đã đặt ra, tức điều kiện có nghiệm của các hệ phương trình dạng

$$\begin{cases} f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0 < 0 \\ g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0 \leq 0 \end{cases} ; \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0 < 0 \\ g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0 = 0 \end{cases} . \tag{2.23}$$

Định lí 2.2.17. *Giả sử có $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sao cho $g(\bar{x}) < 0$, khi đó hệ (2.22) vô nghiệm khi và chỉ khi tồn tại số thực $\lambda \geq 0$ sao cho*

$$\begin{bmatrix} A + \lambda B & a + \lambda B \\ a^T + \lambda b^T & a_0 + \lambda b_0 \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{2.24}$$

Chứng minh $(\Leftarrow)$ Vì (2.24) tương đương với $f(x) + \lambda g(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, do đó nếu $g(x) \leq 0$ thì $f(x)$ phải không âm. Vậy hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ vô nghiệm.

$(\Rightarrow)$ Bây giờ giả sử hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ vô nghiệm, ta chứng minh có số thực dương λ để (2.24) đúng.

Trước hết giả sử f và g là các hàm bậc hai thuần nhất, bởi Định lý 1.5.1, 2.2.16 ảnh của $\mathbb{R}^n$ qua ánh xạ (f, g) là lồi, và bởi $\{f(x) < 0, g(x) \le 0\}$ vô nghiệm nên nó không có giao với nón lồi $\mathcal{C} = \{(u_1, u_2) : u_1 < 0, u_2 \le 0\} \subset \mathbb{R}^2$, do đó chúng có thể được tách nhau bởi một đường thẳng. Điều này có nghĩa là tồn tại các số thực y_1 và y_2 sao cho

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 \le 0, \forall\, (u_1, u_2) \in \mathcal{C}. \tag{2.25}$$

$$y_1 f(x) + y_2 g(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.26}$$

Lấy $(-1, 0) \in \mathcal{C}$ ta có $y_1 \ge 0$ và đặt $(-\varepsilon, -1) \in \mathcal{C}$ trong đó ε là nhỏ tùy ý, ta có $y_2 \ge 0$. Trường hợp $y_1 = 0$ có thể được loại trừ bởi nếu $y_1 = 0$ thì (2.26) trở thành $y_2 g(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ điều này mâu thuẫn với $y_2 \ge 0$ và $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0\} \ne \emptyset$. Vậy ta đã chứng minh được rằng $y_1 > 0$. Lấy $\lambda = y_2/y_1 \ge 0$ ta có

$$f(x) + \lambda g(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Xét trường hợp tổng quát cho f và g. Vì $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0\} \ne \emptyset$, ta có thể giả sử $\bar{x} = 0$ (nếu không ta đặt hàm $\bar{g}(x) = g(x + \bar{x})$). Vì dạng tổng quát của f và g

$$f(x) = x^T A x + a^T x + a_0$$
$$g(x) = x^T B x + b^T x + b_0$$

nên theo giả thiết $g(0) = b_0 < 0$. Ta xét các hàm thuần nhất sau

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \tilde{f}(x, \tau) = x^T A x + \tau a^T x + \tau^2 a_0 \tag{2.27}$$

$$\tilde{g} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \tilde{g}(x, \tau) = x^T B x + \tau b^T x + \tau^2 b_0 \tag{2.28}$$

Bây giờ ta chứng minh rằng các hàm mới trên thỏa mãn điều kiện hệ

$$\tilde{f}(x,\tau) < 0$$
$$\tilde{g}(x,\tau) \le 0.$$

vô nghiệm. Giả sử ngược lại, có $(x,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$ thỏa mãn hệ trên. Nếu $\tau \neq 0$ thì

$$f(x/\tau) = \tilde{f}(x,\tau)/\tau^2 < 0,$$
$$g(x/\tau) = \tilde{g}(x,\tau)/\tau^2 \le 0,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết, sự vô nghiệm (hệ $\{f(x) < 0, g(x) \le 0\}$ vô nghiệm). Nếu $\tau = 0$ thì $x^T Ax < 0$ và $x^T Bx \le 0$, do đó

$$\underbrace{(\lambda x)^T A(\lambda x)}_{<0} + \lambda a^T x + a_0 < 0, \text{ nếu } |\lambda| \text{ là đủ lớn, và} \tag{2.29}$$

$$\underbrace{(\lambda x)^T B(\lambda x)}_{\le 0} + \lambda b^T x + \underbrace{b_0}_{<0} < 0, \text{ nếu } \lambda \text{ âm,} \tag{2.30}$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết, sự vô nghiệm (hệ $\{f(x) < 0, g(x) \le 0\}$ vô nghiệm).

Vậy ta đã chứng minh được hệ $\{\tilde{f}(x,\tau) < 0, \tilde{g}(x,\tau) \le 0\}$ vô nghiệm. Hơn nữa, lấy $(0,1)$ ta có $\tilde{g}(0,1) = g(0) < 0$. Do đó ta có thể dùng trường hợp các hàm thuần, đã chứng minh ở trên, cho cặp hàm $\{\tilde{f}(x,\tau), \tilde{g}(x,\tau)\}$, tức là tồn tại $\lambda \ge 0$ sao cho

$$\tilde{f}(x,\tau) + \lambda\tilde{g}(x,\tau) \ge 0, \forall (x,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

và với $\tau = 1$ ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lí 2.2.18. *Giả sử tồn tại $\bar{x}, \bar{y}$ sao cho $g(\bar{x}) < 0, g(\bar{y}) > 0$ và $\{A, B\}$ độc tập tuyến tính, khi đó hệ (2.23) vô nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$\begin{bmatrix} A + \lambda B & a + \lambda B \\ a^T + \lambda b^T & a_0 + \lambda b_0 \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{2.31}$$

Chứng minh. ($\Leftarrow$) Vì (2.31) tương đương với $f(x) + \lambda g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, do đó nếu $g(x) = 0$ thì $f(x)$ phải không âm. Vậy hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ vô nghiệm.

($\Rightarrow$) Bây giờ giả sử hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ vô nghiệm, ta chứng minh có số thực dương λ để (2.31) đúng.

Bởi Định lý 2.2.16 ảnh của $\mathbb{R}^n$ qua ánh xạ (f, g) là lồi, và bởi $\{f(x) < 0, g(x) = 0\}$ vô nghiệm nên nó không có giao với nón lồi

$$\mathcal{C} = \{(u_1, u_2) : u_1 < 0, u_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

do đó chúng có thể được tách nhau bởi một đường thẳng. Điều này có nghĩa là tồn tại các số thực y_1 và y_2 sao cho

$$y_1^2 + y_2^2 \neq 0; \tag{2.32}$$

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 \leq 0, \forall (u_1, u_2) \in \mathcal{C}; \tag{2.33}$$

$$y_1 f(x) + y_2 g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.34}$$

Trường hợp $y_1 = 0$ có thể được loại trừ bởi nếu $y_1 = 0$ thì (2.34) trở thành $y_2 g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ điều này kết hợp với giả thiết $g(\bar{x}) < 0, g(\bar{y}) > 0$, ta suy ra $y_2 = 0$. Mâu thuẫn với (2.32). Vậy y_1 phải khác không, do đó chia hai vế của (2.34) cho y_1 ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 2.2.19. Trong Định lý 2.2.17, ta giả thiết $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0\} \neq \emptyset$. Nếu giả thiết này không thỏa mãn thì $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ hoặc rỗng hoặc là một cái phẳng trong $\mathbb{R}^n$. Do đó hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ trở nên tầm thường.

Trong Định lý 2.2.17, ta giả thiết $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0\} \neq \emptyset$, $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\} \neq \emptyset$. Nếu giả thiết này không thỏa mãn thì $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ hoặc rỗng hoặc là một cái phẳng trong $\mathbb{R}^n$. Do đó hệ $\{f(x) < 0, g(x) = 0\}$ trở nên tầm thường.

Nếu giả thiết $\{A, B\}$ là độc lập tuyến tính trong Định lý 2.2.18 không thỏa mãn thì hệ $\{f(x) < 0, g(x) = 0\}$ có thể biến đổi thành hệ, trong đó có một hàm bậc nhất, do đó bài toán về sự có nghiệm của hệ $\{f(x) < 0, g(x) = 0\}$ cũng trở nên tầm thường.

KẾT LUẬN

Với mục tiêu đi sâu nghiên cứu, tìm hiểu về điều kiện cần và đủ để hệ phương trình, bất phương trình bậc hai có nghiệm, luận văn đã trình bày được các nội dung sau:

1. Hệ thống lại các khái niệm và tính chất của tập afin, tập lồi, nón, ánh xạ bậc hai, ma trận giả nghịch đảo.

2. Các kết quả liên quan đến tính lồi của tập ảnh của ánh xạ bậc hai từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^2$.

3. Áp dụng các tính chất lồi của tập ảnh của ánh xạ bậc hai vào bài toán điều kiện có nghiệm của hệ phương trình, bất phương trình bậc hai. Đưa ra các chứng minh chi tiết cho các định lý Định lý 2.2.17 và Định lý 2.2.18.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Phạm Ngọc Bội (2015), *Hình học lồi.* Bài giảng dành cho cao học. Đại học Vinh.

[2] Nguyễn Hữu Việt Hưng (2019) *Đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội .

Tiếng Anh

[3] S. Boyd, EL. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan (1994), *Linear matrix inequalities in system and control theory.* Siam, 15.

[4] Albert, A., 1969. *Conditions for Positive and Nonnegative Definiteness in Terms of Pseudoinverses.* SIAM J. Appl. Math., 17, pp. 434-440.

[5] Beck, A., 2007. *On the convexity of a class of quadratic mappings and its application to the problem of finding the smallest ball enclosing a given intersection of balls.* Journal of Global Optimization, 39, pp. 113-126.

[6] F. Flores-Bazán and F. Opazo, 2016.*Characterizing the convexity of joint-range for a pair of inhomogeneous quadratic functions and strong duality.* Minimax Theory Appl, 1, 257–290.

[7] Brickman, L., 1961. *On the field of values of a matrix.* Proceedings of the American Mathematical Society, 12, pp. 61-66.

[8] Dinesh, LAL.,1941,*On the Mapping of Quadratic Forms.* Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 47, pp. 494 – 498.

[9] M. R. Hestenes (1968): *Pairs of quadratic forms*, Linear Alg. Appl. 1 397–407

[10] M. Ramana, A. J. Goldman. *Quadratic maps with convex images*, Manuscript November 07 (1995); http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.54.3622.

[11] Polyak, B. T., 1998. *Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization.* Journal of Optimization Theory and Applications, 99, pp. 553-583.