BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ HƯƠNG

TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CHO HỌ CÁC HÀM PHÂN HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ HƯƠNG

TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CHO HỌ CÁC HÀM PHÂN HÌNH

Chuyên ngành: **ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ**

Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học

TS. NGUYỄN THỊ NGỌC DIỆP

Nghệ An - 2022

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Giả sử $\mathcal{M}^*(\mathbb{C})$ là tập các hàm phân hình khác hằng trên trường số phức $\mathbb{C}$ và $\mathcal{F}$ là tập con khác rỗng của $\mathcal{M}^*(\mathbb{C})$.

Một tập con $\mathcal{S}$ của $\mathbb{C}$ được gọi là tập xác định duy nhất (tính cả bội) cho họ hàm phân hình $\mathcal{F}$ nếu với mọi hàm phân hình khác hằng $f, g \in \mathcal{F}$ thỏa mãn

$$f^{-1}(S) = g^{-1}(S)$$

(tính cả bội) thì $f = g$.

Vào năm 1982, ví dụ đầu tiên về tập xác định duy nhất đã được F. Gross và C.C. Yang đưa ra [8]. Hai tác giả này đã chứng minh được rằng tập các không điểm của phương trình $z + e^z = 0$ là tập xác định duy nhất. Từ đó đến nay, bài toán xây dựng các tập xác định duy nhất đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Có hai vấn đề chính liên quan đến việc nghiên cứu tập xác định duy nhất. Vấn đề thứ nhất là xây dựng tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình có số phần tử ít nhất. Vấn đề thứ hai là tìm đặc trưng của các tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình. Hầu hết các tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình đã được xây dựng là các tập không điểm của các đa thức thỏa mãn Điều kiện (I) của H. Fujimoto, tức là các đa thức đơn ánh trên tập các không điểm của đạo hàm bậc nhất của chúng. Năm 2011, trong bài báo [4], tác giả T.T.H. An đã xây dựng được các tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình là các tập không điểm của các đa thức không cần thỏa mãn Điều kiện (I) của H. Fujimoto.

Trong luận văn này, chúng tôi tập trung tìm hiểu tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình.

Nội dung chính của luận văn là tìm hiểu và trình bày một cách chi tiết những kết quả trong bài báo *Unique range sets for meromorphic functions constructed without an injectivity hypothesis* của tác giả T.T.H. An trên tạp chí *Taiwanese Journal of Mathematics* [4].

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được chia thành hai chương.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về Hình học đại số nhằm mục đích làm cơ sở cho việc trình bày nội dung của chương 2. Ngoài ra chúng tôi còn trích dẫn một số kết quả đã có nhằm phục vụ cho các chứng minh ở phần sau.

Chương 2. Tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình.

Trong chương này, chúng tôi tìm hiểu Định lý cơ bản thứ hai Nevanlinna. Đồng thời, qua việc tìm hiểu cách xây dựng các tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình là các tập không điểm của các đa thức không thỏa mãn Điều kiện I của Fujimoto, chúng tôi tìm hiểu điều kiện cần và đủ để tập không điểm của một đa thức là tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình.

Để hoàn thành luận văn này tác giả xin chân thành cảm ơn sự hướng dẫn tận tình chu đáo của TS. Nguyễn Thị Ngọc Diệp và tất cả các Thầy giáo, Cô giáo thuộc chuyên ngành Đại số - Lý thuyết số Khoa Sư phạm Toán học - Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập. Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn có thể còn có những thiếu sót, tác giả mong nhận được sự góp ý của các Thầy, Cô và các bạn học viên.

Nghệ An, tháng 06 năm 2022

Tác giả

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi trình bày những kiến thức cơ bản nhằm mục đích làm cơ sở cho việc trình bày nội dung của chương 2. Ngoài ra chúng tôi còn trích dẫn một số kết quả đã có nhằm phục vụ cho các chứng minh ở phần sau. Những nội dung này chủ yếu được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [3] và [7].

1.1 Tập đại số trong không gian afin và không gian xạ ảnh

Trong toàn bộ chương này ta luôn luôn ký hiệu k là một trường.

1.1.1. Định nghĩa. Cho đa thức $E(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. Một điểm W$= (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ được gọi là *không điểm* của đa thức $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ nếu

$$\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) = 0\,.$$

Nếu E không là hằng thì tập hợp các không điểm của E được gọi là *siêu mặt* xác định bởi E, ký hiệu là $\mathscr{Z}(E)$. Như vậy

$$\mathscr{Z}(E) = \{W \in \mathbb{A}^n(k)\,|E(W) = 0\}\ .$$

1.1.2. Định nghĩa. Nếu $\mathscr{A}$ là tập hợp các đa thức bất kỳ trong vành đa thức $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ thì tập hợp

$$\mathscr{Z}(\mathscr{A}) = \{W \in \mathbb{A}^n(k) \,|\, E(W) = 0, \forall E \in \mathscr{A}\}$$

được gọi là *tập đại số* trong $\mathbb{A}^n(k)$.

1.1.3. Ví dụ.

(1) tập rỗng ϕ là một tập đại số vì tập rỗng là tập nghiệm của phương trình $f = 0$ với mọi $f \in k$, $f \neq 0$.

(2) Mỗi điểm $W = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ trong không gian $\mathbb{A}^n(k)$ là một tập đại số vì W là tập nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - w_1 = 0 \\ x_2 - w_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n - w_n = 0 \end{cases}$$

nghĩa là

$$W = \mathscr{Z}(x_1 - w_1, x_2 - w_2, \cdots, x_n - w_n).$$

(3) Tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính là một tập đại số và được gọi là *đa tạp tuyến tính* .

(4) $\mathbb{A}^n(k)$ là tập đại số trong $\mathbb{A}^n(k)$ vì $\mathbb{A}^n(k)$ là tập nghiệm của phương trình $0 = 0$.

1.1.4. Mệnh đề. *(i) Cho $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ là các hệ đa thức trong vành đa thức $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. Nếu $\mathscr{A}_2 \subseteq \mathscr{A}_1$ thì $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_1) \subseteq \mathscr{Z}(\mathscr{A}_2)$.*

(ii) Hợp của hai tập đại số cũng là tập đại số, nghĩa là: Với các hệ đa thức $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ trong vành đa thức $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ta luôn có

$$\mathscr{Z}(\mathscr{A}_1) \cup \mathscr{Z}(\mathscr{A}_2) = \mathscr{Z}(\mathscr{A})$$

trong đó

$$\mathscr{A} = \{hg \,| h \in \mathscr{A}_1,\, g \in \mathscr{A}_2\}\,.$$

(iii) Giao của một họ tùy ý các tập đại số là một tập đại số, nghĩa là: Với một họ $\{\mathscr{A}_i\}$ *các hệ đa thức trong vành đa thức* $k\,[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ *ta luôn có*

$$\bigcap_i \mathcal{Z}\,(\mathscr{A}_i) = \mathcal{Z}\left(\bigcup_i \mathscr{A}_i\right).$$

1.1.5. Chú ý. Trong không gian afin $\mathbb{A}^n\,(k)$ ta luôn có hợp của hai tập đại số là một tập đại số, giao của một họ tùy ý các tập đại số là một tập đại số, tập rỗng và toàn bộ không gian afin $\mathbb{A}^n\,(k)$ là các tập đại số. Vì vậy ta có thể trang bị một tôpô trên không gian afin $\mathbb{A}^n\,(k)$ bằng cách coi các tập đại số là tập đóng. Tôpô này được gọi là *tôpô Zariski trên không gian afin* $\mathbb{A}^n\,(k)$.

1.1.6. Định nghĩa. (i) Ta nói tập đại số $M \subset \mathbb{A}^n\,(k)$ là *khả quy* nếu $M = M_1 \cup M_2$, trong đó M_1, M_2 là các tập đại số trong $\mathbb{A}^n\,(k)$ và $M_1 \neq M$, $M_2 \neq M$. Trong trường hợp ngược lại tập đại số M được gọi là *bất khả quy* .

(ii) Một tập đại số bất khả quy trong không gian afin $\mathbb{A}^n\,(k)$ được gọi là *một đa tạp afin* .

(iii) Một tập con mở của một đa tạp afin được gọi là *đa tạp tựa afin* .

1.1.7. Định lí. *Giả sử* M *là một tập đại số trong không gian afin* $\mathbb{A}^n\,(k)$. *Khi đó tồn tại duy nhất các tập đại số bất khả quy* $M_1, M_2, \cdots, M_m$ *sao cho*

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_m$$

trong đó $M_i \not\subset M_j$ *với mọi* $i \neq j$.

Các tập đại số bất khả quy M_i được gọi là *các thành phần bất khả quy của* *tập đại số* M và $M = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_m$ là sự phân tích M thành các thành phần bất khả quy.

Giả sử $\mathcal{S}$ là đa thức thuần nhất bậc s trong vành đa thức $k[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]$. Ta có

$$\mathcal{S}(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_{n+1}) = \lambda^s \mathcal{S}(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}),$$

với mọi điểm $(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)$, $\forall \lambda \in k$. Vì vậy nếu a là nghiệm của $\mathcal{S}$ thì λa cũng là nghiệm của $\mathcal{S}$.

Lưu ý rằng điểm 0 là nghiệm của mọi đa thức thuần nhất.

Để xét nghiệm của đa thức thuần nhất ta chia tập $\mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$ theo quan hệ tương đương

$$a \sim b \text{ nếu tồn tại } \lambda \neq 0 \text{ sao cho } a = \lambda b.$$

Tập hợp các lớp tương đương này được gọi là *không gian xạ ảnh n chiều trên trường k* và ký hiệu là $\mathbb{P}^n(k)$.

Với mỗi điểm $a \in \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$ ta cũng dùng ký hiệu a để chỉ lớp các điểm tương đương với a. Khi đó ta coi a như là điểm của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(k)$.

1.1.8. Định nghĩa. (i) Cho đa thức $R \in k[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]$. Một điểm $a \in \mathbb{P}^n(k)$ được gọi là *nghiệm xạ ảnh* của đa thức R nếu $R(\lambda a) = 0$ với mọi $\lambda \in k$.

(ii) Với mỗi tập $\mathscr{B}$ không rỗng gồm các đa thức thuần nhất trong vành đa thức $k[x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}]$ thì

$$\mathcal{Z}(\mathscr{B}) = \{a \in \mathbb{P}^n(k) \,|\, R(a) = 0, \forall R \in \mathscr{B}\}$$

được gọi là *tập đại số xạ ảnh* trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(k)$.

1.1.9. Định nghĩa. (i) Ta nói tập đại số M trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(k)$ là *bất khả quy* nếu M không là hợp của hai tập đại số bé hơn thực sự.

(ii) Một tập đại số bất khả quy trong $\mathbb{P}^n(k)$ được gọi là *một đa tạp xạ ảnh* .

(iii) Một tập con mở của một đa tạp xạ ảnh gọi là *đa tạp tựa xạ ảnh* .

1.2 Đường cong phẳng trong mặt phẳng afin

1.2.1. Định nghĩa. Đường cong phẳng $\mathscr{L}$ trong $\mathbb{A}^2(k)$ xác định bởi đa thức $R(x,y)$ là

$$\mathscr{L} = \left\{(a,b) \in \mathbb{A}^2(k) \,|\, R(a,b) = 0\right\} .$$

Đường cong $\mathscr{L}$ là bất khả quy nếu $R(x,y)$ bất khả quy. Bậc của đường cong xác định bởi đa thức $R(x,y)$ là bậc của đa thức $R(x,y)$.

Giả sử $R = \prod_i R_i^{e_i}$, trong đó R_i là các nhân tử bất khả quy của R và $e_i \geq 1$. Ta gọi các R_i là các thành phần của R và e_i là bội của thành phần R_i. Ta nói R_i là thành phần đơn nếu $e_i = 1$, và là thành phần bội nếu $e_i > 1$.

Do vành đa thức $k[x,y]$ là vành nhân tử hóa nên mọi đa thức $R(x,y) \in k[x,y]$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành thành phần bất khả quy

$$R = R_1^{s_1} R_2^{s_2} \cdots R_l^{s_l},$$

trong đó $R_1, R_2, \cdots, R_l$ là các đa thức bất khả quy phân biệt và $s_1, s_2, \cdots, s_l$ là các số tự nhiên.

Bây giờ ta ký hiệu

$$\mathscr{L}_i = \left\{(a,b) \in \mathbb{A}^2(k) \,|\, R_i(a,b) = 0\right\},\ i = 1, 2, \cdots, l\ .$$

Khi đó $\mathscr{L}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, l)$ là các thành phần bất khả quy của đường cong $\mathscr{L}$. Đồng thời đường cong $\mathscr{L}$ có sự phân tích thành phần bất khả quy

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2 \cup \cdots \cup \mathscr{L}_l\,.$$

Giả sử $R(x, y)$ là đa thức hai biến trên trường k có bậc n. Đặt

$$\widetilde{R}(x, y, z) = z^n R\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right),$$

ta có $\widetilde{R}(x, y, z)$ là một đa thức thuần nhất bậc n thuộc vành đa thức $k[x, y, z]$ và được gọi là *sự thuần nhất* của đa thức $R(x, y)$.

Ta ký hiệu

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \left\{[a : b : c] \in \mathbb{P}^2(k) \,\middle|\, \widetilde{R}(a, b, c) = 0\right\}$$

thì $\widetilde{\mathscr{L}}$ được gọi là *đường cong xạ ảnh* tương ứng của đường cong $\mathscr{L}$. Điểm (a, b) thuộc đường cong $\mathscr{L}$ khi và chỉ khi điểm $(a, b, 1)$ thuộc đường cong $\widetilde{\mathscr{L}}$. Đường cong $\mathscr{L}$ bất khả quy khi và chỉ khi đường cong $\widetilde{\mathscr{L}}$ bất khả quy. Nếu đường cong $\mathscr{L}$ có sự phân tích thành các thành phần bất khả quy

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2 \cup \cdots \cup \mathscr{L}_l\,,$$

thì đường cong $\widetilde{\mathscr{L}}$ cũng có sự phân tích thành các thành phần bất khả quy tương ứng

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \widetilde{\mathscr{L}_1} \cup \widetilde{\mathscr{L}_2} \cup \cdots \cup \widetilde{\mathscr{L}_l}\,.$$

1.2.2. Định nghĩa. Cho đường cong phẳng $\mathscr{L}$ trong không gian afin $\mathbb{A}^2(k)$ xác định bởi phương trình $R(x, y) = 0$ và điểm $N = (u, v) \in \mathscr{L}$. Điểm N được gọi là *điểm đơn* của đường cong $\mathscr{L}$ nếu $\dfrac{\partial R}{\partial x}(N) \neq 0$ hoặc $\dfrac{\partial R}{\partial y}(N) \neq 0$.

Khi đó đường thẳng xác định bởi phương trình

$$\frac{\partial R}{\partial x}|_N (x-u) + \frac{\partial R}{\partial y}|_N (y-v) = 0$$

được gọi là *đường tiếp tuyến* với đường cong $\mathscr{L}$ tại điểm N. Một điểm không phải là điểm đơn thì được gọi là *điểm kỳ dị* .

Một đường cong được gọi là *trơn* nếu mọi điểm của đường cong đó đều là điểm đơn.

1.2.3. Định nghĩa. Cho đường cong phẳng $\mathscr{L}$ trong không gian afin $\mathbb{A}^2(k)$ xác định bởi phương trình $R(x,y)=0$ và điểm $N=(0,0)$. Ta viết

$$R = R_t + R_{t+1} + \cdots + R_n \,,$$

trong đó R_i là đa thức thuần nhất bậc i trong vành đa thức $k[x,y]$, $R_t \neq 0$. Ta gọi t là *số bội của đường cong* $\mathscr{L}$ tại $N=(0,0)$ và viết $t = t_N(R) = t_N(\mathscr{L})$.

Do R_t là đa thức thuần nhất hai biến trên trường đóng đại số nên ta có thể viết $R_t = \prod\limits_i Q_i^{q_i}$ trong đó Q_i là các nhân tử tuyến tính. Các Q_i được gọi là *các đường tiếp tuyến* của đường cong $\mathscr{L}$ tại $N=(0,0)$; q_i gọi là *số bội của tiếp tuyến* . Q_i gọi là tiếp tuyến đơn (kép,...) nếu $q_i = 1$ $(2,\cdots)$.

Nếu đường cong $\mathscr{L}$ có t tiếp tuyến đơn phân biệt tại N thì ta nói N là điểm kỳ dị chính tắc của đường cong $\mathscr{L}$.

Giả sử $R = \prod R_i^{e_i}$ là sự phân tích R thành các thành phần bất khả quy. Khi đó

$$t_N(R) = \sum_i e_i t_N(R_i) \,.$$

Nếu Q là đường tiếp tuyến của R_j với số bội q_j thì Q là tiếp tuyến của R với số bội $\sum\limits_i e_i q_i$.

1.2.4. Nhận xét. Ta có thể mở rộng các định nghĩa trên đây cho điểm $N = (u, v) \neq (0, 0)$ bằng cách thực hiện phép tịnh tiến $\mathcal{S}(x, y) = (x + u, y + v)$ biến $(0, 0)$ thành N. Khi đó $R^{\mathcal{S}} = R(X + u, Y + v)$ và ta định nghĩa $t_N(R)$ chính là $t_{(0,0)}\left(R^{\mathcal{S}}\right)$.

CHƯƠNG 2

TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CHO HỌ CÁC HÀM PHÂN HÌNH

Trong chương này, chúng tôi tìm hiểu Định lý cơ bản thứ hai Nevanlinna. Đồng thời, qua việc tìm hiểu cách xây dựng các tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình là các tập không điểm của các đa thức không thỏa mãn Điều kiện I của Fujimoto, chúng tôi tìm hiểu điều kiện cần và đủ để tập không điểm của một đa thức là tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình.

2.1 Định lý cơ bản thứ hai Nevanlinna

Giả sử f là một hàm phân hình trên đĩa $D(R)$ với bán kính $0 < R \leq \infty$ và tâm tại gốc. Ta ký hiệu số cực điểm của f trên đĩa đóng $\overline{D}(r)$, $r < R$, tính cả bội và không tính bội lần lượt là $n(f, r)$ và $n_1(f, r)$.

Hàm đếm các không điểm của f với bội được tính đầy đủ và với bội được ngắt lần lượt được xác định bởi

$$N(f, r) = n(f, 0)\log r + \int_0^r (n(f, t) - n(f, 0))\frac{dt}{t}$$

và

$$N_1(f, r) = n_1(f, 0)\log r + \int_0^r (n_1(f, t) - n_1(f, 0))\frac{dt}{t},$$

trong đó $n(f,0)$ là bậc của cực điểm của f tại $z=0$ và $n_1(f,0)$ là 1 nếu f có cực điểm tại $z=0$ và là 0 nếu f không có cực điểm tại $z=0$.

2.1.1. Định lí [1]. *Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Khi đó, với mọi $r>1$, ta có*

$$N(f,r)-N\left(\frac{1}{f},r\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta\,.$$

Với mỗi số thực x đặt $\log^+x=\max\{0,\log x\}$. Khi đó ta lưu ý một số tính chất sau đây:

$$\log x=\log^+x-\log^+\frac{1}{x}$$

$$|\log x|=\log^+x+\log^+\frac{1}{x}$$

$$\log^+\sum_{j=1}^{N}x_j\le\sum_{j=1}^{N}\log^+x_j+\log N$$

$$\log^+\prod_{j=1}^{N}x_j\le\sum_{j=1}^{N}\log^+x_j.$$

2.1.2. Định nghĩa. Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ không đồng nhất bằng 0. *Hàm xấp xỉ* của f được định nghĩa bởi

$$m(f,r)=\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

2.1.3. Định nghĩa. Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ không đồng nhất bằng 0. *Hàm đặc trưng Nevanlinna* được định nghĩa bởi

$$T(f,r)=m(f,r)+N(f,r)\,.$$

2.1.4. Nhận xét. Giả sử $g_1,...,g_k$ là các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Từ định nghĩa các hàm cơ bản, ta thu được các tính chất sau đây:

a) $m\left(\prod\limits_{i=1}^{k} g_i, r\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} m\left(g_i, r\right).$

b) $m\left(\sum\limits_{i=1}^{k} g_i, r\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} m\left(g_i, r\right) + \mathrm{O}\left(1\right).$

c) $N\left(\prod\limits_{i=1}^{k} g_i, r\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} N\left(g_i, r\right).$

d) $T\left(\sum\limits_{i=1}^{k} g_i, r\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} T\left(g_i, r\right) + \mathrm{O}\left(1\right).$

e) $T\left(\prod\limits_{i=1}^{k} g_i, r\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} T\left(g_i, r\right).$

Với mỗi hàm phân hình $f = \dfrac{f_0}{f_1}$, ta có

$$\begin{aligned} m\left(f, r\right) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\sqrt{1 + \left|\frac{f_0}{f_1}\left(re^{i\theta}\right)\right|^2} d\theta + \mathrm{O}\left(1\right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} T\left(f, r\right) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f_1\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\sqrt{1 + \left|\frac{f_0}{f_1}\left(re^{i\theta}\right)\right|^2} d\theta + \mathrm{O}\left(1\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\sqrt{\left|f_0\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 + \left|f_1\left(re^{i\theta}\right)\right|^2} d\theta + \mathrm{O}\left(1\right). \end{aligned}$$

Vì vậy, với hàm phân hình $\dfrac{af+b}{cf+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, ta có

$$\mathrm{T}\left(f, r\right) = T\left(\frac{af+b}{cf+d}, r\right) + \mathrm{O}\left(1\right).$$

2.1.5. Định lí.(Định lý cơ bản thứ nhất) [1]. *Giả sử f là một hàm* *phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Khi đó với $a \in \mathbb{C}$ ta có*

$$N(f-a,r) + m\left(\frac{1}{f-a}, r\right) = T(f,r) + \mathrm{O}(1)\ .$$

2.1.6. Chú ý. Do hàm xấp xỉ luôn nhận giá trị không âm, nên ta thu được bất đẳng thức sau đây

$$N(f-a,r) \leq T(f,r) + \mathrm{O}(1)\ .$$

2.1.7. Định lí.(Định lý cơ bản thứ hai) [1]. *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_q$ là tập các số phức phân biệt. Giả sử f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Khi đó*

$$(q-2)\,T(f,r) \leq \sum_{j=1}^{q} N_1\left(\frac{1}{f-a_j}, r\right) + \mathrm{O}(\log T(f,r))\ .$$

2.2 Tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình

Trong mục này, chúng tôi tìm hiểu cách xây dựng các tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình là các tập không điểm của các đa thức không cần thỏa mãn Điều kiện I của Fujimoto. Qua đó, chúng tôi tìm hiểu điều kiện cần và đủ để tập không điểm của một đa thức là tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình. Nội dung của mục này được tham khảo trong bài báo [4].

Giả sử $\mathcal{M}^*(\mathbb{C})$ là tập các hàm phân hình khác hằng xác định trên tập $\mathbb{C}$ và $\mathcal{F}$ là tập con khác rỗng của $\mathcal{M}^*(\mathbb{C})$.

2.2.1. Định nghĩa. Với hàm $f \in \mathcal{F}$ và tập con $\mathcal{S}$ trong miền giá trị của hàm f, ta ký hiệu

$$E(f,\mathcal{S}) = \bigcup_{a\in\mathcal{S}} \left\{(z,m) \in \mathbb{C}\times\mathbb{Z}^+ : f(z) = a, \text{với bội } m\right\}\ .$$

Tập hợp $\mathcal{S}$ được gọi là *tập xác định duy nhất*, tính cả bội, cho họ hàm $\mathcal{F}$ nếu với mọi hàm phân hình $f, g \in \mathcal{F}$ thỏa mãn điều kiện

$$E\left(f, \mathcal{S}\right) = E\left(g, \mathcal{S}\right)$$

thì $f = g$.

Ví dụ đầu tiên về tập xác định duy nhất được đưa ra bởi Gross và Yang [8] vào năm 1982, đó là tập các không điểm của phương trình

$$z + e^z = 0\,.$$

Sau đó, các ví dụ về tập xác định duy nhất được đưa ra nhiều nhất là các tập có dạng

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n + az^m + b = 0\right\},$$

trong đó a, b là các hằng số và m, n là các số nguyên dương. Lưu ý rằng tập không điểm của một đa thức có phải là tập xác định duy nhất hay không không chỉ phụ thuộc vào bậc của đa thức mà còn phụ thuộc vào dạng của đa thức . Ban đầu các tập xác định duy nhất đã được xây dựng hầu hết là các tập không điểm của các đa thức thỏa mãn Điều kiện I của Fujimoto, sau đó là các tập không điểm của các đa thức không thỏa mãn Điều kiện I.

2.2.2. Định nghĩa. Đa thức $\mathrm{P}\left(z\right)$ được gọi là *thỏa mãn Điều kiện I* nếu P đơn ánh trên các không điểm của đạo hàm của P, nghĩa là

$$\mathrm{P}\left(e_i\right) \neq \mathrm{P}\left(e_j\right)$$

với mọi không điểm $e_i \neq e_j$ của $\mathrm{P}'\left(z\right)$.

Giả sử

$$\mathrm{P}(z) = a_n z^n + \sum_{i=0}^{m} a_i z^i$$

$(1 \le m < n,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_m \ne 0)$ là một đa thức bậc n trong $\mathbb{C}[z]$ không có các không điểm bội. Ta ký hiệu các nghiệm phân biệt của đạo hàm $\mathrm{P}'(z)$ là $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ với các bội tương ứng của chúng là $m_1, m_2, ..., m_l$. Số l được gọi là chỉ số đạo hàm của $\mathrm{P}(z)$.

2.2.3. Định nghĩa. Một tập con $\mathcal{S}$ của $\mathbb{C}$ được gọi là *tập cứng afin* nếu không tồn tại phép biến đổi afin $\varphi = ux + v$, $u, v \in \mathbb{C}$, khác phép đồng nhất để $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

2.2.4. Định nghĩa. Một đa thức $\mathrm{P}(z)$ với các hệ số trong $\mathbb{C}$ được gọi là *đa thức duy nhất mạnh* cho họ hàm $\mathcal{F}$ nếu với mọi hàm khác hằng $f, g \in \mathcal{F}$ và hằng số c khác 0 thỏa mãn điều kiện $\mathrm{P}(f) = c\mathrm{P}(g)$ thì $c = 1$ và $f = g$.

Từ đây về sau ta thường sử dụng các ký hiệu như sau:

$$I = \{i \,|a_i \ne 0\} \ ,$$

$$\lambda = \min\{i \,|i \in I\} \ ,$$

$$J = \{i - \lambda \,|i \in I\} \ .$$

2.2.5. Định lí. *Giả sử*

$$\mathrm{P}(z) = a_n z^n + a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0$$

$(1 \le m < n,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_m \ne 0)$ *là một đa thức bậc n với các không điểm đơn. Ký hiệu $\mathcal{S}$ là tập các không điểm của $\mathrm{P}(z)$. Nếu $n \ge \max\{m+4,\ 2l+7\}$, thì các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\mathcal{S}$ *là tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình.*

(ii) P *là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình.*

(iii) $\mathcal{S}$ *là tập cứng afin.*

(iv) Ước chung lớn nhất của các chỉ số trong I *và* J *đều là* 1.

Để chứng minh Định lý 2.2.5, chúng ta cần các bổ đề sau đây.

2.2.6. Bổ đề. *Giả sử*

$$\mathrm{P}(z) = z^n + \sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} z^{n-i}$$

$(1 \leq m < n,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_m \neq 0)$ *là một đa thức bậc* n. *Giả sử rằng* f *và* g *là các hàm phân hình khác hằng sao cho*

$$\frac{1}{\mathrm{P}(f)} = \frac{c_0}{\mathrm{P}(g)} + c_1,$$

trong đó $c_0 \neq 0$ *và* c_1 *là các hằng số. Nếu* $n \geq \max\{m+4,\ 7\}$ *thì* $c_1 = 0$.

Chứng minh. Giả sử rằng $c_1 \neq 0$. Ta xét đa thức

$$Q(z) = \mathrm{P}(z) + \frac{c_0}{c_1}.$$

Giả sử $Q(z)$ có k không điểm phân biệt là $e_1, e_2, \cdots, e_k$ với số bội lần lượt là $n_1, n_2, \cdots, n_k$, tức là

$$Q(z) = (z - e_1)^{n_1} \cdots (z - e_k)^{n_k}.$$

Chúng ta có

$$\frac{P(g)}{c_1 P(f)} = P(g) + \frac{c_0}{c_1} = Q(g) = (g - e_1)^{n_1} \cdots (g - e_k)^{n_k} \tag{2.1}$$

Vì $c_1 \neq 0$ nên f và g không có các cực điểm chung. Do đó, nếu $z_0 \in \mathbb{C}$ là một không điểm của $g - e_i$ với $1 \leq i \leq k$, thì z_0 là một cực điểm của f. Hơn nữa từ (2.1) ta có:

$$n_i \, ord_{z_0} (g - e_i) = n \, ord_{z_0} \left(\frac{1}{f} \right) ,$$

trong đó $ord_z f$ là số bội của z sao cho $f(z) = 0$ với f là một hàm phân hình và $ord_z f$ âm khi f có cực điểm tại z. Từ đó suy ra

$$ord_{z_0} (g - e_i) = \frac{n}{n_i} ord_{z_0} \left(\frac{1}{f} \right) \geq \frac{n}{n_i} \,. \tag{2.2}$$

Áp dụng Định lý cơ bản thứ hai cho g và $e_1, e_2, \cdots, e_k$, ta có

$$\begin{aligned}
(k-2) T(g,r) &\leq \sum_{i=1}^{k} N_1 \left(\frac{1}{g - e_i}, r \right) + \mathrm{O} (\log T(g,r)) \ . \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} T(g,r) + \mathrm{O} (\log T(g,r)) \ . \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n} T(g,r) + \mathrm{O} (\log T(g,r)) \\
&\leq T(g,r) + \mathrm{O} (\log T(g,r)) \ .
\end{aligned}$$

do đó $k - 3 \leq 0$.

Trường hợp 1. $k = 1$

Ta có

$$\mathrm{P}(z) = (z - e_1)^n - \frac{c_0}{c_1} \,.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết hệ số trước số hạng z^{n-1} trong $\mathrm{P}(z)$ là 0. Do đó $k \neq 1$.

Trường hợp 2. $k = 2$

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(z) &= (z-e_1)^{n_1}(z-e_2)^{n_2} - \frac{c_0}{c_1} \\
&= z^n - (n_1e_1 + n_2e_2)\, z^{n-1} \\
&\quad + \left(n_1n_2e_1e_2 + \frac{n_1(n_1-1)}{2}e_1^2 + \frac{n_2(n_2-1)}{2}e_2^2\right) z^{n-2} \\
&\quad + \text{các số hạng có bậc cao hơn theo } z
\end{aligned}$$

Theo giả thiết $\mathrm{P}(z)$ không có số hạng bậc $n-1$ hay số hạng bậc $n-2$ nên ta có

$$n_1e_1 + n_2e_2 = n_1n_2e_1e_2 + \frac{n_1(n_1-1)}{2}e_1^2 + \frac{n_2(n_2-1)}{2}e_2^2 = 0\,,$$

mâu thuẫn với $e_1 \neq 0, e_2 \neq 0, n_1 > 0, n_2 > 0$. Do đó, $k \neq 2$.

Trường hợp 3. $k = 3$.

Ta sẽ phát biểu trường hợp này dưới dạng một bổ đề riêng biệt để sử dụng về sau.

2.2.7. Bổ đề. *Giả sử*

$$Q(z) = (z-e_1)^{n_1}(z-e_2)^{n_2}(z-e_3)^{n_3}$$

là đa thức bậc n, trong đó $n_1n_2n_3 \neq 0$ và e_1, e_2, e_3 là các số phức phân biệt. Nếu tồn tại các hàm phân hình khác hằng f và g sao cho

$$(g-e_1)^{n_1}(g-e_2)^{n_2}(g-e_3)^{n_3} = hf^n$$

với hàm phân hình h không triệt tiêu trên các tập không điểm của $g - e_i$, $i = 1, 2, 3$, thì chỉ xảy ra một trong những trường hợp sau đây

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{n}{3}\,;$$

hoặc

$$n_1 = \frac{n}{2}, n_2 = n_3 = \frac{n}{4}\,;$$

hoặc

$$n_1 = \frac{n}{2}, n_2 = \frac{n}{2}, n_3 = \frac{n}{6}\,.$$

Chứng minh Bổ đề 2.2.7.

Ta viết $n = \alpha_i\beta_i$ và $n_i = \alpha_i\gamma_i$, trong đó $(\beta_i, \gamma_i) = 1, \beta_i > \gamma_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3$. Giả sử z_0 là một không điểm của $g - e_i$ với $i = 1, 2, 3$. Theo giả thiết $Q\left(g\right) = hf^n$, ta có

$$ord_{z_0}\left(g - e_i\right) = \frac{n}{n_i}\,ord_{z_0}\left(f\right) = \frac{\beta_i}{n_i}\,ord_{z_0}\left(f\right) \geq \beta_i\,.$$

Ta sẽ xem xét các trường hợp sau đây.

(i) Tất cả $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 3$ và một trong số chúng ít nhất là 4; giả sử rằng $\beta_3 \geq 4$.

Trong trường hợp này, ta có

$$ord_{z_0}\left(g - e_3\right) \geq \beta_3 \geq 4$$

và

$$ord_{z_0}\left(g - e_i\right) \geq \beta_i \geq 3\,,\ i = 1, 2.$$

Do đó, áp dụng Định lý cơ bản thứ hai cho hàm g và các số phức e_1, e_2, e_3 ta có

$$T\left(g, r\right) \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) T\left(g, r\right) + \mathrm{O}\left(\log T\left(g, r\right)\right)$$

không thể xẩy ra.

(ii) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 3$.

Vì $\beta_i > \gamma_i$ nên ta có $\gamma_i = 1$ hoặc $\gamma_i = 2$. Giả sử rằng tồn tại một chỉ số i, không mất tính tổng quát giả sử $i = 1$, sao cho $\gamma_1 = 2$ và $n_1 = \dfrac{2n}{3}$, điều này mâu thuẫn với $n_1 + n_2 + n_3 = n$ và $n_1 n_2 n_3 \neq 0$. Vì vậy $\gamma_i = 1$ với $i = 1, 2, 3$ và vì vậy $n_1 = n_2 = n_3 = \dfrac{n}{3}$.

(iii) Tồn tại ít nhất một chỉ số i sao cho $\beta_i = 2$. Không mất tính tổng quát giả sử $i = 1$, sao cho $\beta_1 = 2$.

Vì $2 = \beta_1 > \gamma_1$ nên ta có $\gamma_1 = 1$ và do đó $n_1 = \dfrac{n}{2}$. Do

$$n_1 + n_2 + n_3 = n \text{ và } n_2 n_3 \neq 0,$$

nên $\beta_2, \beta_3 \geq 3$.

Nếu $\beta_2, \beta_3 \geq 5$ thì từ Định lý cơ bản thứ hai suy ra

$$T(g, r) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) T(g, r) + \mathrm{O}\left(\log T(g, r)\right),$$

điều này không thể xảy ra.

Nếu tồn tại chỉ số i, chẳng hạn là $i = 2$ sao cho $\beta_2 = 4$ thì $\gamma_2 = 1$ hoặc $\gamma_2 = 3$. Nếu $\gamma_2 = 3$ thì $n_2 = \dfrac{3n}{4}$, điều này vô lý vì khi đó ta có

$$n_1 + n_2 + n_3 > n_1 + n_2 = \frac{n}{2} + \frac{3n}{4} > n\,.$$

Do đó $\gamma_2 = 1$, nghĩa là $n_2 = \dfrac{n}{4}$ và do đó $n_3 = \dfrac{n}{4}$.

Nếu tồn tại chỉ số i, chẳng hạn là $i = 2$ sao cho $\beta_2 = 3$. Thế thì tương tự ta có $\gamma_2 = 1$, nghĩa là $n_2 = \dfrac{n}{3}$ và do đó $n_3 = \dfrac{n}{6}$. $\square$

Bây giờ chúng ta tiếp tục chứng minh Bổ đề 2.2.6.

Khi $k = 3$, theo Bổ đề 2.2.7, ta chỉ cần xem xét ba trường hợp sau đây.

Trường hợp đầu tiên là

$$Q(z) = (z-e_1)^{\frac{n}{3}}(z-e_2)^{\frac{n}{3}}(z-e_3)^{\frac{n}{3}}$$

suy ra

$$\mathrm{P}(z) = (z-e_1)^{n_1}(z-e_2)^{n_2}(z-e_3)^{n_3} - \frac{c_0}{c_1}.$$

Trong trường hợp này ta có $e_1 \neq 0$. Nếu $e_1 = 0$ thì $\mathrm{P}(z)$ có một số hạng bậc $n-1$ hoặc $n-2$ theo z. Mặt khác, do $\mathrm{P}(z)$ không có số hạng bậc $n-1$ nên ta có thể giả sử $e_1 = 1, e_3 = -1-e_2$. Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(z) &= (z-1)^{n_1}(z-e_2)^{n_1}(z+1+e_2)^{n_1} - \frac{c_0}{c_1}\\ &= \left(z^3 - \left(e_2^2+e_2+1\right)z + e_2\left(e_2+1\right)\right)^{n_1} - \frac{c_0}{c_1}.\end{aligned}$$

Trong số hạng lũy thừa n_1, cách duy nhất để thu được số hạng bậc $3n_1-2$ là nhân số hạng z^3 lên n_1-1 lần và số hạng z một lần. Vì có đến n_1 cách làm như vậy nên sau khi nhân ra, ta có hệ số trước z^{3n_1-2} là n_1 nhân với hệ số trước z, tức là $-n_1\left(e_2^2+e_2+1\right)$. Tương tự, cách duy nhất để thu được số hạng bậc $3n_1-3$ là nhân số hạng z^3 lên $n-1$ lần và số hạng hằng số một lần. Ta có đến n_1 cách làm như vậy do đó hệ số trước z^{3n_1-3} sau khi nhân là n_1 nhân với số hạng hằng số, tức là $n_1\left(e_2^2+e_2\right)$. Như vậy, ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(z) = z^{3n_1} - n_1\left(e_2^2+e_2+1\right)z^{3n_1-2} + n_1\left(e_2^2+e_2\right)z^{3n_1-3} + \\ + \text{các số hạng có bậc thấp hơn.}\end{aligned}$$

Theo giả thiết $\mathrm{P}(z)$ không có các số hạng bậc $n-2$ hoặc $n-3$ nên ta có

$$e_2^2+e_2+1 = e_2^2+e_2 = 0\,,$$

điều này không thể xảy ra.

Trường hợp thứ hai là

$$\mathrm{P}\left(z\right)=Q\left(z\right)-\frac{c_0}{c_1}=\left(z-e_1\right)^{2v}\left(z-e_2\right)^{v}\left(z-e_3\right)^{v}-\frac{c_0}{c_1}$$

với $v=\dfrac{n}{4}$. Vì $\mathrm{P}\left(z\right)$ không có các số hạng bậc $n-1$ hay $n-2$ theo z nên ta có $e_1\neq 0$ và ta có thể giả sử rằng $e_1=1, e_3=-2-e_2$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(z\right)&=\left(z-1\right)^{2v}\left(z-e_2\right)^{v}\left(z+2+e_2\right)^{v}-\frac{c_0}{c_1}\\&=\left(z^4-\left(e_2^2+2e_2+3\right)z^2+\left(2e_2^2+4e_2+2\right)z\;-e_2^2-2e_2\right)^{v}-\frac{c_0}{c_1}.\end{aligned}$$

Trong số hạng lũy thừa v, cách duy nhất để thu được số hạng bậc $4v-2$ là nhân số hạng z^4 lên $v-1$ lần và số hạng z^2 một lần. Vì có đến v cách làm như vậy nên sau khi nhân ra, ta có hệ số trước z^{4v-2} là v nhân với hệ số đứng trước z^2. Tương tự, cách duy nhất để có số hạng bậc $4v-3$ là nhân số hạng z^4 lên $v-1$ lần và số hạng z một lần. Ta có đến v cách làm như vậy nên hệ số trước z^{4v-3} sau khi nhân ra là v nhân với hệ số trước z. Do đó, ta có

$$\mathrm{P}\left(z\right)=z^{4v}-v\left(e_2^2+2e_2+3\right)z^{4v-2}+v\left(2e_2^2+4e_2+2\right)z^{4v-3}+$$

$$+\text{ các số hạng có bậc thấp hơn.}$$

Theo giả thiết $\mathrm{P}\left(z\right)$ không có các số hạng bậc $n-2$ hay $n-3$ nên ta có

$$e_2^2+2e_2+3=2e_2^2+4e_2+2=0,$$

điều này không thể xảy ra.

Trường hợp cuối cùng là

$$Q\left(z\right)=\left(z-e_1\right)^{\frac{n}{2}}\left(z-e_2\right)^{\frac{n}{3}}\left(z-e_3\right)^{\frac{n}{6}}.$$

Trong trường hợp này, ta có

$$\mathrm{P}(z) = Q(z) - \frac{c_0}{c_1} = (z - e_1)^{3v}(z - e_2)^{2v}(z - e_3)^{v} - \frac{c_0}{c_1}$$

với $v = \dfrac{n}{6}$. Tương tự như trường hợp trên, không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả sử rằng $e_1 = 1, e_3 = -3 - 2e_2$. Khi đó ta có

$$\mathrm{P}(z) = \left((z-1)^3(z-e_2)^2\left(z+3+2e_2\right)\right)^v - \frac{c_0}{c_1}$$

$$= \left(z^6 - \left(3e_2^2 + 6e_2 + 6\right)z^4 + \left(2e_2^3 + 12e_2^2 + 18e_2 + 8\right)z^3 + ...\right)^v$$

$$= z^{6v} - v\left(3e_2^2 + 6e_2 + 6\right)z^{6v-2} + v\left(2e_2^3 + 12e_2^2 + 18e_2 + 8\right)z^{6v-3}$$

+ các số hạng có bậc thấp hơn.

Vì vậy

$$3e_2^2 + 6e_2 + 6 = 2e_2^3 + 12e_2^2 + 18e_2 + 8 = 0,$$

điều này không thể xảy ra.

Như vậy $k \neq 3$. Do đó $c_1 = 0$, và Bổ đề 2.2.6 được chứng minh. $\square$

2.2.8. Bổ đề [6]. *Cho $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ là một tập hữu hạn trong $\mathbb{C}$ và*

$$\mathrm{P}(z) = (z - a_1)(z - a_2)\cdots(z - a_n) .$$

Giả sử rằng f và g là các hàm phân hình khác hằng sao cho

$$E(f, \mathcal{S}) = E(g, \mathcal{S}) .$$

Nếu $n \geq 2l + 7$ thì tồn tại các hằng số $c_0 \in \mathbb{C}^*$ và c_1 sao cho

$$\frac{1}{\mathrm{P}(f)} = \frac{c_0}{\mathrm{P}(g)} + c_1 .$$

2.2.9. Bổ đề [5]. *Giả sử*

$$\mathrm{P}(z) = a_n z^n + \sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} z^{n-i}$$

$(0 \le m < n,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_n, a_m \ne 0)$ *là một đa thức bậc* n. *Đặt*

$$I = \{i\,|a_i \ne 0\}\ ,$$

$$\lambda = \min\{i\,|i \in I\}$$

và

$$J = \{i - \lambda\,|i \in I\}\,.$$

Nếu $n \ge m + 4$ *thì các phát biểu sau đây là tương đương:*

(i) P *là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình.*

(ii) $\mathcal{S}$ *là tập cứng afin.*

(iii) Ước chung lớn nhất của các chỉ số trong I *là 1 và ước chung lớn nhất của các chỉ số trong* J *cũng là* 1.

Chứng minh Định lí 2.2.5. Theo Bổ đề 2.2.9, ta chỉ cần chứng minh rằng (i) tương đương với (ii).

Thật vậy, giả sử $\mathcal{S}$ là tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình và ta có f và g là các hàm phân hình khác hằng sao cho $\mathrm{P}(f) = c\,\mathrm{P}(g)$ với hằng số $c \ne 0$ nào đó. Ký hiệu $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ là tập không điểm của $\mathrm{P}(z)$. Với $i, 1 \le i \le n$, giả sử rằng $f(z_0) = a_i$ với bội α. Khi đó, do $\mathrm{P}(f) = c\,\mathrm{P}(g)$ nên tồn tại $j, 1 \le j \le n$, sao cho $g(z_0) = a_j$ với bội α. Vì vậy $E(f, \mathcal{S}) = E(g, \mathcal{S})$. Theo giả thiết S là tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình nên ta có $f = g$. Do đó, P là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình.

Ngược lại, giả sử tồn tại các hàm phân hình khác hằng f và g sao cho $E(f, \mathcal{S}) = E(g, \mathcal{S})$. Vì $n \geq \max\{m+4, 2l+7\} \geq 2l+7$, nên từ Bổ đề 2.2.8 suy ra tồn tại các hằng số $c_0 \in \mathbb{C}^*$ và c_1 sao cho

$$\frac{1}{\mathrm{P}(f)} = \frac{c_0}{\mathrm{P}(g)} + c_1.$$

Mặt khác, từ Bổ đề 2.2.6 và giả thiết $n \geq \max\{m+4, 2l+7\} \geq \max\{m+4, 7\}$ suy ra $c_1 = 0$.

Do đó $c_0\mathrm{P}(f) = \mathrm{P}(g)$ kéo theo $f = g$ vì P là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình. □

2.2.10. Định lí. *Giả sử*

$$\mathrm{P}(z) = a_n z^n + a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_p z^p + a_0$$

$(n > m > p,\ a_i \in \mathbb{C} :\ a_m a_p a_0 \neq 0)$ *là một đa thức bậc* n *với các không điểm đơn. Ký hiệu* $\mathcal{S}$ *là tập các không điểm của* $\mathrm{P}(z)$. *Giả sử rằng* $n > 8 + 2m$ *và* $p \geq 4$. *Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\mathcal{S}$ *là tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình.*

(ii) P *là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình.*

(iii) $\mathcal{S}$ *là tập cứng afin.*

(iv) Ước chung lớn nhất của các chỉ số trong I *là 1.*

Để chứng minh Định lý 2.2.10, chúng ta cần thêm Bổ đề sau đây.

2.2..11. Bổ đề [9]. *Giả sử* $g_j(x_0, x_1, \cdots, x_s)$ *là đa thức thuần nhất bậc* δ_j, *với* $0 \leq j \leq s$. *Giả sử tồn tại ánh xạ chỉnh hình*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^s$$

sao cho ảnh của ánh xạ nằm trên đường cong được xác định bởi

$$\sum_{j=0}^{s} x_j^{n-\delta_j} g_j \left(x_0, x_1, \cdots, x_s\right) = 0$$

và

$$n > (s+1)(s-1) + \sum_{j=0}^{s} \delta_j.$$

Khi đó các đa thức

$$x_1^{n-\delta_1} g_1 \left(x_0, x_1, \cdots, x_s\right), \cdots, x_s^{n-\delta_s} g_s \left(x_0, x_1, \cdots, x_s\right)$$

phụ thuộc tuyến tính trên ảnh của f.

Chứng minh Định lý 2.2.10. Theo Bổ đề 2.2.9 ta cần chứng minh rằng (i) tương đương với (iv).

Giả sử ta có (i), nghĩa là $\mathcal{S}$ là tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình. Khi đó, tương tự như phép chứng minh định lý 2.2.5 ta có P là đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình. Theo Bổ đề 2.2.9 ta có ước chung lớn nhất của các chỉ số trong I là 1. Như vậy ta có được (iv).

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh rằng (iv) kéo theo (i). Thật vậy, giả sử $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ là tập các không điểm phân biệt của $\mathrm{P}(z)$. Đặt

$$f = \frac{f_1}{f_2},\ g = \frac{l_1}{l_2}$$

là các hàm phân hình khác hằng sao cho $E(f, \mathcal{S}) = E(g, \mathcal{S})$, trong đó (f_1, f_2) và (l_1, l_2) là các cặp hàm nguyên không có không điểm chung. Khi đó tồn tại một hàm nguyên h sao cho

$$(f_1 - a_1 f_2) \cdots (f_1 - a_n f_2) = e^h (l_1 - a_1 l_2) \cdots (l_1 - a_n l_2)$$

Đặt

$$g_1 = e^{\frac{1}{n}} l_1,\ g_2 = e^{\frac{1}{n}} l_2 \quad \text{và} \quad \Phi = (f_1, f_2, g_1, g_2)\ .$$

Khi đó

$$f_1^n + f_2^{n-m} \sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} f_1^{n-i} f_2^i - g_1^n - g_2^{n-m} \sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} g_1^{n-i} g_2^i = 0. \tag{2.3}$$

Áp dụng Bổ đề 2.2.11 cho trường hợp $s = 3, \delta_0 = \delta_2 = 0, \delta_1 = \delta_3 = m$ và $n > 8 + 2m$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, không đồng nhất bằng không sao cho

$$\alpha_1 f_1^n + \alpha_2 f_2^{n-m} \sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} f_1^{n-i} f_2^i + \alpha_3 g_1^n = 0\,.$$

Ta xem xét các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \neq 0$.

Áp dụng Bổ đề 2.2.11 với $s = 2, \delta_0 = \delta_2 = 0, \delta_1 = m$, ta thu được

$$\alpha_1^{'} f_1^n + \alpha_2^{'} f_2^{n-m} \sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} f_1^{n-i} f_2^i = 0$$

trong đó $\alpha_i{}'$ không đồng nhất bằng 0. Vì vậy f là hàm hằng.

Trường hợp 2: $\alpha_3 = 0$, thế thì f phải là hàm hằng.

Trường hợp 3: $\alpha_1 = 0$. Ta có $\alpha_2 \alpha_3 \neq 0$. Khi đó

$$\alpha_2 f_2^{n-m} \sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} f_1^{n-i} f_2^i = -\alpha_3 g_1^n.$$

Chia cả hai vế của phương trình trên cho f_2^n và lưu ý rằng $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, ta có

$$f^{n-m}\left(a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_p z^p + a_0\right) = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(\frac{g_1}{f_2}\right)^n.$$

Gọi $e_1, e_2, \cdots, e_q$ là các không điểm phân biệt của $Q(z)$ với các số bội tương ứng là $n_1, n_2, \cdots, n_q$ với

$$Q(z) = a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_p z^p + a_0\,.$$

Khi đó

$$f^{n-m}(f-e_1)^{n_1}\cdots(f-e_q)^{n_q} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\left(\frac{g_1}{f_2}\right)^n.$$

Theo giả thiết $a_0 \neq 0$, nên ta có $e_i \neq 0$, mà $m > p \geq 4$ nên $q \geq 2$. Mặt khác, bằng cách lập luận tương tự như trong phép chứng minh Bổ đề 2.2.6, ta có $q \leq 2$. Do đó $q = 2$. Theo Bổ đề 2.2.7, nếu $q = 2$ thì một trong các trường hợp sau đây xảy ra

$$n - m = \frac{n}{2}, n - m = \frac{n}{3}, n - m = \frac{n}{4}, n - m = \frac{n}{6}\,.$$

Tất cả các trường hợp này đều mâu thuẫn với giả thiết $n > 8 + 2m$. Do đó f là hàm hằng.

Trường hợp 4: $\alpha_2 = 0$. Thế thì $\alpha_1\alpha_3 \neq 0$. Hơn nữa,

$$\alpha f_1 = g_1\,,$$

trong đó $\alpha^n = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_3}$. Từ (2.3) ta có

$$(1-\alpha)\,\alpha_n f_1^n + f_2^{n-m}\sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} f_1^{n-i} f_2^i - g_2^{n-m}\sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i}\alpha^{n-i} f_1^{n-i} g_2^i = 0\,.$$

Nếu $\alpha \neq 1$, thì áp dụng Bổ đề 2.2.11 cho $\delta_0 = 0, \delta_1 = \delta_2 = m, s = 2$ ta thu được f_1^n và $f_2^{n-m} \sum_{i=0}^{m} a_i f_1^i f_2^{m-i}$ phụ thuộc tuyến tính, và do đó f là hàm hằng. Như vậy $\alpha = 1$ và

$$a_n f_1^n + f_2^{n-m} \sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} f_1^{n-i} f_2^i = a_n g_1^n + g_2^{n-m} \sum_{i=n-m}^{n} a_{n-i} g_1^{n-i} g_2^i \,.$$

Bây giờ ta xét đa thức

$$Q(z) = a_0 h_1^n + a_p h_1^{n-p} + \cdots + a_m h_1^{n-m} + a_n \,.$$

Chia cả hai vế của phương trình trên cho $f_1^n = g_1^n$ ta được

$$H\left(\frac{1}{f}\right) = H\left(\frac{1}{g}\right). \tag{2.4}$$

Mặt khác, do giả thiết ước chung lớn nhất của các chỉ số trong $I = \{i \,| a_i \neq 0\}$ là 1 nên ta có ước chung lớn nhất của các chỉ số trong $K = \{n - i \,| a_i \neq 0\}$ cũng là 1. Vì $a_n \neq 0$ nên ta có

$$\min \{n - i \,| n - i \in K\} = 0 \,.$$

Từ đó, áp dụng Bổ đề 2.2.9 với $p \geq 4$ ta có $H(z)$ là một đa thức duy nhất mạnh cho họ các hàm phân hình. Vì vậy từ (2.4), ta có được $f = g$. $\square$

KẾT LUẬN

Trên cơ sở tham khảo các tài liệu, trong luận văn này chúng tôi đã tập trung tìm hiểu và trình bày một cách chi tiết những nội dung sau đây:

1. Tập đại số trong không gian afin và không gian xạ ảnh, đường cong phẳng trong mặt phẳng afin.

2. Định lý cơ bản thứ hai Nevanlinna.

3. Cách xây dựng các tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình là các tập không điểm của các đa thức không cần thỏa mãn Điều kiện I của Fujimoto.

4. Điều kiện cần và đủ để tập không điểm của một đa thức là tập xác định duy nhất cho họ các hàm phân hình khác hằng trên trường số phức.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG VIỆT

[**1**] Trần Văn Tấn (2017), *Lí thuyết phân bố giá trị đối với đường cong nguyên trong không gian xạ ảnh* , Nhà xuất bản Đại học sư phạm Hà Nội.

[**2**] Ngô Việt Trung (2012), *Nhập môn Đại số giao hoán và Hình học đại số* , Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và công nghệ.

[**3**] Đồng Anh Tú (2020), *Tập xác định duy nhất cho họ các hàm nguyên,* Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Vinh.

TIẾNG ANH

[**4**] T.T.H. An (2011), Unique range sets for meromorphic functions constructed without an injectivity hypothesis, *Taiwanese J. Math.,* 15(2), 697-709.

[**5**] T.T.H. An, J.T.Y. Wang and P.M. Wong (2004), Strong uniqueness polynomials: the complex case, *J. Complex Variables* , 49(1), 25-54.

[6] H. Fujimoto (2000), On uniqueness of meromorphic functions sharing finite sets, *Amer. J. Math.* , 122 (6), 1175–1203.

[7] W. Fulton (1969), *Algebraic curves, An Introductions to Algebraic Geometry* , W. A. Benjamin, New York.

[8] F. Gross and C.C. Yang (1982), On preimage and range sets of meromorphic functions, *Proc. Japan Acad. Ser. A.Math. Sci.* , 58(1), 17-20.

[9] Y.T. Siu and S.K. Yeung (1997), Defects for ample divisors of Abelian varieties, Schwarz lemma, and Hyperbolic hypersurfaces of low degree, *Amer. J. Math.* , 119 , 1139-1172.