BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ THANH TÂN

ẢNH CỦA ÁNH XẠ ĐA THỨC BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ THANH TÂN

ẢNH CỦA ÁNH XẠ ĐA THỨC BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: **ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ**
Mã số:

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN HỮU QUANG

Nghệ An - 2022

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Tác giả bày tỏ lòng kính trọng và tri ân sâu sắc tới TS. Nguyễn Hữu Quang - thầy giáo hướng dẫn khoa học - đã dành nhiều thời gian và công sức để lựa chọn tài liệu tham khảo và đặt ra đề tài cũng như giúp đỡ cho chúng tôi hoàn thành nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn.

Tác giả gửi lời cảm ơn trân trọng đến các nhà giáo, nhà khoa học thuộc Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, Khoa Toán học, Trường Sư phạm - Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho chúng tôi hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu.

Xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Trường THPT Nguyễn Huệ - nhà trường công tác của tác giả, đã hỗ trợ nhiều về thời gian, tinh thần và vật chất cho chúng tôi để hoàn thành nhiệm vụ học tập sau đại học.

Nội dung của luận văn có ý nghĩa khoa học thực sự và mới mẻ đối với bản thân tác giả - một giáo viên dạy toán ở trường trung học phổ thông. Dù đã hết sức cố gắng đọc, hiểu, suy nghĩ và nghiền ngẫm song việc trình bày một cách chi tiết những nội dung chuyên sâu thuộc về lĩnh vực lý thuyết số một cách chặt chẽ sẽ chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót.

Tác giả rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô giáo và của các bạn học viên lớp sau đại học ngành toán để chúng tôi thu được một bản luận văn hoàn thiện hơn.

Nghệ An, tháng 6 năm 2022

Tác giả

Nguyễn Thị Thanh Tân

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Tính chất của tập ảnh của một ánh xạ đa thức là một vấn đề khó và nó có nhiều ứng dụng trong thực tế. Các kết quả đầu tiên về hướng này thuộc về Toeplitz, Hausdorff (The Toeplitz-Hausdorff theorem) và Dines (Dines theorem), các kết quả này nói về tính lồi của tập ảnh của ánh xạ $F(x) = \left(x^T Ax, x^T Bx\right)$, trong đó A, B là các ma trận đối xứng cấp n. Cho đến nay bài toán tìm điều kiện cần và đủ để tập $F(\mathbb{R}^n)$ lồi, trong đó $F(x) = \left(x^T Ax, x^T Bx, x^T Cx\right)$ vẫn là một câu hỏi mở. Vấn đề trở nên phức tạp hơn nếu chúng ta tăng các thành phần của ánh xạ $F(x)$ lên con số lớn hơn 3. Do đó, trong khuôn khổ luận văn này chúng tôi chỉ nghiên cứu tính chất của tập ảnh của ánh xạ có một thành phần là đa thức bậc hai, còn lại các thành phần khác là các đa thức bậc nhất. Cụ thể là các ánh xạ đa thức có dạng sau:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ &x \mapsto F(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))^T, \end{aligned}$$

trong đó $f_1(x)$ là đa thức bậc hai n biến, $f_2(x), ..., f_m(x)$ là các đa thức bậc nhất n biến.

Về mặt ứng dụng, chúng tôi giới thiệu một các tiếp cận cho bài toán mở sau:

Tìm hình cầu bé nhất chứa giao của các hình cầu cho trước trong không gian.

Bởi tính thú vị và ứng dụng của các vấn đề trên chúng tôi chọn đề tài làm đề tài cho luận văn của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

- Hệ thống khái niệm, tính chất và ứng dụng của ảnh của ánh xạ đa thức bậc hai.
- Tìm hiểu chủ yếu về tính lồi của ảnh của ánh xạ đa thức bậc hai.
- Trình bày lại phương pháp giải quyết bài toán tìm hình cầu bé nhất chứa giao các hình cầu cho trước.
- Học hỏi một số kỹ thuật và phương pháp chứng minh tính lồi của một tập.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Đọc và trình bày lại một số kết quả nghiên cứu trong 2 bài báo tiếng Anh thuộc lĩnh vực lý thuyết số liên quan đến các hàm số số học của tác giả Amir Beck, Fabián Flores-Bazán và Felipe Opazo.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Tính lồi của ảnh ánh xạ đa thức bậc hai.
- Ứng dụng trong việc tìm hình cầu bé nhất chứa giao các hình cầu cho trước.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Tham khảo bài báo [4], [5] của tác giả Amir Beck, Fabián Flores-Bazán và Felipe Opazo và tìm hiểu các tài liệu và bài báo khác trên internet.

- Khai thác tính lồi của một tập để liên hệ với ảnh của ánh xạ đa thức bậc hai.

6. Nội dung chính và kết quả mới của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận văn này gồm có hai chương.

Chương 1 trình bày các khái niệm về ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính; không gian con trực giao, bù trực giao; giá trị riêng và vec tơ riêng của ma trận; ma trận nửa xác định dương và ma trận xác định dương; bất đẳng thức ma trận tuyến tính

Chương 2 trình bày tính lồi của ảnh của ánh xạ đa thức bậc hai; ứng dụng của nó trong việc tìm hình cầu bé nhất chứa giao các hình cầu cho trước

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị làm cơ sở cho chương 2.

1.1 Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử V và W là hai không gian véc tơ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, tập tất cả các phần tử của V có ảnh là $\theta \in W$ gọi là hạt nhân của f, ký hiệu là $Ker\,(f)$.

$$Ker\,(f) = \{x|x \in V,\ f\,(x) = \theta\}.$$

Tập tất cả các phần tử của W là ảnh của ít nhất một phần tử của V gọi là ảnh của f, ký hiệu là $Im\,(f)$.

$$Im\,(f) = \{y|y \in W, \exists x \in V,\ f\,(x) = y\}.$$

Như vậy $Im\,(f) = \ f\,(V)$.

Tính chất của nhân và ảnh.

Định lí 1.1.2. *Nếu $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì:*

a. $Ker\,(f)$ là một không gian con của V.

b. $Im\,(f)$ là một không gian con của W

1.2 Không gian con trực giao, bù trực giao

Định nghĩa 1.2.1. Cho P, Q là các không gian con trong không gian véctơ Euclide $\mathbb{R}^n$. Khi đó

+) P được gọi là trực giao (hay vuông góc) với Q nếu với mọi $\overrightarrow{x} \in P, \overrightarrow{y} \in Q$ thì $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$, kí hiệu $P \perp Q$;

+) P được gọi là bù trực giao (hay bù vuông góc) với Q nếu $P \perp Q$ và $\mathbb{R}^n = P + Q$.

Mệnh đề 1.2.2. *1) Nếu $P \perp Q$ thì $P \cap Q = \{\overrightarrow{0}\}$.*

2) Nếu $P \perp Q$ và R bù trực giao với Q thì $P \subset R$.

3) Cho P là không gian con trong không gian véctơ Euclide n chiều V. Khi đó không gian bù trực giao của P là duy nhất, kí hiêu $P^{\perp}$.

Chứng minh. 1) Thật vậy, nếu $\overrightarrow{x} \in P \cap Q$ thì $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

2) Thật vậy, giả sử $\overrightarrow{u} \in P \subset V = R \oplus Q \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{r} + \overrightarrow{q}, \quad \overrightarrow{r} \in R, \overrightarrow{q} \in Q$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{q} = \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{q} + \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{q} \Rightarrow \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{q} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}.$$

Do đó $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{r} \in R$. Vậy $P \subset R$.

3) Thật vậy, từ tính chất 2) suy ra tính duy nhất của không gian con bù trực giao của P. Để chứng minh sự tồn tại của không gian con bù vuông góc của P, lấy cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_k}\}$ trong P. Theo định lý về sự tồn tại cơ sở trực chuẩn, trong V có sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_k}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$. Xét không gian con Q trong V sinh bởi hê $\{\overrightarrow{e}_{k+1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$. Khi đó, dễ thấy rằng Q là không gian bù vuông góc của P, tức $Q = P^{\perp}$. □

1.3 Giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận

Định nghĩa 1.3.1. Cho A là một ma trận vuông cấp n, thì một vectơ x khác vectơ – không được gọi là vectơ riêng của ma trận A nếu

$$Ax = \lambda x$$

cho một số vô hướng λ. Vô hướng λ được gọi là giá trị riêng của A và x được gọi vectơ riêng tương ứng với λ.

Nói chung, ảnh của một vectơ x qua phép nhân với ma trận vuông A khác với vectơ x về cả độ lớn và hướng. Tuy nhiên, trong trường hợp x là một vectơ riêng của A, phép nhân với A không thay đổi hướng.

Định lí 1.3.2. *Cho A là một ma trận vuông cấp n, λ là một giá trị riêng của A khi và chỉ khi*

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{1.1}$$

Phương trình (1.1) *được gọi là phương trình đặc trưng của A.*

Nói chung, đa thức đặc trưng của một ma trận vuông cấp n có dạng

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n$$

trong đó hệ số của λ^n là 1. Do đa thức bậc n có nhiều nhất n nghiệm, nên phương trình

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n = 0$$

có nhiều nhất n nghiệm phân biệt và do đó ma trận vuông cấp n có tối đa n giá trị phân biệt. Vì các nghiệm này có thể là số phức, nên một ma trận có thể có giá trị riêng phức, ngay cả khi chính ma trận đó có các hệ số thực.

Mệnh đề 1.3.3. *Cho A là một ma trận tam giác cấp n (tam giác trên, tam giác dưới hoặc đường chéo), khi đó các giá trị riêng của A là các phần tử trên đường chéo chính của A.*

Định lí 1.3.4. *Cho A là một ma trận vuông cấp n, các khẳng định sau là tương đương:*

1. *λ là một giá trị riêng của A.*

2. *Hệ phương trình $(\lambda I - A)\, x = 0$ có nghiệm không tầm thường.*

3. *Có một vectơ x khác vectơ – không sao cho $Ax = \lambda x$.*

4. *λ là một nghiệm của phương trình đặc trưng $\det(\lambda I - A) = 0$.*

1.4 Ma trận nửa xác định dương, ma trận xác định dương

Định nghĩa 1.4.1. Ma trận đối xứng $A \in S^n$ được gọi là nửa xác định dương nếu $x^T Ax \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và được gọi là xác định dương nếu $x^T Ax > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Tập hợp các ma trận nửa xác định dương ký hiệu là S_+^n và tập hợp các ma trận xác định dương ký hiệu là S_{++}^n.

A là ma trận nửa xác định dương ta ký hiệu là $A \succeq 0$. A là ma trận xác định dương ta ký hiệu là $A \succ 0$.

Định lí 1.4.2. *Cho A là một ma trận đối xứng, khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

1. *A là ma trận nửa xác định dương.*

2. *Tất cả các giá trị riêng của A không âm.*

3. Tồn tại ma trận B sao cho $A = B^T B$.

Định lí 1.4.3. *Cho A là một ma trận đối xứng, khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

1. A là ma trận xác định dương.

2. Tất cả các giá trị riêng của A đều dương.

3. Tồn tại ma trận vuông không suy biến B sao cho $A = B^T B$.

Định lí 1.4.4. *(Schur's complement). Cho $A \succ 0$. Khi đó*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow C - B^T A^{-1} B \succeq 0 \tag{1.2}$$

1.5 Bất đẳng thức ma trận tuyến tính

Định nghĩa 1.5.1. Bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI) là biểu thức có dạng

$$LMI\,(y) := A_0 + y_1 A_1 + y_2 A_2 + ... + y_m A_m \succeq 0$$

trong đó

$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ là một vectơ thực.

$A_0, A_1, A_2, ..., A_m \in S^n$ là các ma trận đối xứng.

Bất đẳng thức ma trận tuyến tính này xác định một ràng buộc lồi đối với y.

Chương 2

ẢNH CỦA ÁNH XẠ ĐA THỨC BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

2.1 Ảnh của ánh xạ đa thức bậc hai

Trước hết ta giới thiệu một số ký hiệu sẽ được dùng trong chương này. Cho trước tập không rỗng $K \subseteq \mathbb{R}^n$, bao đóng của nó được ký hiệu bởi $\bar{K}$; Bao lồi của nó, ký hiệu $\mathrm{Conv}K$, là tập lồi bé nhất chứa K, $\mathrm{Span}K$ là không gian véc tơ bé nhất K; Phần trong của K được ký hiệu bởi $\mathrm{Int}K$.

Tập $P \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là nón nếu $tP \subseteq P$ với mọi $t \geq 0$. $\mathrm{Cone}(K) \doteq \bigcup_{t\geq 0} tK$ là cái nón bé nhất chứa K. Ta đặt $\mathbb{R}_+u = \mathrm{Cone}\{u\}$ và $\mathbb{R}u \doteq \{tu : t \in \mathbb{R}\}$, trong đó $\mathbb{R}_+ \doteq [0, +\infty)$.

Tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$, các phần tử của $\mathbb{R}^n$ được xem như là các véc tơ cột, được ký hiệu bởi $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Do đó, $\langle a, b \rangle = a^\top b$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}^n$, trong đó $a^\top$ là chuyển vị của a.

Nón đối cực của K được định nghĩa bởi $K^* \doteq \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in K\}$.

Cho trước K, $K^\perp$ là không gian con trực giao với K, nghĩa là $K^\perp \doteq K^* \cap (-K^*)$; do đó $u^\perp$ đơn giản có nghĩa là trực giao siêu phẳng đến u.

Cho trước ánh xạ bậc hai $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, trong đó mỗi $f_i, i = 1, 2, \ldots, m$, đều có dạng

$$f_i(x) = x^\top A_i x + a_i^\top x, A_i \in \mathbb{S}^n, a_i \in \mathbb{R}^n,$$

đặt ánh xạ $F_H(x) \doteq \left(x^\top A_1 x, x^\top A_2 x, \ldots, x^\top A_m x\right)$.

Định lí 2.1.1 (Ramana-Goldman)**.** *Với hàm số F như trên, ta có*

$$F\left(\mathbb{R}^n\right) \text{ là lồi } \Longleftrightarrow F\left(\mathbb{R}^n\right) = F\left(\mathbb{R}^n\right) + F_H\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Chứng minh. Xét hàm số $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ được xác định bởi $T(t) = at^2 + bt + T(0)$ với $a, b, T(0) \in \mathbb{R}^m$, đặt $T_H(t) \doteq at^2, T_L(t) \doteq bt$. Cho trước $\lambda \in [0, 1], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \lambda T(\alpha) + (1-\lambda)T(\beta) = \\
= \; & \left[\lambda\alpha^2 + (1-\lambda)\beta^2\right] T_H(1) + [\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta] T_L(1) + T(0) \\
= \; & \left[(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta)^2 + \left(\lambda - \lambda^2\right)(\alpha - \beta)^2\right] T_H(1) \\
+ \; & [\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta] T_L(1) + T(0) \\
= \; & T(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta)) + T_H\left((\alpha - \beta)\sqrt{\lambda - \lambda^2}\right). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Đồng nhất thức này suy ra rằng với mọi véc tơ dạng $\lambda T(\alpha) + (1-\lambda)T(\beta)$ có thể được viết như $T_H(\gamma_1) + T(\gamma_2)$. Ngược lại, cho trước bất kỳ $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, bởi các chọn $\lambda = \frac{1}{2}$, $\alpha = \gamma_1 + \gamma_2$ và $\beta = \gamma_2 - \gamma_1$, đẳng thức (2.1) đạt được.
$(\Rightarrow)$: Giả sử $x, y \in \mathbb{R}^n$, ta xác định $\widetilde{F}(\gamma) \doteq F(\gamma x + y - x), \gamma \in \mathbb{R}$. Nên $\widetilde{F}(1) = F(y)$, và vì $\widetilde{F}_H$ tương ứng với phần thuần nhất với biến γ của $\widetilde{F}$, suy ra ngay rằng $\widetilde{F}_H(\gamma) = \gamma^2 F_H(x)$. Bởi (2.1); tồn tại $\tau \in [0, 1], \gamma_1, \gamma_2$ sao cho

$$\begin{aligned}
F_H(x) + F(y) &= \tilde{F}_H(1) + \widetilde{F}(1) = \tau\tilde{F}(\gamma_1) + (1-\tau)\tilde{F}(\gamma_2) \\
&= \tau F(\gamma_1 x + y - x) + (1-\tau) F(\gamma_2 x + y - x) \in F\left(\mathbb{R}^n\right).
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$: Ta xem xét $\tau F(x)+(1-\tau)F(y), 0<\tau<1$. Lấy hàm số $\widetilde{F}(\gamma) \doteq F(x+\gamma(y-x))$. Ta có thể kiểm tra ngay rằng $\widetilde{F}_H(\gamma)=\gamma^2 F_H(x-y), \widetilde{F}(0)=F(x)$, và $\widetilde{F}(1)=F(y)$. Từ (2.1) nó kéo theo sự tồn tại của $\gamma_i, i=1,2$, sao cho

$$
\begin{aligned}
\tau F(x)+(1-\tau)F(y) &= \tau\tilde{F}(0)+(1-\tau)\tilde{F}(1)=\tilde{F}_H\left(\gamma_1\right)+\tilde{F}\left(\gamma_2\right) \\
&= F_H\left(\gamma_1(y-x)\right)+F\left(x+\gamma_2(y-x)\right) \in F\left(\mathbb{R}^n\right)
\end{aligned}
$$

Điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp theo ta xem xét trường hợp tổng quát hơn Định lý trên. Xét các hàm số $f_i(x)=x^\top A_i x+a_i^\top x$ với $i=1,\ldots,m$, trong đó $A_i \in \mathbb{S}^N, a_i \in \mathbb{R}^n$. Xét ma trận $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$ và $d \in \mathbb{R}^k$, và ký hiệu $q \doteq \left(f_1,\ldots,f_m\right), f_{i,H}(x) \doteq x^\top A_i x, f_{i,B}(x,z) \doteq x^\top A_i z, f_{i,L}(x) \doteq a_i^\top x$. Cuối cùng, ta đặt

$$
\begin{gathered}
q_B \doteq \left(f_{1,B},\ldots,f_{m,B}\right), q_L \doteq \left(f_{1,L},\ldots,f_{m,L}\right), q_H \doteq \left(f_{1,H},\ldots,f_{m,H}\right), \\
q^z(x) \doteq q(x)+2q_B(x,z). \quad (2.2)
\end{gathered}
$$

Mệnh đề sau cung cấp một đặc trưng lồi của $F\left(\mathbb{R}^n\right)$, khi $F=(q,C)$.

Mệnh đề 2.1.2. *Giả sử $F(x) \doteq (q(x),\ C\,x)$, khi đó các khẳng định sau là đúng*

(a) $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ là lồi $\Longleftrightarrow q_H\left(\mathbb{R}^n\right) \subseteq q^z(Ker\ C)$ với mọi $z \in \mathbb{R}^n$.

(b) Nếu $q_H\left(\mathbb{R}^n\right)=q_H(Ker\ C)$ và $q^z(\operatorname{Ker} C)$ là lồi với mọi $z \in \mathbb{R}^n$ thì $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ là lồi.

Chứng minh. (a) Bởi Định lý Ramana-Goldman, ta biết rằng $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ là lồi nếu và chỉ nếu $F\left(\mathbb{R}^n\right)+F_H\left(\mathbb{R}^n\right) \subseteq F\left(\mathbb{R}^n\right)$, với $F_H(x)=\left(q_H(x),0\right)$.

$(\Rightarrow)$: Bởi Định lý Ramana-Goldman ta có, với mọi $z \in \mathbb{R}^n$ và mọi $y \in \mathbb{R}^n$, tồn tại $u \in \mathbb{R}^n$ sao cho $q(z)+q_H(y)=q(u)$ và $Cz=Cu$. Đặt $x \doteq u-z$, ta có $x \in \operatorname{Ker} C$, và hơn nữa,

$$
f_i(z)+f_{i,H}(y)=f_i(u)=f_i(z+x)=f_i(z)+\nabla f_i(z)^\top x+x^\top A_i x.
$$

Điều này suy ra rằng

$$f_{i,H}(y) = x^\top A_i x + (2A_i z + a_i)^\top x = f_i(x) + 2f_{i,B}(x,z),$$

điều này suy ra điều phải chứng minh.
($\Leftarrow$) Giả sử $x, y \in \mathbb{R}^n$. Bởi giả thiết, ta có thể viết $q(x)+q_H(y) = q(x)+q^x(u)$ với $u \in \operatorname{Ker} C$ nào đó. Do đó, không khó để kiểm tra rằng $q(x) + q^x(u) = q(x+u)$, và vì $Cx = C(x+u)$, ta đạt được $F(\mathbb{R}^n) + F_H(\mathbb{R}^n) \subseteq F(\mathbb{R}^n)$, điều này suy ra tính lồi của $F(\mathbb{R}^n)$ Định lý Ramana-Goldman.

(b) Các bao hàm sau là đạt được

$$q_H(\mathbb{R}^n) = q_H(\ker C) \subseteq q^z(\ker C) + q_H(\ker C) = q^z(\ker C),$$

trong đó đẳng thức thứ hai là hệ quả của Định lý Ramana-Goldman, vì $q^z(\ker C)$ là lồi. Do đó, dùng (a) ta suy ra điều phải chứng minh. □

.

Ví dụ 2.1.3. Bởi áp dụng Mệnh đề 2.1.2, ta sẽ chỉ ra tính lồi của $F(\mathbb{R}^n)$ trong đó $F(x) = (q(x), Cx)$. Lấy $n = 5, m = 2$, và các hàm số

$$f_1(x) \doteq x_1^2 + x_3 + x_4^2 - x_5^2, f_2(x) \doteq x_2^2 - x_3 - x_4^2 + x_5^2, x = (x_1, x_2, \ldots, x_5).$$

Ở đây,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

và

$$C=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ta có, $q(x)=(f_1(x),f_2(x))=x_1^2(1,0)+x_2^2(0,1)+x_3(1,-1)+x_4^2(1,-1)+x_5^2(-1,1)$, và

$$\ker C=\{(u_1,u_2,u_3,0,0): u_i\in\mathbb{R}, i=1,2,3\},$$
$$(\ker C)^{\perp}=\{(0,0,0,u_4,u_5): u_4,u_5\in\mathbb{R}\}.$$

Ta có thể kiểm tra ngay rằng $q_H(x)=x_1^2(1,0)+x_2^2(0,1)+x_4^2(1,-1)+x_5^2(-1,1), x_i\in\mathbb{R}\forall i=1,\ldots,5$. Do đó

$$q_H(\ker C)=\mathbb{R}^2_+, q_H\left(\mathbb{R}^5\right)=\mathbb{R}^2_+ +\mathbb{R}(1,-1),$$

cho thấy rằng $q_H\left(\mathbb{R}^5\right)\neq q_H(\mathrm{Ker}C)$. Mặt khác, với mọi $z\in\mathbb{R}^5, x\in \mathrm{Ker}C$,

$$q^z(x)=(x_1+z_1)^2(1,0)+(x_2+z_2)^2(0,1)+x_3(1,-1)+\left(-z_1^2,-z_2^2\right),$$

và

$$q^z(\ker C)=\mathbb{R}^2_+ +\mathbb{R}(1,-1)-\left(z_1^2,z_2^2\right)=q_H\left(\mathbb{R}^5\right)-\left(z_1^2,z_2^2\right)$$

điều này suy ra rằng $q_H\left(\mathbb{R}^5\right)\subseteq q^z(\ker C)$ với mọi $z\in\mathbb{R}^5$. Do đó Mệnh đề 2.1.2 nói rằng $F\left(\mathbb{R}^5\right)$ là lồi.

Ta tiếp tục đưa ra các kết quả tương tự khi $F\left(\mathbb{R}^n\right)+\mathbb{R}_+(d,0)\,(d\in\mathbb{R}^m)$ được xem xét thay vì $F\left(\mathbb{R}^n\right)$. Để có các kết này, ta đặt $F\doteq(q,h)$ trong đó q là như trên, và

$$h(x)=Cx, x\in\mathbb{R}^n.$$

Bây giờ ta xét hàm số $\widetilde{F}$, nó có dạng như F, nhưng xác định trên $\mathbb{R}^{n+1}$, với $\tilde{F}(0)=0$ và dữ kiện

$$\tilde{A}_i=\begin{pmatrix}A_i&0\\0&d_i\end{pmatrix},\tilde{C}=\begin{pmatrix}C&0\end{pmatrix},\tilde{a}_i=\begin{pmatrix}a_i\\0\end{pmatrix}.$$

Nên, bởi cách viết $\widetilde{F} \doteq (\widetilde{q}, \tilde{h})$, trong đó

$$\widetilde{q}(x) \doteq \left(x^\top \tilde{A}_1 x + \tilde{a}_1^\top x, \ldots, x^\top \tilde{A}_m x + \tilde{a}_m^\top x\right), \tilde{h}(x) = \widetilde{C}x, x \in \mathbb{R}^{n+1},$$

ta có, với mọi $d \in \mathbb{R}^m$,

$$\widetilde{F}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = F\left(\mathbb{R}^n\right) + \mathbb{R}_+(d, 0), \ker \widetilde{C} = (\ker C) \times \mathbb{R}.$$

Nhắc lại rằng $q_H(x) \doteq \left(x^\top A_1 x, \ldots, x^\top A_m x\right), x \in \mathbb{R}^n$, và do đó $\widetilde{q}_H(y) \doteq \left(y^\top \widetilde{A}_1 y,\ \ldots, y^\top \tilde{A}_m y\right), y = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Nên

$$\tilde{q}_H\left(x, x_{n+1}\right) = q_H(x) + dx_{N+1}^2, \tilde{q}_H(\ker \widetilde{C}) =$$
$$q_H(\ker C) + \mathbb{R}_+ d, \tilde{q}_H\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = q_H\left(\mathbb{R}^n\right) + \mathbb{R}_+ d.$$

Cuối cùng, như trên, ta đặt

$$q^z(x) \doteq q(x) + 2q_B(x, z) = q_H(x) + \begin{pmatrix} (2A_1 z + a_1)^\top \\ \vdots \\ (2A_m z + a_m)^\top \end{pmatrix} x. \tag{2.3}$$

Một cách tương tự, định nghĩa cho $\widetilde{q}^{(x, x_{n+1})}, x \in \mathbb{R}^n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Nên,

$$\begin{aligned} \widetilde{q}^{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}_{n+1})}\left(x, x_{n+1}\right) = &\ q^{\boldsymbol{z}}(x) + dx_{n+1}^2 + dx_{n+1} z_{n+1}, \widetilde{q}^{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}_{n+1})}(\ker \widetilde{C}) \\ = &\ q^{\boldsymbol{z}}(\ker C) + \mathbb{R}_+ d + \mathbb{R} d z_{n+1}. \end{aligned}$$

Định lý sau đây là hệ quả của mệnh đề trước và nó thích hợp cho các áp dụng.

Định lí 2.1.4. *Giả sử $F(x) \doteq (q(x),\ Cx\ )$ và $d \in \mathbb{R}^m$. Ta có các khẳng định sau là đúng:*

(a) $F\left(\mathbb{R}^n\right) + \mathbb{R}_+\left(d, 0_K\right)$ là lồi $\Longleftrightarrow q_H\left(\mathbb{R}^n\right) \subseteq q^z(\ker C) + \mathbb{R}_+ d$ với mọi $z \in \mathbb{R}^n$.

(b) Nếu $q_H\left(\mathbb{R}^n\right) + \mathbb{R}_+ d = q_H(\ker C) + \mathbb{R}_+ d$ và $q^z(\ker C) + \mathbb{R}_+ d$ là lồi với mọi $z \in \mathbb{R}^n$ thì $F\left(\mathbb{R}^n\right) + \mathbb{R}_+\left(d, 0_K\right)$ là lồi.

Kết quả tiếp theo nói về tính lồi của $F(\mathbb{R}^n)$ trong $\mathbb{R}^{m+k}$ và tính lồi của $q^z(\mathrm{Ker}C)$ trong $\mathbb{R}^m$.

Định lí 2.1.5. *Giả sử F được xác định như trên và $d \in \mathbb{R}^m$. Nếu q^z được xác định như trong 2.3 thì các khẳng định sau là tương đương:*

(a) Tập $F(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+(d, 0_K)$ là lồi.

(b) Với mọi $z \in \mathbb{R}^n, q_H(\mathbb{R}^n) \subseteq q^z(KerC) + \mathbb{R}_+ d$.

(c) Với mọi $z \in \mathbb{R}^n$ các điều kiện sau đạt được:

(c1) $q^z(\ker C) + \mathbb{R}_+ d$ là lồi;

(c2) $q_H(\mathbb{R}^n) \subseteq q_H(Ker\ C) + q^z(\ker C) + \mathbb{R}_+ d$.

Chứng minh. Sự tương đương giữa (a) và (b) được suy ra từ Định lý 2.1.4. Giả sử (b) đúng. Chú ý rằng $q^z(\mathrm{Ker}C) + \mathbb{R}_+ d$, với điểm cố định $z \in \mathbb{R}^n$, chính nó là một tập giống như tập xem xét ở (a). Thật vậy, xem xét hàm số $\psi(x) \doteq q^z(Vx)$, nó là,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} x^\top V^\top A_1 V x + \left(2V^\top A_1 z + V^\top a_1\right)^\top x \\ \vdots \\ x^\top V^\top A_m V x + \left(2V^\top A_m z + V^\top a_m\right)^\top x \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Ở đây, $x \in \mathbb{R}^p$ và $V \in \mathbb{R}^{n \times p}$ có hạng p thỏa mãn $V(\mathbb{R}^p) = \mathrm{Ker}C$. Rõ ràng $\psi(\mathbb{R}^p) = q^z(\mathrm{Ker}\,C)$. Bởi thêm ma trận không như phần tuyến tính của ψ, một áp dụng cho ψ của sự tương đương giữa (a) và (b), nó cho phép ta kết luận rằng $q^z(\mathrm{Ker}\ C) + \mathbb{R}_+ d = \psi(\mathbb{R}^p) + \mathbb{R}_+ d$ là lồi nếu và chỉ nếu

$$\psi_H(\mathbb{R}^p) \subseteq \psi^{z_0}(\mathbb{R}^p) + \mathbb{R}_+ d \quad \forall z_0 \in \mathbb{R}^p.$$

Vì $\psi_H(x) = f_H(Vx)$ và $\psi^{z_0}(x) = q^{z+Vz_0}(Vx)$, cái bao hàm cuối trở thành

$$q_H(\ker C) \subseteq q^z(\ker C) + \mathbb{R}_+ d \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Do đó, (c1) được suy ra bởi (b). Ta có (b) $\Rightarrow$ (c2) là hiển nhiên. Cuối cùng, $(c) \Rightarrow (b)$ là hệ quả của Định lý của Ramana-Goldman khi áp dụng hàm số thích hợp $\tilde{\psi}$. Thật vậy, ta xem xét hàm số

$$\tilde{\psi}(x) = \left(x^\top \tilde{A}_1 x + \tilde{a}_1^\top x, \ldots, x^\top \tilde{A}_m x + \tilde{a}_m^\top x\right), x \in \mathbb{R}^{p+1},$$

trong đó

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} V^\top A_i V & 0 \\ 0 & d_i \end{pmatrix}, \tilde{a}_i = \begin{pmatrix} V^\top (2A_i z + a_i) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nên $\tilde{\psi}(x, x_{p+1}) = \psi(x) + x_{p+1}^2 d$ và $\tilde{\psi}_H(x, x_{p+1}) = \psi_H(x) + x_{p+1}^2 d \ \forall\ x \in \mathbb{R}^p$ và mọi $x_{p+1} \in \mathbb{R}$, và do đó

$$\tilde{\psi}\left(\mathbb{R}^{p+1}\right) = \psi\left(\mathbb{R}^p\right) + \mathbb{R}_+ d, (\tilde{\psi})_H\left(\mathbb{R}^{p+1}\right) = \psi_H\left(\mathbb{R}^p\right) + \mathbb{R}_+ d.$$

Bởi $(c1), \tilde{\psi}\left(\mathbb{R}^{p+1}\right)$ là lồi, và kết quả của Ramana-Goldman, ta có

$$\tilde{\psi}\left(\mathbb{R}^{p+1}\right) + (\tilde{\psi})_H\left(\mathbb{R}^{p+1}\right) = \tilde{\psi}\left(\mathbb{R}^{p+1}\right).$$

Điều này có nghĩa là

$$q^z(\ker C) + \mathbb{R}_+ d + q_H(\ker C) \subseteq q^z(\ker C) + \mathbb{R}_+ d.$$

Nên, từ (c2) nó dẫn đến

$$q_H\left(\mathbb{R}^n\right) \subseteq q^z(\ker C) + q_H(\ker C) + \mathbb{R}_+ d \subseteq q^z(\ker C) + \mathbb{R}_+ d$$

điều này chính là (b). □

.

Phần (c) ủa Định lý 2.1.4 là khá thú vị. Theo kết quả này, để xét tính lồi của tập ảnh, ta cần kiểm tra các điều kiện (c1) và (c2). Một đặc trưng của tính lồi của tập như $q^z(\mathrm{Ker}C) + \mathbb{R}_+ d$ đã được đưa ra khi $m = 2$ xem [9]; với $m \geq 3$ nó vẫn là một câu hỏi mở, thậm chí cho trường hợp các hàm bậc hai thuần nhất, ngoại trừ một điều kiện đủ của Polyak [9]. Mặt khác, (c2) có nghĩa là điều kiện nằm trong phải được thỏa mãn, tập bên trái là nón (lồi khi $m = 2$ bởi Định lý Dines), trong khi đó tập bên phải là tổng của một tập lồi và các tập khác.

Để có kết quả tiếp theo ta cần đổi biến như việc đã làm trong chứng minh của Định lý 2.1.5. Trong định lý sau, ta đặt $q \doteq (f, g)$, trong đó

$$f(x) \doteq x^\top Ax + a^\top x, g(x) \doteq x^\top Bx + b^\top x,$$

và C là một ma trận có cỡ phù hợp.

Định lí 2.1.6 (Convexity). *Với dữ kiện như đã đề cập ở trên và cố định bất kỳ $z \in \mathbb{R}^n$. Khi đó, $(f, g)^z(\ker C) + \mathbb{R}_+(1, 0)$ là lồi nếu và chỉ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:*

$(C1)$ $B(\ker C) \subseteq (\mathit{ker}\ C)^\perp$ *và* $\exists v \in \ker C$ *sao cho* $Av \in (\mathrm{kerC})^\perp$ *và một trong hai* $\nabla f(z)^\top v \neq 0$ *hoặc* $\nabla g(z)^\top v \neq 0$.

$(C2)$ $B(\ker C) \not\subseteq (\ker C)^\perp$.

$(C3)$ $B(\ker C) \subseteq (\mathrm{kerC})^\perp$ *và* $A \succcurlyeq 0$ *trên* $\mathit{ker}\ C$.

$(C4)$ $B(\ker C) \subseteq (\mathrm{kerC})^\perp$ *và tồn tại* $v \in \ker C$ *sao cho*

$$v^\top Av < 0 \text{ và } \nabla g(z)^\top v = 0.$$

Chứng minh. Xét hàm số ψ xác định như trong (2.4) với $m = 2$ (với $f_1 = f$, $f_2 = g$), Nhận xét 5.2 trong [8] cho thấy rằng tính lồi của $\psi\,(\mathbb{R}^p) + \mathbb{R}_+(1, 0)$ là tương đương với sự đạt được của bất kỳ các điều kiện sau:

$(\tilde{\mathrm{C}}1) V^\top BV = 0$, và tồn tại $u \in \ker V^\top AV$ sao cho hoặc $(2Az + a)^\top Vu \neq 0$ hoặc $(2Bz + b)^\top Vu \neq 0$;

$(\tilde{\mathrm{C}}2) V^\top BV \neq 0$;

$(\widetilde{\mathrm{C}}3) V^\top BV = 0$ và $V^\top AV \succcurlyeq 0$;

$(\tilde{\mathrm{C}}4) V^\top BV = 0$, và tồn tại $x \in \mathbb{R}^p$ sao cho $x^\top V^\top AVx < 0$ và $(2Bz+$ b$)$ $^\top Vx = 0$.

Dễ dàng kiểm tra rằng

$$V^\top BV = 0 \Longleftrightarrow \ker C \subseteq g_H^{-1}(0) \Longleftrightarrow B(\ker C) \subseteq (\ker C)^\perp$$

và do đó, ta đạt được $(\tilde{\mathrm{C}}4) = (\tilde{\mathrm{C}}4), (\tilde{\mathrm{C}}2) = (\tilde{\mathrm{C}}2)$ và $(\tilde{\mathrm{C}}3) = (\tilde{\mathrm{C}}3)$. □

Trước khi sang kết quả tiếp theo, ta có một số chú ý như sau.

Chú ý 2.1.7. Với Định lý 2.1.6, ta đạt được

(i) Nếu (C1) đạt được với $v \in \ker C$ nào đó và $z_0 \in (\ker\, C)^\perp$ nào đó, thì (C1) cũng đạt được với v đó và với mọi $z \in z_0 + \ker C$. Thật vậy, ta viết $z = z_0 + z_1$ với $z_1 \in \ker\, C$; thì

$$\begin{aligned}\nabla f(z)^\top v &= 2\left(Az_0 + Az_1\right)^\top v + a^\top v = 2z_0^\top Av + 2z_1^\top Av + a^\top v = 2z_0^\top Av + a^\top v \\ &= \nabla f\left(z_0\right)^\top v.\end{aligned}$$

Tương tự, ta nhận được $\nabla g(z)^\top v = \nabla g\left(z_0\right)^\top v$. Điều phải chứng minh.

(ii) Nếu (C4) đạt được với $v \in \ker\, C$ nào đó và với $z_0 \in (\ker\, C)^\perp$, thì (C4) cũng đạt được với v đó và $\forall z \in z_0+$ $\ker\, C$. Chứng minh tương tự như (i).

(iii) Chú ý rằng các điều kiện (C2) đến (C4) trong Định lý 2.1.6 loại trừ lẫn nhau, như (C1) và (C2), nhưng giữa (C1) và (C4) thì không, như Ví dụ 2.1.10 cho thấy điều này.

Một số khẳng định có được từ Định lý 2.1.6 như sau.

Chú ý 2.1.8. (i) Giả sử $h(x) \doteq Cx$. Nếu $(C4)$ của Định lý 2.1.6 đat được với $z \in \mathbb{R}^n$ nào đó và $v \in \ker\, C$ nào đó, thì nó cũng đạt được $\nabla g(x)^\top v =$

$0 \forall x \in h^{-1}(Cz)$. Thật vậy, lấy bất kỳ $x \in h^{-1}(Cz)$. Thì $x = z + z_0$ với $z_0 \in \ker C$, và do đó

$$\nabla g(x)^\top v = \nabla g(z)^\top v + 2z_0^\top Bv = \nabla g(z)^\top v.$$

(ii) Tương tự như trong (i), ta có kết luận tương tự như (C1) của Định lý 2.1.6.

Bây giờ ta đưa ra một số ví dụ cho thấy khả năng ứng dụng của Định lý 2.1.6. Hơn nữa, chúng cũng cho thấy rằng Định lý 2.1.5 cung cấp nhiều thông tin hơn tính không lồi của $F(\mathbb{R}^n)$.

Ví dụ 2.1.9. Ở đây, (C2) của Định lý 2.1.6 là thỏa mãn. Lấy các hàm số

$$f(x) \doteq -x_2^2 - 2x_1x_2, g(x) \doteq -x_1^2 + x_3^2, h(x) \doteq x_1 + x_2, x = (x_1, x_2, x_3).$$

Ở đây,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$\ker C = \{(t, -t, s) : t, s \in \mathbb{R}\}; (\ker C)^\perp = \{(t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Có thể kiểm tra ngay rằng $B(\ker C)\Phi(\ker C)^\perp$, và do đó (C2) đạt được. Do đó, bởi Định lý 2.1.6, $(f, g)^z(\ker C) + \mathbb{R}_+(1, 0)$ là lồi với mọi $z \in \mathbb{R}^3$. Hơn nữa, đặt $q = (f, g)$, ta có ngay $q(t, -t, s) = q_H(t, -t, s) = t^2(1, -1) + s^2(0, 1)$, và với mọi $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$q^z(t, -t, s) = \left((t + z_1)^2 - z_1^2, -(t + z_1)^2 + z_1^2 + (s + z_3)^2 - z_3^2\right).$$

Đặc biệt, $q_H(\ker C) = \mathbb{R}_+(1,-1) + \mathbb{R}_+(0,1) = q_H(\ker\ C) + \mathbb{R}_+(1,0)$, và do đó $q_H\left(\mathbb{R}^3\right) \neq q_H(\ker C) = q^0(\ker C)$ vì $q_H(2,-4,1) = (0,-3) \notin q_H(\mathrm{kerC})$, nó có nghĩa rằng (b) của Định lý 2.1.5 (với $z=0$ và $d=(1,0)$) không đạt được. Do đó $(f,g,h)\left(\mathbb{R}^3\right) + \mathbb{R}_+(1,0,0)$ là không lồi, và do đó $(f,g,h)\left(\mathbb{R}^3\right)$ cũng không lồi.

Ví dụ 2.1.10. Ở đây, các điều kiện (C4) và (C1) là đạt được với cùng $z \in (\ker C)^{\perp}$.

Nó thực sự cho thấy rằng thậm chí tính không lồi của $F\left(\mathbb{R}^3\right)$ được chứng minh một các đơn giản bởi lấy các điểm $(1,1,\pm 1) \in F\left(\mathbb{R}^3\right)$, trong đó $(1,1,0) \notin F\left(\mathbb{R}^3\right)$, Định lý 2.1.5 cung cấp nhiều thông tin: nó cho thấy tính không lồi của $F\left(\mathbb{R}^3\right) + \mathbb{R}_+(1,0,0)$ và do đó của $F\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Ta xét các hàm số $f(x) \doteq x_2^2 + 2x_1x_2, g(x) \doteq (x_1+x_2)(2x_3+1), h(x) \doteq x_1+x_2, x=(x_1,x_2,x_3)$. Ở đây, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Thì, ta dễ dàng đạt được $B(\ker\ C) \subseteq (\ker\ C)^{\perp}$. Chọn $v=(1,-1,0) \in \ker\ C$ và bất kỳ z trong $(\ker C)^{\perp}$. Thì, $z=(t,t,0), v^{\top}Av=-1$, và vì $\nabla g(x) = (2x_3+\ 1, 2x_3+1, 2x_1+2x_2)$, ta có

$$\nabla g(z)^{\top} v = (1,1,4t)^{\top}(1,-1,0) = 0.$$

Do vậy (C4) của Định lý 2.1.6 đạt được, và do đó bởi Chú ý 2.1.7, (C4) thỏa mãn với mọi $z \in \mathbb{R}^3$. Do đó $(f,g)^z(\ker\ C) + \mathbb{R}_+(1,0)$ là lồi với mọi $z \in \mathbb{R}^3$. Hơn nữa, đặt $q=(f,g)$, ta có ngay

$$q_H(x) = \left((x_1+x_2)^2 - x_1^2, 2(x_1+x_2)x_3\right),$$

chúng suy ra rằng $q_H\left(\mathbb{R}^3\right)=\mathbb{R}^2$ và $q_H(t,-t,s)=t^2(-1,0)$, và do đó $q_H($ker $C)=\mathbb{R}_+(-1,0)$.

Mặt khác, với mọi $z=(z_1,z_2,z_3)\,, q^z(t,-t,s)=\Big(-(t+z_1)^2+z_1^2, 2(z_1+z_2)s\Big)$. Nên, $q^0(t,-t,s)=q_H(t,-t,s)$; nó là, (b) của Định lý 2.1.5 (với $z=0$ và $d=(1,0)$) không đạt được. Do đó $(f,g,h)\left(\mathbb{R}^3\right)+\mathbb{R}_+(1,0,0)$ là không lồi, nó suy ra tính không lồi của $(f,g,h)\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Cuối cùng, bởi chọn bất kỳ $z=(z_1,z_2,z_3)$ thỏa mãn $z_1+z_2\neq 0$ và $v=(0,0,t)$ với $t\neq 0$, $(C1)$ đạt được.

Ví dụ 2.1.11. Ở đây, (C3) thỏa mãn. Lấy B và C như trong Ví dụ 2.1.10, và $f(x)=x^\top Ax+a^\top x, g(x)=x^\top Bx+b^\top x$ với bất kỳ $a,b\in\mathbb{R}^3$, và

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Thì $v^\top Av=(t-s)^2+s^2\forall v=(t,-t,s)\in$ ker C. Do đó (C3) là thỏa mãn, và hệ quả là $(f,g)^z($ker $C)+\mathbb{R}_+(1,0)$ là lồi với mọi $z\in\mathbb{R}^3$. Hơn nữa, đặt $q\doteq(f,g)$; thì

$$q_H(x)=\Big((x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+x_1^2-x_2^2+x_3^2, 2(x_1+x_2)x_3\Big).$$

Do đó $q_H(t,-t,s)=\big((t-s)^2+s^2,0\big)$, và ta có $q_H($ker $C)=\mathbb{R}_+(1,0)$. Ta đạt được

$$\begin{aligned}&q^z(t,-t,s)=((t-s)^2+s^2+2(z_1-z_3+a_1-a_2)t+2(z_2+2z_3+a_3)s,\\&(b_1-b_2)t+(z_1+z_2+b_3)s).\end{aligned}$$

Ở đây, $a=(a_1,a_2,a_3)$ và $b=(b_1,b_2,b_3)$.

Để xác định một số nhóm điều kiện đảm bảo cho (c1) hoặc (c2) của Định lý 2.1.5 khi $m=2$, ta cần vài khái niệm mới. Nhắc lại rằng

$$q(x)\doteq(f(x),g(x)), q_H(x)\doteq\left(x^\top Ax, x^\top Bx\right), q_L(x)\doteq\left(a^\top x, b^\top x\right).$$

Định nghĩa 2.1.12. Cho trước a tuyến tính không gian con $\mathcal{L}$. Ta nói rằng q_H là

(i) $\mathcal{L}$-chính quy nếu

$$v \in \mathcal{L}, q_H(v) = 0 \Longrightarrow v = 0.$$

(ii) $\mathcal{L}$-chính quy yếu nếu

$$v \in \mathcal{L}, q_H(v) = 0 \Longrightarrow \{Av, Bv\} \subseteq \mathcal{L}^{\perp}.$$

Một số nhận xét liên quan đến tính chính quy và chính quy yếu được nêu trong các chú ý tiếp theo.

Chú ý 2.1.13. Giả sử

$$\mathcal{L}_0 \doteq \left\{x \in \mathcal{L} : \{Ax, Bx\} \subseteq \mathcal{L}^{\perp}\right\} \text{ và } \mathcal{L}_0' \doteq (\mathcal{L}_0)^{\perp} \cap \mathcal{L}.$$

Thì $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_0'$. Vì mọi $x \in \mathcal{L}_0'$ sao cho $q_H(x) = 0$ thỏa mãn $x \in q_H^{-1}(0) \cap \mathcal{L}$, ta suy ra rằng

- $\mathcal{L}$-chính quy yếu của $q_H \Longrightarrow \mathcal{L}_0'$-chính quy của q_H.
- $q_H(\mathcal{L}) = q_H\left(\mathcal{L}_0'\right)$.
- Với trường hợp $\mathcal{L} = \ker C$, ta có ngay [7, Hệ quả 1]

$\left[q_H(\ker C) \neq \mathbb{R}^2 \text{ và } q_H \text{ và } \ker C - \text{chính quy }\right] \iff \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : t_1 A + t_2 B \succ 0 \text{ trên } \ker C.$

Đối với bổ đề tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng $\mathcal{L} = \ker C$ trong chú ý trước. Hơn nữa, ta đặt $q_L^z \doteq (q^z)_L$, và cho trước bất kỳ $k \in \ltimes, M \subseteq \mathbb{R}^k$, ta ký hiệu nón tiệm cận của M bởi

$$M^{\infty} = \left\{v \in \mathbb{R}^k : \exists t_n \to +\infty, \exists x_n \in M, \frac{x_n}{t_n} \to v\right\}.$$

Bổ đề 2.1.14. *Nếu f, g là các hàm số bậc hai như trên ($d = (1,0) \in \mathbb{R}^2$ và $m = 2$ trong Định lý 2.1.5). Thì,*

(a) $q^z(\ker C) + \mathbb{R}_+(1,0)$ là lồi với mọi $z \in \mathbb{R}^n$ nếu một trong các trường hợp sau đạt được:

(a1) $B(\ ker\ C) \nsubseteq (ker\ C)^\perp$;

(a2) $B(ker\ C) \subseteq (ker\ C)^\perp$ và $A \succcurlyeq 0$ trên ker C;

(a3) (C1) đạt được với $v \in \ker C$ nào đó và mọi $z \in (ker\ C)^\perp$;

(a4) (C4) đạt được với $v \in \ker C$ nào đó và mọi $z \in (\ker C)^\perp$.

(b) Giả sử rằng $\dim(\ker C) \geq 2$. Nếu q_H là ker C-chính quy, thì $q^z(\ker C)$ là lồi và đóng với mọi $z \in \mathbb{R}^n$. Hơn nữa,

$$(q^z(\ker C))^\infty = \left\{v \in \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}_+ v \in q^z(\ker C)\right\} = q_H(\ker C).$$

(c) Nếu int $q_H(ker\ C) \neq \emptyset$, thì $q^z(ker\ C)$ là lồi với mọi $z \in \mathbb{R}^n$.

(d) Nếu q_H là ker C-chính quy yếu, thì $\mathcal{L}_0'$-chính quy, và (c2) của Định lý 2.1.5 đạt được với điều kiện

$$q_H\left(\mathbb{R}^n\right) \subseteq q_H(\ker C) + q_L^z\left(\mathcal{L}_0\right) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Chứng minh. (a) Các kết quả được suy ra từ Định lý 2.1.6 và Chý ý 2.1.7.

(b) Bởi viết lại một cách tương đương ker C-chính quy của q_H như sau (V như trên)

$$x \in \mathbb{R}^p, q_H(Vx) = 0 \Longrightarrow x = 0,$$

và tính lồi là hệ quả của Định lý 2.2 trong [9] (hoặc xem [8, Định lý 4.6]).

Bây giờ ta chứng minh tính đóng của $q^z(\ker\ C)$. Giả sử $w_k \to w$ với $w_k = q^z\left(x_k\right), x_k \in \ker\ C$. Giả sử rằng $\sup_k \|x_k\| = +\infty$; thì, như một hệ quả, ta có thể xét $x_k / \|x_k\| \to v \in \ker C$ với $\|x_k\| \to +\infty$. Do đó, $0 = q_H(v)$, suy ra, bởi tính chính quy, $v = 0$, mâu thuẫn. Do đó $\|x_k\|$ là bị chặn, và do đó $w = q^z(x)$ với $x \in \ker\ C$ nào đó, trong đó x là một điểm tụ của (x_k), nó dẫn đến điều phải chứng minh. Ngược lại, $(q^z(\ker C))^\infty = \left\{v \in \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}_+ v \in q^z(\ker C)\right\}$, là một nón lớn nhất chứa trong $q^z(\ker C)$.

Phần còn lại là cần chứng minh đẳng thức cuối cùng. Giả sử $v \neq 0$ thuộc tập bên trái. Thì, với mọi $\rho \in \ltimes$, tồn tại $x_\rho \in \ker C$ sao cho $\rho v = q^z(x_\rho)$. Lấy $\rho \to \infty$, từ các đẳng thức trước ta có ngay rằng $\|\rho v\| \to +\infty$, và do đó $\sup_\rho \|x_\rho\| = +\infty$. Ta có thể giả sử rằng $x_\rho / \|x_\rho\| \to x_0 \in \ker C$ và $\|x_\rho\| \to +\infty$. Nên, $\rho/\|x_\rho\|^2 v = 1/\|x_\rho\|^2 q^z(x_\rho) \to q_H(x_0)$. Điều này suy ra rằng $\left(\rho/\|x_\rho\|^2\right)$ là bị chặn, và do đó, nếu không thì xét trên dãy con, nó hội tụ tới $\rho_0 \geq 0$. Bởi tính chính quy, $\rho_0 > 0$, nó dẫn đến $v \in q_H(\ker C)$.

(c) Ta viết $\operatorname{int} q_H(\ker C) = \operatorname{int}\{q_H(Vx) : x \in \mathbb{R}^p\} \neq \emptyset$, và do đó kết luận $q^z(\ker C)$ là lồi với mọi $z \in \mathbb{R}^n$ chính là hệ quả của Định lý 4.12 trong [8].

(d) Thật vậy, bởi giả thiết và Chú ý 2.1.13 (với $\mathcal{L} = \ker C$), ta có ngay với mọi $z \in \mathbb{R}^n$

$$q_H(\mathbb{R}^n) \subseteq q_H(\ker C) + q_L^z(\mathcal{L}_0) = q_H(\mathcal{L}_0') + q_L^z(\mathcal{L}_0) = q^z(\mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_0') = q^z(\ker C).$$

□

Dựa vào Bổ đề trước, ta có Định lý sau (liên quan đến Định lý 2.1.5).

Định lí 2.1.15. *Giả sử F là ánh xạ như trong Định lý 2.1.5 với $m = 2$ và q^z được xác định như trong* (2.3). *Các khẳng định sau đạt được:*

(a) Giả sử rằng q_H là ker C-chính quy và $\dim \ker C \geq 2$. *Thì,*

$$F(\mathbb{R}^n) \text{ là lồi } \Longleftrightarrow q_H(\mathbb{R}^n) = q_H(\ker C).$$

(b) Giả sử rằng q_H là ker C-chính quy yếu. Thì, $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi $\Longleftrightarrow \forall z \in \mathbb{R}^n, q^z(\ker C) = \mathbb{R}^2$ hoặc $q_H(\mathbb{R}^n) \subseteq q_H(\ker C) + q_L^z(\mathcal{L}_0)$.

Với trường hợp F là thuần nhất, Định lý 2.1.5 không yêu cầu giả thiết về tính chính quy.

Định lí 2.1.16 (Trường hợp thuần nhất). *Giả sử F được xác định như trên, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2+k}$ và $q_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ như $F(x) \doteq \left(x^\top Ax, x^\top Bx, Cx\right) = (q_H(x), Cx)$. Xét $q^z(x) \doteq q_H(x) + 2q_B(x,z)$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(a) *Tập $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi.*

(b) $\forall z \in \mathbb{R}^n, q_H(\mathbb{R}^n) \subseteq q^z(\ker C)$.

(c) $q_H(\mathbb{R}^n) = q_H(\ker C)$.

Chứng minh. Sự tương đương giữa (a) và (b) được suy ra từ Mệnh đề 2.1.2. Bây giờ, từ (b), ta có (c) bởi lấy $z = 0$.

Giả sử có (c). Ta sẽ chứng minh rằng tập $q^z(\text{kerC})$ là lồi với mọi $z \in \mathbb{R}^n$. Cố định $z \in \mathbb{R}^n$, ta xét $\psi(x) \doteq q^z(Vx)$ với V như trong chứng minh của Định lý 2.1.4; nên $\psi(\mathbb{R}^p) = q^z(\ker C)$. Bởi Định lý 4.16 trong [8], $q^z(\text{kerC})$ là lồi nếu và chỉ nếu với mọi $d \in \mathbb{R}^2, d \neq 0$, một trong điều kiện sau được thỏa mãn:

($\tilde{\text{C}}$1) $\exists\ u \in \left(\ker V^\top AV\right) \cap \left(\ker V^\top BV\right)$ sao cho hoặc $(Az)^\top Vu \neq 0$ hoặc $(Bz)^\top Vu \neq 0$;

($\tilde{\text{C}}$2) $d_1 V^\top BV \neq d_2 V^\top AV$;

($\tilde{\text{C}}$3) $-d \notin \psi_H(\mathbb{R}^p)$;

($\tilde{\text{C}}$4) $\exists\ u \in \psi_H^{-1}(-d)$ sao cho $d_1\left(V^\top Bz\right)^\top u = d_2\left(V^\top Az\right)u$.

Ta sẽ cho thấy rằng, nếu ($\tilde{\text{C}}$2) không đạt được, ta vẫn có tính lồi miễn là (c) được thỏa mãn. Cụ thể hơn, ta sẽ chứng minh rằng, với các giả thiết, ($\tilde{\text{C}}$4) thỏa mãn. Thật vậy, nếu ($\tilde{\text{C}}$2) không đạt được, thì $\dim q_H(\text{kerC}) = 1$ (trường hợp $\dim q_H(\ker C) = 0$ hiển nhiên suy ra tính lồi). Giả thiết (c) và đồng nhất thức $2q_B(a,b) = q_H(a+b) - q_H(a) - q_H(b)$ cho phép ta đạt được mở rộng $q_H(\ker C) = \operatorname{span} q_H(\mathbb{R}^n) = \operatorname{span} q_B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \operatorname{span}\left[q_H(\ker C) + q_B(\ker C, \mathbb{R}^n)\right]$. Do đó, ($\tilde{C}$4) được thỏa mãn, nó suy ra tính lồi của $q^z(\ker C)$.

Bây giờ, bởi Định lý Ramana-Goldman, ta có

$$q_H(\mathbb{R}^n) = q_H(\ker C) \subseteq q_H(\ker C) + q^z(\ker C) = q^z(\ker C)$$

điều này chứng minh (b). $\square$

Ví dụ 2.1.17. Lấy

$$q_H(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2, x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$

và $C = (1\ 1\ 0)$. Khi đó $\mathrm{kerC} = \{(\mathrm{t}, -\mathrm{t}, \mathrm{s}) : \mathrm{t}, \mathrm{s} \in \mathbb{R}\}$, và do đó $q_H(t, -t, s) = \left(4t^2 - s^2, s^2\right)$. Điều này dẫn đến $q_H\left(\mathbb{R}^3\right) = q_H(\mathrm{kerC}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, và do đó bởi Định lý 2.1.16 $F\left(\mathbb{R}^3\right)$ là lồi.

Ví dụ tiếp theo cho thấy rằng, nói chung, cả $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ lẫn $F\left(\mathbb{R}^n\right) + \left(\mathbb{R}_+^2 \times \{0_K\}\right)$ đều không lồi.

Ví dụ 2.1.18. Xét $F(x) = \left(-x^2, -x^2, x\right), x \in \mathbb{R}$. Dễ dàng để xác minh rằng

$$\frac{1}{2}F(1) + \frac{1}{2}F(-1) = (-1, -1, 0) \notin F(\mathbb{R}) + \left(\mathbb{R}_+^2 \times \{0\}\right),$$

nó cho thấy khẳng định trên là đúng.

Bây giờ ta xét trường hợp hàm F chỉ gồm một hàm bậc hai, các hàm còn lại đều bậc nhất, ta hy vọng tìm được điều kiện cụ thể hơn để $F(\mathbb{R}^n)$ lồi, tức các điều kiện này dễ kiểm tra.

Mệnh đề 2.1.19 ([10], Định lý 9)**.** *Giả sử* $h(x) = x^\top Ax + a^\top x + \alpha$ *với* $A \in \mathbb{S}^n, a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^M$, *và* $H \in \mathbb{R}^{M\times N}$. *Các khẳng định sau là tương đương:*

(a) $-\infty < \nu \doteq \inf_{x \in H^{-1}(d)} h(x)$.

(b) A là nửa xác định dương trên ker H và $\left[v^\top Av = 0, v \in \ker H \Longrightarrow (2Ax + a)^\top v = 0\ \forall x \in H^{-1}(d)\right]$

(c) $\operatorname{argmin}_{H^{-1}(d)} h \neq \emptyset$.

(d) A là nửa xác định dương trên ker H, và tồn tại $\bar{x} \in H^{-1}(d)$ sao cho $2A\bar{x} + a \in (\mathrm{kerH})^{\perp}$. Do đó, với các điều kiện trước, ta có ngay

$$\underset{H^{-1}(d)}{\operatorname{argmin}} h = \left\{x : x \in H^{-1}(d), 2Ax + a \in (\mathrm{kerH})^{\perp}\right\}. \tag{2.5}$$

Từ mệnh đề trên (khi $H = 0, d = 0$), ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.1.20. *Với dữ kiện như mệnh đề trên, các khẳng định sau là tương đương:*

(a) $h(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

(b) Nếu A là nửa xác định dương (hoặc âm), thì tồn tại $v \in \ker A$ thỏa mãn $a^{\top} v \neq 0$.

Bây giờ giả sử $q(x) \doteq x^{\top}Ax + a^{\top}x, q_H(x) \doteq x^{\top}Ax$, $q_B(x,z) \doteq x^{\top}Az$ và $q^x(z) \doteq q(z) + 2q_B(z,x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k+1}$ bởi $F(x) \doteq (q(x), Cx)$.

Nhắc lại rằng $V \in \mathbb{R}^{n\times p}$, có hạng p, là ma trận sao cho ker $C = V(\mathbb{R}^p)$, trong đó $p = \dim(\mathrm{kerC})$. Bởi $\mathrm{P}_{\mathcal{W}}$ ta ký hiệu phép chiếu trực giao lên $\mathcal{W}$.

Định lí 2.1.21. *Với F như trên, xét tập $\mathcal{W} \doteq \mathrm{kerC} \cap \mathrm{q_H^{-1}}(0)$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(a) $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi.

(b) $F(\mathbb{R}^n) + q_H(\mathbb{R}^n) \times \{0\} \subseteq F(\mathbb{R}^n)$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^n, q_H(\mathbb{R}^n) \subseteq q^x(\ker C)$.

(d) $q_H(\mathrm{kerC}) = \mathrm{q_H}(\mathrm{\mathbb{R}^n})$ hoặc nếu $q_H(\mathrm{kerC}) \neq \mathrm{q_H}(\mathrm{\mathbb{R}^n})$ (và do đó $\mathcal{W} =$ ker $C\cap$ $A^{-1}\left((ker\ C)^{\perp}\right)$), nên $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists z \in \mathcal{W}, \nabla q(x)^{\top} z \neq 0$.

(e) $q_H($ ker $C) = q_H(\mathbb{R}^n)$ hoặc nếu $q_H(\ker C) \neq q_H(\mathbb{R}^n)$ (và do đó $\mathcal{W} =$ ker $C\cap$ $A^{-1}\left((\ker C)^{\perp}\right)$), nên $A(\mathbb{R}^n) \cap \left[\mathcal{W}^{\perp} - \mathrm{P}_{\mathcal{W}}(a)\right] = \emptyset$

(f) $q_H(\ker C) = q_H(\mathbb{R}^n)$ hoặc $V^{\top}a \notin V^{\top}A(\mathbb{R}^n)$.

Như một hệ quả, với $a = 0$, q là thuần nhất thì

$$F\left(\mathbb{R}^n\right) \text{ là lồi } \Longleftrightarrow q_H(\ker C) = q_H\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Chứng minh (a) $\Leftrightarrow$ (b): Vì tập $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ là ảnh của ánh xạ bậc hai, ta áp dụng định lý Ramana-Goldman để đạt được sự tương đương này, chú ý rằng $F_H\left(\mathbb{R}^n\right) = q_H\left(\mathbb{R}^n\right) \times \{0\}$.
(a) $\Leftrightarrow$ (c): nó được suy ra từ Mệnh đề 2.1.2.
(c) $\Leftrightarrow$ (d) : Chú ý rằng mọi $x \in \mathbb{R}^n, q^x(0) = 0$, và $q_H(0) = 0$. Bây giờ, tập $q_H\left(\mathbb{R}^n\right)$ chỉ có thể là $\{0\}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, hoặc $\mathbb{R}$, tương ứng với ma trận A là 0, nửa xác định dương, nửa xác định ân, hoặc không xác định. Do đó, tập $q^x(\ker C)$ sẽ chứa $q_H\left(\mathbb{R}^n\right)$ nếu và chỉ nếu nó không bị chặn trên, không bị chặn dưới, và bằng với toàn bộ $\mathbb{R}$ tương ứng với mỗi tình huống trên cho tập $q_H\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Bây giờ ta chứng minh sự tương đương bởi việc phân ra 3 trường hợp.
Trường hợp 1: $q_H\left(\mathbb{R}^n\right) = \{0\}$. Trường hợp này, (c) và (d) hiển nhiên đạt được.
Trường hợp 2: $q_H\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}_+$. Bởi các thảo luận trước đây, (c) đạt được nếu và chỉ nếu q^x không bị chặn trên trên $\mathbb{R}^n$. Áp dụng Mệnh đề 2.1.19 cho $-q^x$ với $H = C$ và $d = 0$, ta đạt được rằng (c) được thỏa mãn nếu và chỉ nếu $q_H(\ker\ C) \subseteq \mathbb{R}_-$ suy ra rằng với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, mọi $\bar{x} \in \ker C, 2A\bar{x} + a + 2Ax \notin (\ker\ C)^\perp$. Ta cũng nhận được $\mathcal{W} = \ker C \cap A^{-1}\left((\ker C)^\perp\right)$. Đặc biết, với $\bar{x} \in \mathcal{W}$ tồn tại $z \in \ker\ C$ sao cho $(2A\bar{x} + a + 2Ax)^\top z \neq 0$. Do đó $0 \neq (2A\bar{x} + a + 2Ax)^\top z = (a + 2Ax)^\top z$. Điều này hoàn thành yêu cầu tương khi $q_H\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}_+$. Trường hợp $q_H\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}_-$ là tương tự.
Trường hợp 3: $q_H\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}$. Theo các khẳng định trước đó, (c) tương đương với $q^x(\mathrm{kerC}) = \mathbb{R}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Bởi Hệ quả 2.1.20, ta có kết luận rằng (c) là tương đương với (d). Do vậy tất cả các trường hợp đã giải quyết.
(d) $\Leftrightarrow$ (e) : Trước hết, ta chú ý rằng khi $q_H\left(\mathbb{R}^n\right) \neq q_H(\mathrm{kerC}), \mathrm{A}$ là xác định

trên ker C. Ta áp dụng Mệnh đề 2.1.19 với các dữ kiện hợp ta có

$$\mathcal{W} = \ker C \cap A^{-1}\left((\ker C))^{\perp}\right).$$

Do đó phép chiếu trực giao $\mathrm{P}_{\mathcal{W}}(a)$ được xác định. Điều phải chứng minh được suy ra từ khẳng định sau:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists z \in \mathcal{W}, (2Ax + a)^{\top} z \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, 2Ax + a \notin \mathcal{W}^{\perp} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, 2Ax + \mathrm{P}_{\mathcal{W}}(a) + \mathrm{P}_{\mathcal{W}}(a) \notin \mathcal{W}^{\perp} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, 2Ax + \mathrm{P}_{\mathcal{W}}(a) \notin \mathcal{W}^{\perp} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, 2Ax \notin \mathcal{W}^{\perp} - \mathrm{P}_{\mathcal{W}}(a) \\
&\Longleftrightarrow A\left(\mathbb{R}^n\right) \cap \left[\mathcal{W}^{\perp} - \mathrm{P}_{\mathcal{W}}(a)\right] = \emptyset.
\end{aligned}$$

(f) $\Longrightarrow$ (a): Rõ ràng $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ là lồi nếu $q_H(\ker C) = q_H\left(\mathbb{R}^n\right)$, vì Mệnh đề 2.1.2, vì $q^x(\ker C) \subseteq \mathbb{R}$ là luôn lồi với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Bây giờ giả sử rằng $V^{\top} a \notin V^{\top} A\left(\mathbb{R}^n\right)$: Dễ dàng suy ra rằng

$$\inf_{\ker C} q^x = -\infty \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Thật sự, nếu $\inf_{z \in \ker C} q^x(z) > -\infty$, thì bởi Mệnh đề 2.1.19, $A \succcurlyeq 0$ trên ker C và tồn tại $z_0 \in \ker C$ sao cho

$$2A\left(z_0 + x\right) + a \in (\ker C)^{\perp} = \ker V^{\top},$$

nó dẫn đến một mâu thuẫn. Do đó

$$\mathbb{R}_{-} \subseteq q^x(\mathrm{kerC}) \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}.$$

Tương tự, ta có $\inf_{\ker C} -q^x = -\infty \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, điều này dẫn đến $\mathbb{R}_{+} \subseteq q^x(\ker C)$. Do đó $q^x(\ker C) = \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n$. Điều này chứng minh tính lồi của (c).

(a) $\Longrightarrow$ (f): Giả sử ngược lại, $V^\top a \in V^\top A(\mathbb{R}^n)$ và $q_H(\mathrm{kerC}) \neq \mathrm{q_H}(\mathbb{R}^\mathrm{n})$, dễ dàng nhận ra rằng (d) không đạt được, và do đó $F(\mathbb{R}^n)$ không lồi. $\square$

Ví dụ sau minh họa cho tính hiệu quả của Định lý 2.1.21.

Ví dụ 2.1.22. (i) Lấy

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có ker $C = \left\{(0, t, s) \in \mathbb{R}^3 : t, s \in \mathbb{R}\right\}$ và $q_H(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ với $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Nên, $q(0, t, s) = t^2 - s^2\ \forall\ t, s \in \mathbb{R}$. Do đó q_H(ker $C) = q_H\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathbb{R}$. Nhắc lại rằng $F(x) \doteq (q(x), Cx)$, ta nhận được tính lồi của $F\left(\mathbb{R}^3\right)$ bởi Định lý 2.1.21.

Nếu ta lấy

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

thì q_H(ker $C) = -\mathbb{R}_+$ và $q_H\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathbb{R}$. Do đó $F\left(\mathbb{R}^3\right)$ là không lồi bởi Định lý 2.1.21 (f).

(ii) Xét

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng thấy rằng $C = \left\{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\right\}$ và $q_H(x) = q(x) \forall x = F(x) \doteq (q(x), Cx)$, ta nhận được tính lồi của $F\left(\mathbb{R}^3\right)$ bởi Định lý 2.1.21 (f).

Mệnh đề tiếp theo thống nhất các Định lý 2.1 và 2.2 trong [**?**].

Mệnh đề 2.1.23. *Giả sử* $q(x) = x^\top Ax + a^\top x$ *với* $A \succ 0, a \in \mathbb{R}^n$, *và xét* $F(x) \doteq (q(x), Cx)$ *với* $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$. *Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(*a*) $\dim(\ker C) = n - \operatorname{rank} C \geq 1$.

(*b*) $F(\mathbb{R}^n)$ *lồi.*

Chứng minh. Vì $A \succ 0$, ta có $q_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}_+$. Nên $\ker C = \{0\} \Longrightarrow q_H(\ker C) \neq q_H(\mathbb{R}^n)$, có nghĩa rằng Định lý 2.1.21 (d) không đạt được, và do đó $F(\mathbb{R}^n)$ là không lồi, điều này chứng tỏ rằng (b) suy ra (a).

Mặt khác, $q_H(\mathrm{kerC}) \neq \{0\}$ nếu và chỉ nếu $\mathrm{kerC} \neq \{0\}$. Nên, $\ker C \neq \{0\}$ suy ra $q_H(\ker C) = \mathbb{R}_+ = q_H(\mathbb{R}^n)$, và do đó bởi Định lý 2.1.21 (d), $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi.

Kết quả tiếp theo sẽ đóng vai trò cơ bản trong việc thiết lập các điều kiện cần và đủ cho tính lồi của tập ảnh.

Mệnh đề 2.1.24. *Giả sử F như trong Định lý 2.1.21. Khi đó các khẳng định sau đạt được:*

(a) $F(\mathbb{R}^n)$ không lồi nếu một trong các khẳng định sau đạt được:

(a1) $V^\top AV \succcurlyeq 0, V^\top a \in V^\top A(\mathbb{R}^n)$, và $A \not\succcurlyeq 0$;

(a2) $V^\top AV \preccurlyeq 0, V^\top a \in V^\top A(\mathbb{R}^n)$, và $A \not\preccurlyeq 0$.

(b) $F(\mathbb{R}^n)$ lồi nếu một trong các điều kiện sau đạt được:

(b1) $V^\top AV \not\succcurlyeq 0$ và $V^\top AV \not\preccurlyeq 0$;

(b2) $V^\top a \notin V^\top A(\mathbb{R}^n)$;

(b3) $V^\top AV \not\succcurlyeq 0$ và $A \preccurlyeq 0$;

(b4) $V^\top AV \not\preccurlyeq 0$ và $A \succcurlyeq 0$.

Chứng minh. (a) Ta chỉ xem xét (a1), vì nếu (a2) xảy ra ta áp dụng các kết quả của (a1) với $-F$ để thấy rằng $-F(\mathbb{R}^n)$ là không lồi và do đó $F(\mathbb{R}^n)$ cũng không lồi.

Với (a1), nếu ngược lại, $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi, thì bởi giả thiết và Định lý 2.1.21, ta có ngay $q_H(\mathbb{R}^n) = q_H(\ker C) \subseteq \mathbb{R}_+$. Nên $A \succcurlyeq 0$, mâu thuẫn. Điều phải chứng minh.

(b) Ta giả sử có (b1). Rõ ràng $q_H(\ker C) = \mathbb{R}$, và do đó $q_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, chứng minh tính lồi bởi Định lý 2.1.21.

Với (b2): Điều phải chứng minh suy ra từ Định lý trước.

Với (b3): Rõ ràng $\mathbb{R}_- \subseteq q_H(\ker C)$ và $q_H(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}_-$. Cả hai bao hàm suy ra $q_H(\ker C) = q_H(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}_-$, và tính lồi được suy ra từ Định lý trước.

Với (b4): Đây là hệ quả của (b3) khi áp dụng cho $-F$. □

Từ Mệnh đề trước và sự thật rằng $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi khi $A = 0$, ta có đặc trưng khác của tính lồi của tập ảnh.

Định lí 2.1.25. *Giả sử F như trong Định lý 2.1.21. Khi đó, $F(\mathbb{R}^n)$ là lồi nếu và chỉ nếu không trường hợp nào sau đây đạt được:*

(a) $V^\top AV \succcurlyeq 0, V^\top a \in V^\top A(\mathbb{R}^n)$, và $A \not\preccurlyeq 0$.

(b) $V^\top AV \preccurlyeq 0, V^\top a \in V^\top A(\mathbb{R}^n)$, và $A \not\succcurlyeq 0$.

Chứng minh. Định lý trên tương đương với khẳng định: $F(\mathbb{R}^n)$ lồi nếu và chỉ nếu cả hai phủ định của (a) và phủ định của (b) đạt được.

Rõ ràng phủ định của (a) là

(a′) $V^\top AV \not\succcurlyeq 0$ hoặc $V^\top a \notin V^\top A(\mathbb{R}^n)$ hoặc $A \succcurlyeq 0$.

Trong khi đó phủ định của (b) là

(b′) $V^\top AV \not\preccurlyeq 0$ hoặc $V^\top a \notin V^\top A(\mathbb{R}^n)$ hoặc $A \preccurlyeq 0$.

Áp dụng Mệnh đề 2.1.24 ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2.1.26. Với $F(x_1, x_2) = (2x_1x_2, x_1)$ ta có $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\ker C = \{0\} \times \mathbb{R}, V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\ker V^\top A = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Do đó $W^\top = V^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, V^\top AV = 0 = W^\top AW$.

Dễ kiểm tra rằng (a) của Định lý 2.1.25 được thỏa mãn, do đó $F(\mathbb{R}^2)$ là không lồi.

Mặt khác tính toán trực tiếp ta thấy ngay rằng

$$\frac{1}{2}F\left(1, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}F\left(-1, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) = (1,0) \notin F\left(\mathbb{R}^2\right),$$

nên $F(\mathbb{R}^2)$ là không lồi.

2.2 Ứng dụng

Sau đây chúng tôi giới thiệu một ứng dụng của các kết quả của mục trước cho bài toán "Tìm hình cầu bé nhất chứa giao của các hình cầu cho trước"

Trong mục này mỗi hình cầu tâm x bán kính r được ký hiệu là $B(x,r)$. Bài toán trên trở thành "Tìm một hình cầu bán kính nhỏ nhất $B(y,r)$ chứa giao của các hình cầu cho trước $\{B(a_i),r_i\}_{i=1}^{p}$. Điều này tương đương với bài toán sau:

$$\begin{array}{ll} \min & r \\ \text{s.t.} & \bigcap_{i=1}^{p} B\left(a_i, r_i\right) \subseteq B(y,r), \\ & y \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ta dùng phép đổi biến $\gamma = r^2$, bài toán trên trở thành

$$\begin{array}{ll} \min & \sqrt{\gamma} \\ \text{s.t.} & \bigcap_{i=1}^{p} B\left(a_i, r_i\right) \subseteq B(y,\sqrt{\gamma}), \\ & y \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}, \end{array}$$

trong đó có cùng một tập hợp tối ưu như

$$\begin{array}{ll} \min & \gamma \\ \text{s.t.} & \bigcap_{i=1}^{p} B\left(a_i, r_i\right) \subseteq B(y,\sqrt{\gamma}), \\ & y \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{2.6}$$

Chúng ta bắt đầu bằng cách chứng minh rằng nếu (i) $p \le n-1$ và (ii) $\bigcap_{i=1}^{p} B\left(a_i, r_i\right)$ có bên trong rỗng, do đó mệnh đề $\bigcap_{i=1}^{p} B\left(a_i, r_i\right) \subseteq B(y,\sqrt{\gamma})$ có thể được định dạng LMI.

Định lí 2.2.1. *Cho $a_1,\ldots,a_p \in \mathbb{R}^n$ và $r_1,\ldots,r_p \in \mathbb{R}_{++}$. Giả sử rằng giao điểm của các hình cầu $B\left(a_i, r_i\right), i=1,\ldots,p$ là không rỗng, tức là,*

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{p} B\left(a_i, r_i\right)\right) \neq \emptyset \tag{2.7}$$

và $p \leq n-1$. Khi đó hai mệnh đề sau tương đương:
(i) $\bigcap_{i=1}^{p} B\left(a_i, r_i\right) \subseteq B(y, \sqrt{\gamma})$.
(ii) Tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ sao cho thỏa mãn LMI sau:

$$N_0 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i N_i \preceq 0 \tag{2.8}$$

trong đó

$$N_0 = \begin{pmatrix} I & -y \\ -y^T & \|y\|^2 - \gamma \end{pmatrix}, N_i = \begin{pmatrix} I & -a_i \\ -a_i^T & \|a_i\|^2 - r_i^2 \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, p \tag{2.9}$$

Chứng minh. Ta bắt đầu bằng cách nhắc lại rằng, như đã đề cập trong phần giới thiệu, mệnh đề (i) tương đương với tính hợp lệ của hàm sau:

$$\|x-y\|^2 \leq \gamma \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n \text{ sao cho } \|x-a_1\|^2 \leq r_1^2, \ldots, \|x-a_p\|^2 \leq r_p^2. \tag{2.10}$$

Do đó, trong phần còn lại, chúng ta sẽ xem xét hàm (2.10) thay vì mệnh đề (i).
(ii) $\Rightarrow$ (2.10). Giả sử mệnh đề (ii) thỏa mãn, tức là tồn tại $\lambda_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2, \ldots, p$ sao cho LMI (2.8) thỏa mãn. Nhân LMI từ bên trái với $\left(x^T, 1\right)$ và từ bên phải $(x; 1)$ ta thu được

$$\left(x^T, 1\right) N_0(x; 1) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(x^T, 1\right) N_i(x; 1)$$

ta có thể viết lại

$$\|x-y\|^2 - \gamma \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\|x-a_i\|^2 - r_i^2\right).$$

Bất đẳng thức cuối cùng và tính không âm của λ_i ngụ ý rằng (2.10) đúng.
(2.10) $\Rightarrow$ (ii). Giả sử rằng hàm (2.10) đúng. Khi đó giá trị của bài toán tối ưu hóa trong các biến x quyết định

$$\begin{aligned} \max \quad & \|x-y\|^2-\gamma \\ \text{s.t.} \quad & \|x-a_i\|^2 \le r_i^2, \quad i=1,2,\ldots,p, \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.11}$$

là không dương. Bây giờ, vì $p \le n-1$, nên theo Hệ quả (**??**), giá trị của bài toán (2.11) bằng với giá trị của bài toán SDP

$$\begin{aligned} \max \quad & \operatorname{Tr}(N_0 U) \\ \text{s.t.} \quad & \operatorname{Tr}(N_i U) \le 0, \quad i=1,2,\ldots,p, \\ & U \in \mathcal{S}_+^{n+1}, U_{n+1,n+1}=1, \end{aligned} \tag{2.12}$$

trong đó N_i đã cho trong (2.9). Điều kiện (2.7) ngụ ý rằng tồn tại $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\|\tilde{x}-a_i\|^2 - r_i^2 < 0, i=1,\ldots,p.$$

Do đó, ma trận $\widetilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{x}\tilde{x}^T & \tilde{x} \\ \tilde{x}^T & 1 \end{pmatrix}$ thỏa mãn

$$\operatorname{Tr}\left(N_i\widetilde{U}\right) < 0, \widetilde{U} \succeq 0, \widetilde{U}_{n+1,n+1} = 1$$

Bằng cách thực hiện nhiễu loạn nhỏ đối với ma trận $\widetilde{U}$, ta có thể giả định mà không mất đi tính tổng quát rằng $\widetilde{U} \succ 0$. Do đó, bài toán (2.12) là hoàn toàn khả thi và là kết quả của định lý đường bậc hai đối ngẫu [20,3], bài toán đối ngẫu

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{s.t.} \quad & N_0 - \textstyle\sum_{i=1}^p \lambda_i N_i - \mu E_{n+1,n+1}^{n+1} \preceq 0, \\ & \lambda_i \ge 0, i=1,\ldots,p, \\ & \mu \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.13}$$

có thể giải quyết được và có cùng giá trị tối ưu với (2.12). Do đó, tồn tại một $\tilde{\mu}$ không dương và $\tilde{\lambda}_i, i = 1, \ldots, p$ không âm sao cho

$$N_0 - \sum_{i=1}^{p} \tilde{\lambda}_i N_i - \tilde{\mu} E_{n+1,n+1}^{n+1} \preceq 0$$

mà, bởi sự không nhạy của $\tilde{\mu}$, ý rằng $N_0 - \sum_{i=1}^{p} \tilde{\lambda}_i N_i \preceq 0$.
Dựa trên Định lý (2.2.1), và định dạng lại (2.6) của bài toán chính, bây giờ ta chứng minh kết quả chính □

Định lí 2.2.2. *(**công thức lập trình bậc hai của bài toán chính**) Cho $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n$ và $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{R}_{++}$. Giả sử rằng giao tuyến của các hình cầu $B(a_i, r_i), i = 1, \ldots, p$ có phần trong là rỗng và $p \leq n - 1$. Khi đó tâm và bán kính của của một bán kính hình cầu nhỏ nhất chứa giao tuyến $\bigcap_{i=1}^{p} B(a_i, r_i)$ được xác định bởi*

$$y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \tag{2.14}$$

$$r = \sqrt{\left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \right\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\|a_i\|^2 - r_i^2 \right)} \tag{2.15}$$

tương ứng, trong đó $\lambda \in \Delta_p$ là một nghiệm tối ưu của bài toán cực tiểu bậc hai lồi

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \right\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\|a_i\|^2 - r_i^2 \right) \\ s.t. \quad & \lambda \in \Delta_p. \end{aligned}$$

Chứng minh. Theo Định lý (2.2.1), bài toán (2.6) có thể được viết lại thành bài toán SDP sau

$$
\begin{aligned}
&\gamma^* = \min \gamma \\
&\text{s.t.} \begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i - 1\right) I & y - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \\ \left(y - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i\right)^T & \gamma - \|y\|^2 + \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\|a_i\|^2 - r_i^2\right) \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (2.16) \\
&y \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+^p.
\end{aligned}
$$

Ở đây ta biểu thị bán kính tối ưu bằng r^* là số dương theo định nghĩa. Lưu ý rằng bất kỳ phép giải khả thi (y, λ, r) của bài toán (2.16) thỏa mãn $\sum_{i=1}^p \lambda_i \geq 1$. Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng trên thực tế, mọi giải pháp tối ưu đều đáp ứng $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$. Ngược lại, giả sử rằng tồn tại một nghiệm tối ưu $(\tilde{y}, \tilde{\lambda}, \tilde{r})$ của bài toán (2.16) thỏa mãn $\sum_{i=1}^p \tilde{\lambda}_i > 1$. Trong trường hợp đó, ta có thể gọi phần bù của Schur và kết luận rằng bài toán (2.16) rút gọn thành

$$
\begin{aligned}
\gamma^* = \min & \gamma \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^p \lambda_i > 1, \\
& \gamma \geq \|y\|^2 - \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\|a_i\|^2 - r_i^2\right) + \frac{\left\|y - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i\right\|^2}{\sum_{i=1}^p \lambda_i - 1}, \\
& y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}_+^p, \gamma \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

tương đương với

$$
\begin{aligned}
\gamma^* = \min & \|y\|^2 - \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\|a_i\|^2 - r_i^2\right) + \frac{\left\|y - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i\right\|^2}{\sum_{i=1}^p \lambda_i - 1} \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^p \lambda_i > 1, \\
& y \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Thay λ và rút gọn bài toán thứ hai với y ta được $y = \frac{1}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$ với mọi cách giải. Gắn biểu thức này vào hàm mục tiêu của bài toán (2.17), chúng ta thu được $\tilde{\lambda}$ là một nghiệm tối ưu của

$$\begin{aligned} \gamma^* = \min \varphi(\lambda) \equiv \frac{1}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} & \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \right\|^2 - \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\|a_i\|^2 - r_i^2 \right) \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^p \lambda_i > 1 & \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^p & \end{aligned} \tag{2.18}$$

Lưu ý rằng hàm mục tiêu $\varphi(\lambda)$ là đồng nhất bậc 1, tức là, thỏa mãn $\varphi(\alpha\lambda) = \alpha\varphi(\lambda)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{R}^p$. Ký hiệu $\hat{\lambda} = \alpha\tilde{\lambda}$, trong đó α là số thực nằm trong khoảng $(1/\sum_{i=1}^p \lambda_i, 1)$. Khi đó $\hat{\lambda}$ là nghiệm của (2.18) và thỏa $\varphi(\hat{\lambda}) = \varphi(\alpha\tilde{\lambda}) = \alpha\varphi(\tilde{\lambda}) < r^*$ mâu thuẫn với tính tối ưu của $\tilde{\lambda}$. Do đó chúng ta chứng minh được rằng $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ tại bất kỳ nghiệm tối ưu nào để (2.16) có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} \gamma^* = \min & \gamma \\ \text{s.t. } & \begin{pmatrix} 0 & y - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \\ (y - \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i)^T & \gamma - \|y\|^2 + \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\|a_i\|^2 - r_i^2 \right) \end{pmatrix} \succeq 0, \\ & y \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}, \lambda \in \Delta_p. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ràng buộc LMI trong bài toàn trên rút gọn là

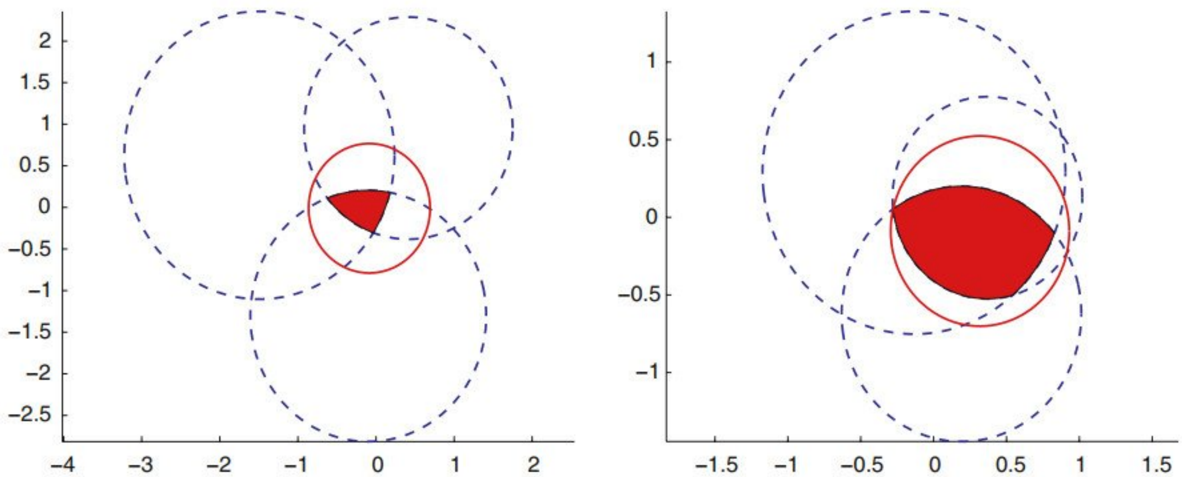
$$y = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \tag{2.20}$$

$$\gamma \geq \|y\|^2 - \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\|a_i\|^2 - r_i^2 \right) \tag{2.21}$$

Vì vậy bài toán (2.19) có thể biến đổi thành:

$$\begin{aligned} \gamma^* = \min & \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \right\|^2 - \sum_{i=1}^p \lambda_i \left(\|a_i\|^2 - r_i^2 \right) \\ s.t. & \lambda \in \Delta_p \end{aligned}$$

Tâm tối ưu y được cho tính ở y được cho tính ở (2.20). □



Hình 2.1: Hình 1.

Điều thú vị là hình cầu $B(y, r)$ với y và r cho bởi (2.14) và (2.15) chứa giao tuyến $\bigcap_{i=1}^{p} B\left(a_i, r_i\right)$ ngay cả khi $p \geq n$. Tuy nhiên, chỉ khi $p \leq n-1$ hình cầu này mới được đảm bảo là hình cầu nhỏ nhất. Trong Hình 1 đưa ra hai ví dụ về giao điểm của ba hình cầu (đường đứt nét). Trong cả hai ví dụ, rõ ràng là hình cầu chứa giao điểm (đường liền nét) - được tính theo Định lý (2.2.2) - không phải là nhỏ nhất.

KẾT LUẬN

Với mục tiêu đi sâu nghiên cứu, tìm hiểu tính lồi của ảnh của ánh xạ đa thức bậc hai, từ đó nêu ứng dụng tìm hình cầu bé nhất chứa giao các hình cầu cho trước ([4],[5]). Với nhiệm vụ đặt ra như trên, nội dung đã thực hiện được của luận văn chủ yếu bao gồm:

1. Hệ thống lại các khái niệm và kết quả của tính lồi của ảnh của ánh xạ đa thức bậc hai.

2. Đưa ra một số ví dụ minh họa cho các định lí, tính chất.

3. Trình bày lại ứng dụng của nó trong việc giải quyết một phần bài toán tìm hình cầu bé nhất chứa giao các hình cầu cho trước.

Nội dung luận văn giới thiệu những kết quả mới về đối tượng trong đại số tuyến tính. Vì vậy, chúng có thể đưa vào làm tài liệu tham khảo, giảng dạy và học tập cho học viên, sinh viên ngành toán. Hy vọng trong thời gian tới chúng tôi sẽ thu được một số kết quả theo hướng nghiên cứu đã quan tâm trong luận văn.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Hữu Việt Hưng (2019), *Đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2] TS. Nguyễn Duy Thuận (chủ biên), ThS. Duy Mạnh Ban, TS. Nông Quốc Chinh (2003), *Đại số tuyến tính*.

[3] Nguyễn Mộng Hy, (2007) *Hình học cao cấp*, Nhà xuất bản giáo dục.

Tiếng Anh

[4] Beck A. (2007) *On the convexity of a class of quadratic mappings and its application to the problem of finding the smallest ball enclosing a given intersection of balls.* Journal of Global Optimization. 39, pp. 113-126.

[5] Fabian Flores-Bazan và Felipe Opazo, (2022) *Characterizing Convexity Of Images For Quadratic-Linear Mappings With Applications In Nonconvex Quadratic Optimization.* SIAM J. OPTIM. Vol. 31, No. 3, pp. 1774–1796

[6] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe (2018) *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares* - Cambridge University Press.

[7] L. L. Dines (1941) *On the Mapping of Quadratic Forms,* Bull. Amer. Math. Soc., 47, pp. 494–498.

[8] F. Flores-Bazan and F. Opazo (2016) *Characterizing the convexity of joint-range for a pair of inhomogeneous quadratic functions and strong duality,* Minimax Theory Appl., 1, pp. 257–290.

[9] B. T. Polyak (1998) *Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization,* J. Optim. Theory Appl., 99, pp. 553–583.

[10] Y. Xia, S. Wang, and R. L Sheu (2016) *S-Lemma with equality and its applications*, Math. Program. Ser. A, 156, pp. 513–547.