

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ MINH TRÂM

LŨY THỪA HÌNH THỨC CỦA IDEAN PHỦ
CỦA ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT KOSZUL

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ MINH TRÂM

LŨY THỪA HÌNH THỨC CỦA IDEAN PHỦ
CỦA ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT KOSZUL

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 8460104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. THIỀU ĐÌNH PHONG

Nghệ An - 2022

MỤC LỤC

Mục lục	1
Mở đầu	2
1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	5
1.1. Một số khái niệm cơ bản về đồ thị	5
1.2. Phức đơn hình, idêan phủ và lũy thừa hình thức	7
2 LŨY THỪA HÌNH THỨC CỦA IDEAN PHỦ CỦA ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT KOSZUL	17
2.1. Lũy thừa hình thức của idêan phủ của đồ thị với tính chất Koszul .	17
2.2. Thêm nhánh vào một đồ thị và Đồ thị sao đầy đủ	24
Kết luận	29
Tài liệu tham khảo	30

MỞ ĐẦU

Nghiên cứu về lũy thừa hình thức của ideal phủ của đồ thị và tính chất Koszul là một vấn đề thời sự của toán học, đặc biệt là việc sử dụng các phương pháp của tổ hợp trong nghiên cứu các tính chất đại số. Đại số Koszul lần đầu tiên được giới thiệu bởi Priddy [10] và sau đó được Herzog và Iyengar tổng quát hóa thành các môđun Koszul [7]. Một R -môđun hữu hạn sinh M , với R là một vành đa thức trên một trường K , được gọi là *môđun Koszul* nếu môđun phân bậc liên kết của nó $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i M / \mathfrak{m}^{i+1} M$, với $\mathfrak{m}$ là ideal cực đại thuần nhất của R , có giải tuyến tính trên vành phân bậc liên kết $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1}$. Đại số Koszul và môđun Koszul đã được nghiên cứu sâu rộng và tìm thấy những ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học khác nhau.

Trong hướng nghiên cứu về các ideal đơn thức Cohen-Macaulay, kết quả của Villarreal [14] cho thấy rằng đối với bất kỳ đồ thị $G = (V_G, E_G)$, đồ thị $G \cup W(V_G)$ thu được bằng cách thêm nhánh vào mỗi đỉnh là đồ thị *Cohen-Macaulay*. Một cách tương đương, khi đó ideal phủ $J(G \cup W(V_G))$ có *giải tuyến tính*. Trên thực tế, sau đó một số kết quả khác (xem [2, 15]) đã chỉ ra rằng $G \cup W(V_G)$ là *có thể phân tách đỉnh* và *có thể bao phủ*. Lưu ý rằng, tổng quát ta có chuỗi suy ra sau đây:

có thể phân tách đỉnh $\Rightarrow$ có thể bao phủ $\Rightarrow$ Cohen-Macaulay dãy.

Các kết quả nói trên liên hệ chặt chẽ với các tính chất sau: (a) một ideal thuần nhất trong R là Koszul nếu và chỉ khi nó là *tuyến tính từng phần* (xem [11, Định lý 3.2.8]) ; và (b) ideal phủ của đồ thị là tuyến tính từng phần khi và chỉ khi đồ thị là Cohen-Macaulay dãy (xem [5, Định lý 2.1]). Đặc biệt, nếu một đồ thị có thể phân tách đỉnh thì ideal phủ của nó là Koszul.

Mối liên hệ này đã được minh họa thêm trong một công trình gần đây của L. X. Dung, T. T. Hien, H. D. Nguyen và T. N. Trung [3], trong đó chỉ ra rằng đối với bất kỳ đồ thị $G = (V_G, E_G)$, tất cả các lũy thừa hình thức của idêan phủ của $G \cup W(V_G)$ là Koszul. Selvaraja [12] sau đó đã chỉ ra rằng người ta chỉ cần thêm nhánh vào các đỉnh của một *phủ đỉnh* của G để có được một đồ thị mới mà tất cả các lũy thừa hình thức của idêan phủ là Koszul.

Trong bài báo [4], Yan Gu, Huy Tai Ha và Joseph W. Skelton đã khái quát kết quả của Selvaraja [12] và chứng minh rằng kết luận tương tự cũng đúng sau khi thêm nhánh vào các đỉnh của một chu trình phủ của đồ thị. Kết quả cụ thể được phát biểu như sau.

Định lý. *Cho G là một đồ thị và S là một phủ chu trình của G . Gọi H là một đồ thị thu được bằng cách thêm ít nhất một nhánh vào mỗi đỉnh trong S và đặt J là idêan phủ của nó. Khi đó, $J^{(k)}$ là Koszul với mọi $k \geq 1$.*

Trên cơ sở đó chúng tôi chọn đề tài “**Lũy thừa hình thức của idêan phủ của đồ thị và tính chất Koszul**” để trình bày lại chứng minh của định lý và các kết quả đã đề cập ở trên của Yan Gu, Huy Tai Ha và Joseph W. Skelton trong tài liệu tham khảo chính [4]. Luận văn bao gồm phần mở đầu, nội dung chính và các tài liệu tham khảo. Trong đó, nội dung của luận văn được chia làm hai chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày các kiến thức cơ sở về đồ thị, phức đơn hình, idêan phủ và lũy thừa hình thức của một idêan .

Chương 2. Lũy thừa hình thức của idêan phủ của đồ thị và tính chất Koszul. Nội dung của chương này là trình bày về Lũy thừa hình thức của idêan phủ của một số đồ thị đặc biệt có tính chất Koszul thông qua việc trình bày chứng minh chi tiết một số kết quả của tài liệu tham khảo chính.

Luận văn được thực hiện tại Trường Đại học Vinh với sự hướng dẫn của TS. Thiều Đình Phong. Tác giả xin trân trọng cảm ơn sự hướng dẫn tận tình, chu

đáo của TS. Thiều Đình Phong cùng tất cả các Thầy giáo, Cô giáo khác trong Chuyên ngành Đại số - Lý thuyết số của Khoa Toán - Trường Sư phạm thuộc Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập và làm luận văn. Mặc dù đã có nhiều cố gắng song luận văn có thể còn có một số sai sót, tác giả rất mong nhận được các ý kiến góp ý, bổ sung và chỉnh chữa của các Thầy, Cô cùng các bạn học viên.

Nghệ An, tháng 07 năm 2022

Tác giả

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Nội dung của chương này là trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản được dùng trong luận văn.

1.1 Một số khái niệm cơ bản về đồ thị

1.1.1 Định nghĩa. Một đồ thị G được định nghĩa bao gồm một tập đỉnh $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ và một tập cạnh $E(G)$ gồm các cạnh (nếu có) nối các cặp đỉnh trong $V(G)$.

Một đỉnh $v \in V(G)$ được gọi là *đỉnh cô lập* nếu nó không thuộc bất cứ cạnh nào của G , hay v không nối với bất kỳ đỉnh nào khác. Đồ thị G được gọi là có *cạnh kép* nếu có 2 cạnh cùng nối một cặp đỉnh. Nếu một cạnh của G có 2 đỉnh trùng nhau thì được gọi là một *khuyên* của G . Đồ thị G được gọi là *đơn* nếu nó không có khuyên và cạnh kép. Trong luận văn này ta chỉ xét các đồ thị đơn, hữu hạn và ta đồng nhất các đỉnh $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ của G với các biến trong vành đa thức $R = K[x_1, \dots, x_n]$.

Ta gọi việc thêm một *nhánh* vào một đỉnh x của G có nghĩa là việc thêm một đỉnh y vào tập đỉnh V_G và một cạnh mới $\{x, y\}$ vào tập cạnh E_G . Với một tập con $S \subset V_G$, ta ký hiệu $G \cup W(S)$ là đồ thị đạt được từ G bằng cách thêm một nhánh vào mỗi đỉnh trong S .

Cho một tập con U của tập các đỉnh của G , đồ thị con cảm sinh của G trên U , ký hiệu bởi G_U , là đồ thị có tập đỉnh là U và tập cạnh là $\{\{x, y\} \in E_G : x, y \in U\}$.

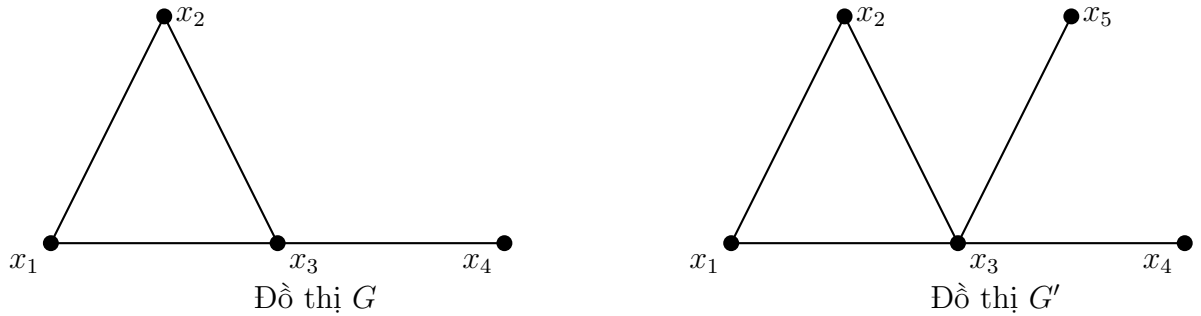
Ta cũng viết $G \setminus U$ cho đồ thị con cảm sinh của G trên tập đỉnh phần bù

của U .

Cho một tập con $F \subset E_G$ của các cạnh trong G , ký hiệu $G \setminus F$ là đồ thị đạt được từ G bằng cách xoá các cạnh trong F . Để đơn giản ký hiệu, ta viết $G \setminus x$ và $G \setminus e$ cho $G \setminus \{x\}$ và $G \setminus \{e\}$, trong đó $x \in V_G$ và $e \in E_G$ tương ứng.

Một bước trong G là một dãy luân phiên của các đỉnh và các cạnh trong G dạng: $x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, x_m, e_m, x_{m+1}$, trong đó $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$. Để đơn giản hoá và không gây nhầm lẫn, ta thường viết $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ cho một bước như trên. Ta cũng viết xy thay cho cạnh $\{x, y\}$ trong G . Một *đường dẫn* là một bước $x_1, \dots, x_{m+1}$, trong đó các đỉnh là phân biệt ngoại trừ có khả năng $x_1 \equiv x_{m+1}$. Một *chu trình* là một đường dẫn đóng; tức là một đường dẫn dạng $x_1, \dots, x_{m+1}$ với $x_1 \equiv x_{m+1}$. Trong trường hợp này, ta viết $x_1, x_2, \dots, x_m$ để ký hiệu chu trình.

1.1.2 Ví dụ. Cho đồ thị G như Hình 1.1.



Hình 1.1: Đồ thị G và G'

Khi đó ta có, việc thêm một nhánh vào đỉnh x_3 của đồ thị G là đỉnh x_5 và cạnh $\{x_3, x_5\}$ ta được đồ thị G' .

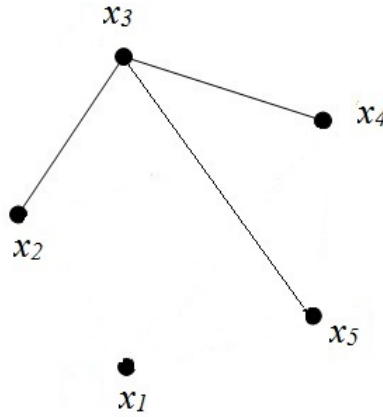
Với tập con các đỉnh $U = \{x_1, x_3, x_4\}$, ta có đồ thị con cảm sinh G_U của G trên U là đồ thị có tập đỉnh là U và tập cạnh là $\{\{x_1, x_3\}; \{x_3, x_4\}\}$.

Dãy x_1, x_2, x_1, x_3 là một bước trong G nhưng không là đường dẫn vì lặp lại đỉnh x_1 ở giữa. Dây x_1, x_2, x_3, x_4 là một đường dẫn, nhưng không là một chu trình vì không có cạnh $\{x_4, x_1\}$. Dây x_1, x_2, x_3 là một chu trình.

1.1.3 Định nghĩa. Cho G là một đồ thị và $W \subseteq V_G$ là một tập con của các đỉnh.

1. W được gọi là một *tập độc lập* nếu không có cạnh nào trong G liên kết với 2 đỉnh trong W .
2. W được gọi là một *phủ đỉnh* của G nếu $G \setminus W$ chỉ bao gồm các đỉnh cô lập, hoặc tương đương, nếu $V_G \setminus W$ là một tập độc lập.
3. W được gọi là một *phủ chu trình* của G nếu $G \setminus W$ không có chu trình nào.

1.1.4 Ví dụ. Cho đồ thị G như Hình 1.2.



Hình 1.2: Đồ thị G

Ta có: $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E(G) = \{x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_3\}$.

Khi đó, G không là đồ thị đơn do có một đỉnh cô lập là x_1 .

Tập $W = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ là một tập độc lập trong G vì không có cạnh nào tạo bởi hai đỉnh trong W .

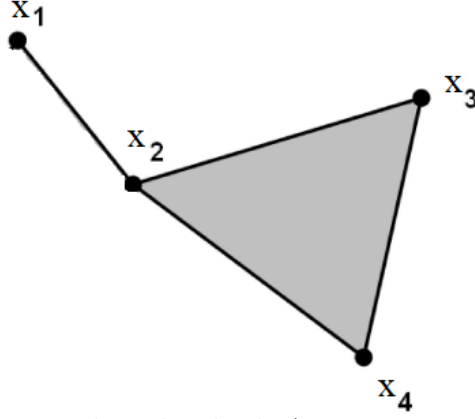
Đồ thị G có nhiều phủ đỉnh, ví dụ: $\{x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_2, x_4, x_5\}$, ... trong đó phủ đỉnh $\{x_3\}$ là phủ đỉnh bé nhất.

1.2 Phức đơn hình, iđêan phủ và lũy thừa hình thức

1.2.1 Định nghĩa. Cho V là một tập đỉnh. Một *phức đơn hình* Δ trên V là một họ các tập con của V thỏa mãn tính chất: nếu $F \in \Delta$ thì tất cả các tập con F thuộc Δ . Mỗi phần tử của Δ được gọi là một *mặt*, số $|F| - 1$ được gọi là chiều của mặt F , ký hiệu $\dim(F)$. Chiều của Δ , ký hiệu $\dim(\Delta)$, là chiều lớn

nhất có thể có của các mặt của Δ . *Mặt cực đại* là mặt tối đại theo quan hệ bao hàm trong Δ . Tập hợp các mặt cực đại của Δ được ký hiệu bởi $\text{Facets}(\Delta)$.

1.2.2 Ví dụ. Cho phức đơn hình như Hình 1.3 dưới đây



Hình 1.3: Phức đơn hình Δ

Khi đó, tập các mặt của Δ là

$$\{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}.$$

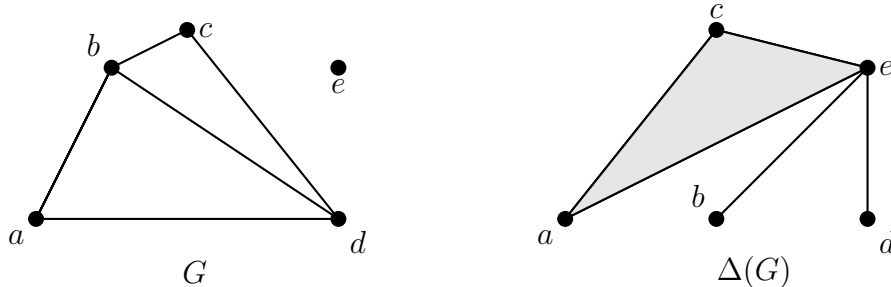
Ta có

$$\text{Facets}(\Delta) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3, x_4\}\},$$

do đó $\dim(\Delta) = 2$.

1.2.3 Định nghĩa. Ta có mọi tập con của một tập độc lập cũng là một tập độc lập. Do đó, họ các tập độc lập trong G tạo thành các mặt của một phức đơn hình trên V_G . Ta gọi phức đơn hình này là *phức độc lập* của G và ký hiệu bởi $\Delta(G)$.

1.2.4 Ví dụ. Cho đồ thị G như Hình 1.4.



Hình 1.4: Đồ thị G và phức độc lập $\Delta(G)$.

Khi đó các tập độc lập của G tạo thành phức độc lập $\Delta(G)$ của G trên cùng tập đỉnh $V(G)$ và có các mặt cực đại là các tập độc lập cực đại của G , tức là

$$\text{Facets}(\Delta(G)) = \{\{a, c, e\}, \{b, e\}, \{d, e\}\}.$$

1.2.5 Định nghĩa. Cho Δ là một phức đơn hình và $\sigma \in \Delta$ là một mặt của Δ . Xóa σ trong Δ , ký hiệu bởi $\text{del}_\Delta(\sigma)$, là phức đơn hình đạt được bằng cách loại bỏ σ và tất cả các mặt có chứa σ trong Δ . Cái *link* của σ trong Δ , ký hiệu bởi $\text{link}_\Delta(\sigma)$, là phức đơn hình có các mặt là:

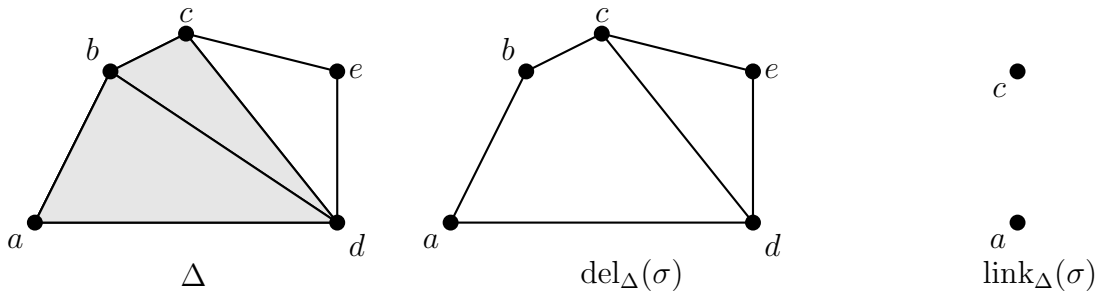
$$\{\eta \in \Delta \mid \eta \cap \sigma = \emptyset, \eta \cup \sigma \in \Delta\}.$$

Phức đơn hình Δ được gọi là một k -simplex nếu nó chỉ có duy nhất một mặt cực đại gồm $k + 1$ đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$. Tức là mọi tập con của tập các đỉnh đều lập thành một mặt của Δ .

1.2.6 Ví dụ. Cho phức đơn hình Δ như Hình 1.5. Gọi $\sigma = \{b, d\}$ là đoạn thẳng chứa 2 đỉnh b, d của Δ . Khi đó ta có $\text{link}_\Delta \sigma$ và $\text{del}_\Delta \sigma$ là các phức đơn hình được xác định như trong Hình 1.5 bởi tập các mặt cực đại lần lượt là:

$$\text{Facet}(\text{del}_\Delta(\sigma)) = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}, \{d, a\}, \{c, d\}\},$$

$$\text{Facet}(\text{link}_\Delta(\sigma)) = \{\{a\}, \{c\}\}.$$



Hình 1.5: Phức đơn hình Δ , $\text{link}_\Delta(\sigma)$ và $\text{del}_\Delta(\sigma)$.

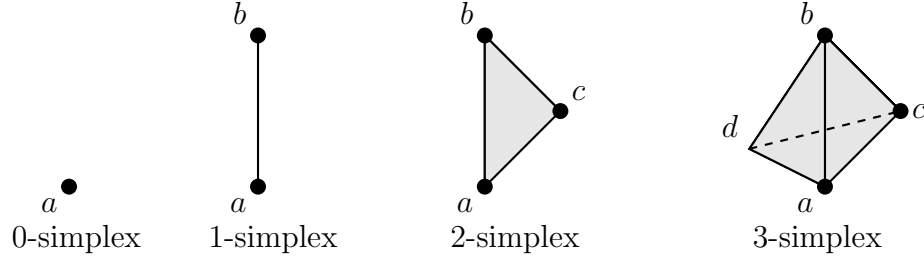
1.2.7 Ví dụ. Một 0-simplex là phức đơn hình gồm 1 đỉnh.

Một 1-simplex là đoạn thẳng nối 2 đỉnh.

Một 2-simplex là tam giác, tức là phức đơn hình trên 3 đỉnh có mặt cực đại là tam giác nối 3 đỉnh

Một 3-simplex là tứ diện, tức là phức đơn hình trên 4 đỉnh, có mặt cực đại tạo bởi 4 đỉnh...

Biểu diễn các simplex đơn giản như trong Hình 1.6.



Hình 1.6: Một số simplex đơn giản.

1.2.8 Định nghĩa. Một phức đơn hình Δ được gọi là *phân tách đỉnh được* nếu hoặc

1. Δ là một *simplex*; hoặc

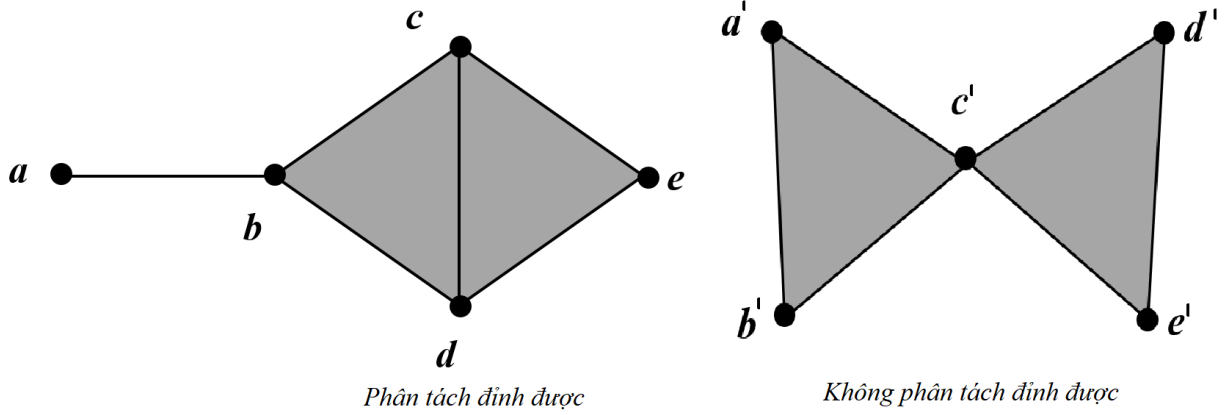
2. tồn tại một đỉnh v trong Δ sao cho

(a) tất cả các mặt cực đại của $\text{del}_\Delta(v)$ là mặt cực đại của Δ (trong trường hợp này, v được gọi là một *đỉnh rìa* của Δ), và

(b) cả $\text{link}_\Delta(v)$ và $\text{del}_\Delta(v)$ là phân tách đỉnh được.

1.2.9 Ví dụ. Định nghĩa của phức đơn hình phân tách đỉnh được được trình bày bằng cách quy nạp theo số đỉnh của phức đơn hình Δ . Phức đơn hình $\text{del}_\Delta(v)$ và $\text{link}_\Delta(v)$ có ít hơn n đỉnh (bởi vì không chứa v), nên bằng quy nạp khái niệm phức đơn hình phân tách đỉnh được của n đỉnh được xây dựng từ các phức đơn hình phân tách đỉnh được với số đỉnh bé hơn. Ta minh họa điều này bởi một ví dụ sau đây:

Cho Δ là phức đơn hình với tập đỉnh $V = \{a, b, c, d, e\}$ và các mặt cực đại của là $\{a, b\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}$ như Hình 1.7. Do Δ không rỗng và cũng không



Hình 1.7: Phức đơn hình phân tách đỉnh được và không phân tách đỉnh được

phải là một simplex, để xem xét Δ có là phân tách đỉnh không, ta cần tìm đỉnh v thỏa mãn điều kiện (2) của Định nghĩa 1.2.8 ở trên. Xét với $v = a$. Ta thấy $\text{link}_\Delta(a)$ là b , và $\text{del}_\Delta(a)$ sinh bởi các mặt cực đại $\{b, c, d\}$ và $\{c, d, e\}$. Ta có $\text{link}_\Delta(a)$ là một simplex nên nó là phân tách đỉnh được bởi điều kiện (1) của Định nghĩa 1.2.8. Ngoài ra, rõ ràng rằng, mọi mặt cực đại của $\text{del}_\Delta(a)$ cũng là mặt cực đại của Δ . Do đó, câu hỏi duy nhất đặt ra đó là $\text{del}_\Delta(a)$ có là phân tách đỉnh không.

Để kiểm tra điều này, ta đặt $E = \text{del}_\Delta(a)$. Do E khác rỗng và không là simplex, cách duy nhất để nó là phân tách đỉnh đó là phải thỏa mãn điều kiện (2). Lấy đỉnh rơi là $v = b$. Khi đó $\text{link}_\Delta(b)$ của E là cạnh $\{c, d\}$ và $\text{del}_\Delta(b)$ trong E là 2-simplex trên tập đỉnh $\{c, d, e\}$. Do cả hai đều là simplex, nên chúng đều là phân tách đỉnh được bởi điều kiện (1). Bên cạnh đó, mọi mặt cực đại của $\text{del}_\Delta(b)$ cũng là mặt cực đại của E . Do đó E thỏa mãn điều kiện (2) với đỉnh rơi là b và do đó nó là phân tách đỉnh được. Vì vậy Δ thỏa mãn điều kiện (2) với đỉnh rơi là $v = a$ nên Δ là phức đơn hình phân tách đỉnh được.

Bây giờ, ta xét phức đơn hình Δ' với tập đỉnh $V' = \{a', b', c', d', e'\}$ và gọi các mặt cực đại $\{a', b', c'\}$ và $\{c', d', e'\}$ như Hình 1.7. Do Δ' khác rỗng và không là simplex nên nó không thỏa mãn điều kiện (1). Hơn nữa, ta có thể kiểm tra rằng với mỗi đỉnh $x \in V'$, $\text{del}_\Delta(x)$ có một mặt cực đại không phải là mặt cực đại của Δ' , do đó Δ' không thỏa mãn điều kiện (2), và do đó nó không là phân tách đỉnh được.

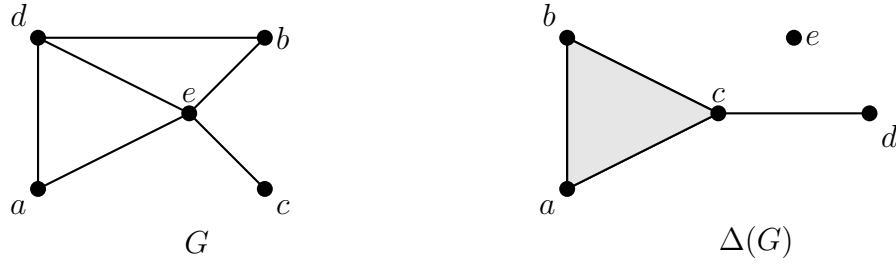
1.2.10 Định nghĩa. Một đồ thị G được gọi là *phân tách đỉnh được* nếu phức đơn hình độc lập của nó $\Delta(G)$ là một phức đơn hình phân tách đỉnh được. Các đỉnh tách của $\Delta(G)$ cũng tương ứng là các đỉnh tách của G .

Lân cận mở và *lân cận đóng* của một đỉnh x trong một đồ thị G được định nghĩa lần lượt là

$$N_G(x) := \{y \in V_G \mid \{x, y\} \in E_G\} \text{ and } N_G[x] := N_G(x) \cup \{x\}.$$

Một đỉnh x trong G được gọi là *đỉnh đơn hình* nếu đồ thị con cảm sinh của G trên $N_G[x]$ là một đồ thị đầy đủ.

1.2.11 Ví dụ. Cho đồ thị G như Hình 1.8.



Hình 1.8: Đồ thị G phân tách đỉnh được.

Khi đó G là đồ thị phân tách đỉnh được vì phức độc lập $\Delta(G)$ (như trong Hình 1.8) là phân tách đỉnh được. Thật vậy, $\Delta(G)$ là phức đơn hình sinh bởi các mặt cực đại

$$\text{Facet}(\Delta(G)) = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{e\}\}.$$

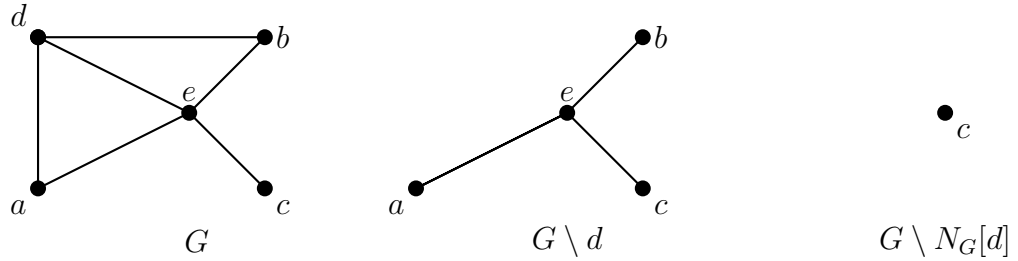
Phức độc lập $\Delta(G)$ có đỉnh rơi là d vì $\text{link}_{\Delta(G)}(d) = \{c\}$ là 0-simplex và $\text{del}_{\Delta(G)}(d)$ sinh bởi 2 mặt cực đại $\{a, b, c\}$ và $\{e\}$ nên là phân tách đỉnh được với đỉnh rơi e .

Người ta đã suy ra được từ một kết quả của Woodroffe [15, Corollary 7] rằng các lân cận của một đỉnh đơn hình trong G là các đỉnh tách của G . Một cách chuyển đổi trực tiếp từ tính chất hình học của phức đơn hình $\Delta(G)$ tới tính chất tổ hợp của đồ thị G cho ta định nghĩa sau cho các đồ thị phân tách đỉnh được.

1.2.12 Định nghĩa. Một đồ thị G được gọi là *phân tách đỉnh được* nếu hoặc G bao gồm các đỉnh cô lập hoặc có một đỉnh x trong $V(G)$ sao cho

1. Không tập độc lập nào trong $G \setminus N_G[x]$ là một tập độc lập tối đại trong $G \setminus x$, và
2. $G \setminus x$ và $G \setminus N_G[x]$ là phân tách đỉnh được.

1.2.13 Ví dụ. Xét đồ thị G như ở Ví dụ 1.2.11 xác định như Hình 1.9.



Hình 1.9: Đồ thị G phân tách đỉnh được.

Ta có G là đồ thị phân tách đỉnh được vì có đỉnh d của G thỏa mãn các điều kiện của Định nghĩa 1.2.12. Thật vậy, ta có $N_G[d] = \{a, b, d, e\}$; $G \setminus d$ là đồ thị trên tập đỉnh $\{a, b, c, e\}$ với các cạnh $\{a, e\}, \{b, e\}, \{c, e\}$; $G \setminus N_G[d]$ là đồ thị gồm 1 đỉnh c là đỉnh cô lập.

Rõ ràng $\{c\}$ không là tập độc lập tối đại trong $G \setminus d$ vì có $\{a, b, c\}$ là tập độc lập của $G \setminus d$ chứa c . Nên d là đỉnh thỏa mãn điều kiện (1) của Định nghĩa 1.2.12.

Ta có $G \setminus N_G[d] = \{c\}$ chỉ gồm 1 đỉnh cô lập nên là đồ thị phân tách đỉnh.

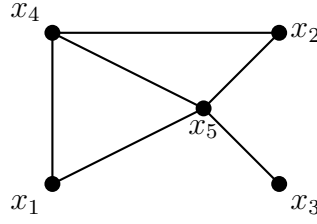
Để kiểm tra đỉnh d thỏa mãn điều kiện (2) của Định nghĩa 1.2.12, ta kiểm tra $G \setminus d$ cũng là đồ thị phân tách đỉnh. Thật vậy, chọn đỉnh e để kiểm tra. Ta có $(G \setminus d) \setminus e$ chỉ gồm 3 đỉnh cô lập là a, b, c nên $(G \setminus d) \setminus e$ là phân tách đỉnh. Ngoài ra, $(G \setminus d) \setminus N_{(G \setminus d)}(e) = \emptyset$ là phân tách đỉnh.

1.2.14 Định nghĩa. Cho G là một đồ thị và R là vành đa thức tương ứng. *Idêan phủ* $J(G)$ của G được định nghĩa như sau:

$$J(G) := \langle x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mid \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \text{ là một phủ đỉnh của } G \rangle \subseteq R.$$

Định nghĩa của idêan phủ cho ta một tương ứng một một giữa các đồ thị trên n đỉnh và các idêan đơn thức không chính phương độ cao 2 trong vành đa thức n biến.

1.2.15 Ví dụ. Xét đồ thị G như ở Ví dụ 1.2.11 xác định như Hình 1.10.



Hình 1.10: Đồ thị G

Tất cả các phủ đỉnh tối thiểu của G là $\{x_4, x_5\}; \{x_1, x_2, x_3, x_4\}; \{x_1, x_2, x_5\}$. Do đó, idêan phủ của G là

$$J(G) = \langle x_4x_5, x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_5 \rangle.$$

1.2.16 Định nghĩa. Cho $I \subseteq R$ là một idêan. Với mọi $k \in \mathbb{N}$, *luỹ thừa hình thức bậc k của I* được định nghĩa bởi

$$I^{(k)} := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R/I)} (I^n R_{\mathfrak{p}} \cap R) \subseteq R.$$

Nếu idêan I có phân tích nguyên sơ thu gọn dạng $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_m$ với $\sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i$ với mọi i , trong đó các idêan nguyên tố tối thiểu của I là $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$, thì

$$I^{(k)} = Q_1^{(k)} \cap \cdots \cap Q_s^{(k)}.$$

Đặc biệt, nếu I là một idêan đơn thức không chính phương trong vành đa thức trên một trường, thì

$$I^{(k)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(I)} \mathfrak{p}^k.$$

Cho một idêan đơn thức không chính phương I , $I^{(k)}$ là một idêan đơn thức nhưng nói chung không phải là không chính phương.

1.2.17 Ví dụ. Cho $R = k[x, y, z]$ và idêan $I = (xy, xz)$.

Ta có I là idêan đơn thức không chính phương có phân tích nguyên sơ thu gọn là $I = (x) \cap (y, z)$, trong đó $(x), (y, z)$ cũng chính là các idêan nguyên tố tối tiểu của I . Khi đó ta có:

$$I^{(2)} = (x)^2 \cap (y, z)^2 = (x^2) \cap (y^2, yz, z^2) = (x^2y^2, x^2yz, x^2z^2),$$

$$I^{(3)} = (x)^3 \cap (y, z)^3 = (x^3) \cap (y^3, y^2z, yz^2, z^3) = (x^3y^3, x^3y^2z, x^3yz^2, x^3z^3).$$

Rõ ràng $I^{(2)}, I^{(3)}$ không là các idêan không chính phương.

Một phương pháp thường được sử dụng với tên gọi là *phân cực hoá* để đạt được idêan đơn thức không chính phương từ $I^{(k)}$ được xây dựng như sau.

1.2.18 Định nghĩa. Cho $M = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ là một đơn thức trong $R = K[x_1, \dots, x_n]$.

Ta định nghĩa idêan đơn thức không chính phương $P(M)$ (cái *phân cực hoá* của M) là

$$P(M) = x_{11} \cdots x_{1a_1} x_{21} \cdots x_{2a_2} \cdots x_{n1} \cdots x_{na_n}$$

trong vành đa thức $S = K[x_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq a_i]$. Nếu $I = (M_1, \dots, M_q)$ là một idêan đơn thức trong R , thì *phân cực hoá* của I , ký hiệu bởi I^{pol} , được định nghĩa là $I^{\text{pol}} = (P(M_1), \dots, P(M_q))$ trong một vành đa thức thích hợp.

1.2.19 Ví dụ. Cho I là một idêan đơn thức trong vành đa thức $R = K[x_1, x_2, x_3]$ xác định bởi

$$I = \langle M_1, M_2, M_3 \rangle = \langle x_1x_2^2, x_1^2x_2x_3, x_1x_3^3 \rangle.$$

Phân cực hóa của các đơn thức sinh của I là

$$P(M_1) = x_{11}x_{21}x_{22}$$

$$P(M_2) = x_{11}x_{12}x_{21}x_{31}$$

$$P(M_3) = x_{11}x_{31}x_{32}x_{33}.$$

Đặt $y_1 = x_{11}, y_2 = x_{12}, y_3 = x_{21}, y_4 = x_{22}, y_5 = x_{31}, y_6 = x_{32}, y_7 = x_{33}$. Khi đó, phân cực hóa của I trong vành đa thức $S = K[y_1, y_2, \dots, y_7]$ là

$$I^{\text{pol}} = \langle y_1y_3y_4, y_1y_2y_3y_5, y_1y_5y_6y_7 \rangle,$$

là một ideal đơn thức không chính phương.

Phân cực hoá là một công cụ rất hữu hiệu và được đề cập nhiều trong luận văn này, đặc biệt là từ các bổ đề sau.

1.2.20 Bổ đề. *Cho J là một ideal đơn thức sao cho J^{pol} là ideal phủ của đồ thị G . Nếu G là phân tách đỉnh được thì J là Koszul.*

1.2.21 Bổ đề ([12, Lemma 3.4]). *Cho G là một đồ thị và giả sử rằng $\{z_1, \dots, z_m\} \subseteq V_G$. Đặt $\Psi_0 = G$,*

$$\Psi_i = \Psi_{i-1} \setminus z_i \text{ and } \Omega_i = \Psi_{i-1} \setminus N_{\Psi_{i-1}}[z_i] \text{ for } 1 \leq i \leq m.$$

Giả sử rằng,

- (a) z_i là một đỉnh tách của Ψ_{i-1} cho tất cả $1 \leq i \leq m$,
- (b) Ω_i là phân tách đỉnh được cho tất cả $1 \leq i \leq m$, và
- (c) Ψ_m là một phân tách đỉnh được.

Khi đó, G là phân tách đỉnh được.

CHƯƠNG 2

LŨY THỪA HÌNH THỨC CỦA IDEAN PHỦ CỦA ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT KOSZUL

2.1 Lũy thừa hình thức của idean phủ của đồ thị với tính chất Koszul

Trong mục này, ta trình bày chứng minh kết quả trong tài liệu tham khảo chính tại Định lý 2.1.10 rằng khi thêm các nhánh vào một phủ chu trình của một đồ thị ta được một đồ thị mới với tính chất đặc biệt là tất cả lũy thừa hình thức của idean phủ của nó là Koszul.

Trước hết, ta trình bày các cách xây dựng sau được dùng để phân cực hoá các lũy thừa hình thức của idean phủ của một đồ thị thành các idean phủ của đồ thị mới đạt được bằng cách gấp đôi đỉnh và cạnh của đồ thị cho trước.

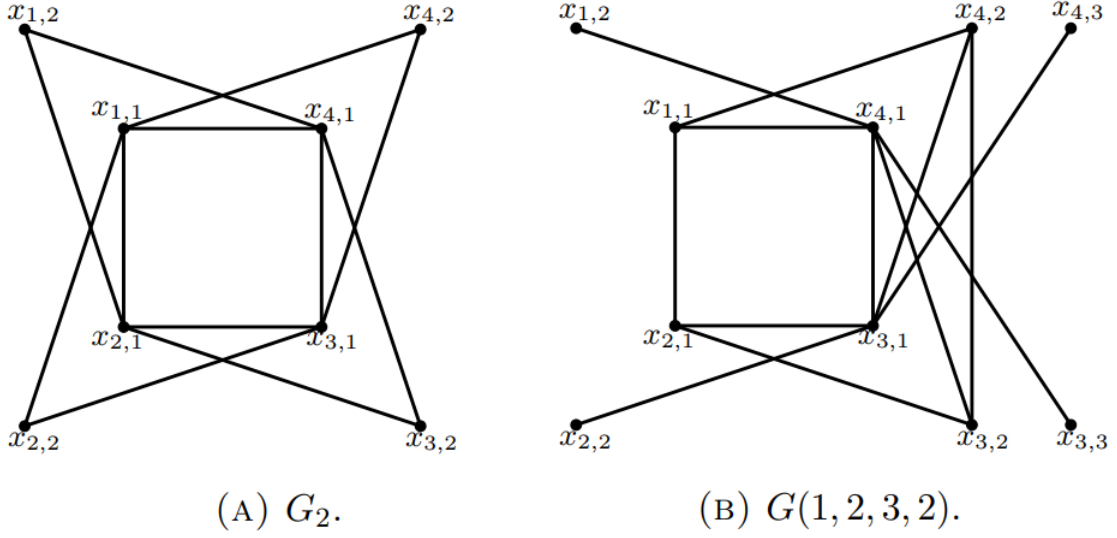
2.1.1 Định nghĩa (Nhân đôi các đỉnh). Cho G là một đồ thị trên tập đỉnh $V_G = \{x_1, \dots, x_n\}$ và cho $k \geq 1$ là một số nguyên. Ta xây dựng một đồ thị mới G_k có tập đỉnh và tập cạnh cho bởi như sau:

$$V_{G_k} = \{x_{i,p} \mid 1 \leq i \leq n \text{ và } 1 \leq p \leq k\}, \text{ và}$$

$$E_{G_k} = \{\{x_{i,p}, x_{j,q}\} \mid \{x_i, x_j\} \in E(G) \text{ và } p + q \leq k + 1\}.$$

Trong xây dựng như tại 2.1.1, ta gọi các $x_{i,p}$ là *cái bóng* của x_i . Ta suy ra từ [13, Lemma 3.4] rằng phân cực của $J(G)^{(k)}$ chính là idean phủ của G_k .

2.1.2 Định nghĩa (Nhân đôi các cạnh). Cho G là một đồ thị đơn với tập đỉnh $V_G = \{x_1, \dots, x_n\}$ và tập cạnh $E_G = \{e_1, \dots, e_m\}$.



Hình 2.1: Xây dựng G_k và $G(k_1, \dots, k_m)$

1. Cho $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ và xét cạnh tùy ý $e = \{x_i, x_j\}$ trong G . Đặt

$$V(e(r)) = \{x_{k,p} \mid k \in \{i, j\} \text{ và } 1 \leq p \leq r\}, \text{ và}$$

$$E(e(r)) = \{\{x_{i,p}, x_{j,q}\} \mid p + q \leq r + 1\}.$$

2. Cho một thứ tự $(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, xây dựng một đồ thị mới $G(k_1, \dots, k_m)$ có tập đỉnh và tập cạnh được cho bởi:

$$V_{G(k_1, \dots, k_m)} = \bigcup_{i=1}^m V(e_i(k_i)), \text{ và}$$

$$E_{G(k_1, \dots, k_m)} = \bigcup_{i=1}^m E(e_i(k_i)).$$

Trong xây dựng như tại 2.1.2, ta gọi các $x_{i,p}$ là *cái bóng* của x_i và các cạnh trong $E(e_i(k_i))$ là *cái bóng* của e_i . Ta thấy rằng $G_k = G(\underbrace{k, \dots, k}_{m \text{ lần}})$. Đặc biệt, với mọi $k \geq 1$, ta có

$$\left(J(G)^{(k)} \right)^{\text{pol}} = J(G(\underbrace{k, \dots, k}_{m \text{ lần}})). \quad (2.1)$$

2.1.3 Ví dụ. Cho đồ thị $G = C_4$ với tập cạnh $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ với $i = 1, 2, 3$ và $e_4 = \{x_1, x_4\}$. Khi đó đồ thị như mô tả trong Hình 2.1 thể hiện sự khác nhau trong các cách xây dựng ở 2.1.1 và 2.1.2.

Một vài bổ đề tiếp theo là sự phù hợp của các mệnh đề tương tự cho đồ thị trùng lặp đỉnh G_k từ [12] thành đồ thị trùng lặp cạnh $G(k_1, \dots, k_m)$.

2.1.4 Bổ đề (So sánh với [12, Lemma 3.2]). *Cho H là một đồ thị trên tập đỉnh $V_H = \{x_1, \dots, x_n\}$ với $m - 1$ cạnh $e_1, \dots, e_{m-1}$. Cho $G = H \cup W(x_1)$ và đặt $e_m = \{x_1, y_1\}$ là nhánh mới tại x_1 trong G . Cho $G(k_1, \dots, k_m)$ được xây dựng như trong Định nghĩa 2.1.2, với bộ $(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$ nào đó. Cho $\{x_{1,p}, y_{1,q}\}$ là các cái bóng của $\{x_1, y_1\}$, với $p + q \leq k_m + 1$. Khi đó, với mọi $i = 1, \dots, k_m$, $x_{1,i}$ là một đỉnh tách của $G(k_1, \dots, k_m) \setminus \{x_{1,1}, \dots, x_{1,i-1}\}$.*

Chứng minh. Bởi xây dựng như trên, với mọi $i = 1, \dots, k_m$ ta có

$$N_{G(k_1, \dots, k_m) \setminus \{x_{1,1}, \dots, x_{1,i-1}\}}(y_{1, k_m - (i-1)}) = \{x_{1,j} \mid j + k_m - (i-1) \leq k_m + 1\} = \{x_{1,i}\}.$$

Điều này suy ra rằng $y_{1, k_m - (i-1)}$ là một đỉnh đơn hình của $G(k_1, \dots, k_m) \setminus \{x_{1,1}, \dots, x_{1,i-1}\}$. Suy ra từ [15, Corollary 7] rằng $x_{1,i}$ là một đỉnh tách của $G(k_1, \dots, k_m) \setminus \{x_{1,1}, \dots, x_{1,i-1}\}$. $\square$

2.1.5 Bổ đề (Đối sánh với [12, Lemma 3.3]). *Cho G là một đồ thị với m cạnh và cho $G(k_1, \dots, k_m)$ được xây dựng như trong Định nghĩa 2.1.2, với bộ $(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$ nào đó. Cho x_i là một đỉnh trong G và giả sử rằng x_i là thuộc với một cạnh e_t , với $1 \leq t \leq m$.*

1. Nếu $k_t \leq k$ thì

$$G(k_1, \dots, k_m) \setminus \{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\} \simeq (G \setminus e_t)(k'_1, \dots, k'_{t-1}, 0, k'_{t+1}, \dots, k'_m) \cup \{\text{các đỉnh cô lập}\}.$$

2. Nếu $k_t > k$ thì

$$G(k_1, \dots, k_m) \setminus \{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\} \simeq G(k'_1, \dots, k'_{t-1}, k_t - k, k'_{t+1}, \dots, k'_m) \cup \{\text{các đỉnh cô lập}\}.$$

Ở đây, $k'_i \leq k_i$ với mọi $i = 1, \dots, m$, và $k'_l = \max\{0, k_l - k\}$ cho mọi cạnh e_l liên thuộc với x_i .

Chứng minh. Lưu ý rằng cái xoá của $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\}$ từ $G(k_1, \dots, k_m)$ chỉ ảnh hưởng tới việc lập các cạnh liên thuộc tới x_i và các cái bóng của các đỉnh của chúng. Xét một cạnh như thế $e_l = \{x_i, x_j\}$.

Nếu $k_l \leq k$ thì việc loại bỏ $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\}$ từ $G(k_1, \dots, k_m)$ cũng có nghĩa là loại bỏ tất cả các cái bóng của x_i như được giới thiệu trong quá trình nhân đôi cạnh e_l ở trên (bởi một nhân tử k_l). Do đó, không có cái nhân đôi của e_l còn tồn tại trong $G(k_1, \dots, k_m) \setminus \{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\}$. Đặc biệt, khi $k_t \leq k$, loại bỏ $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\}$ từ $G(k_1, \dots, k_m)$ cho ta một cái nhân đôi của đồ thị $G \setminus e_t$. Hơn nữa, cái xoá của $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\}$ từ $G(k_1, \dots, k_m)$ cũng đưa ra các cái bóng $x_{j,q}$ của x_j , nếu $q > k_u$ với mọi cạnh e_u liên thuộc với x_j , là các đỉnh cô lập trong $G(k_1, \dots, k_m) \setminus \{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\}$.

Mặt khác, nếu $k_l > k$ thì loại bỏ $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\}$ từ $G(k_1, \dots, k_m)$ có cùng ảnh hưởng như việc nhân đôi e_l bởi một nhân tử $k'_l = k_l - k$ thay cho k_l , sau khi đánh lại nhân $x_{i,k+1}, \dots, x_{i,k_l}$ thành $x_{i,1}, \dots, x_{i,k_l-k}$, và có thể thêm một số cái bóng cô lập của x_j (các cái bóng là $x_{j,q}$ nếu $q > k_u$ với mọi cạnh e_u liên thuộc tới x_j). Đặc biệt, mệnh đề lúc $k_t > k$ được chứng minh. $\square$

Như là một hệ quả trực tiếp của Bổ đề 2.1.5, ta có hệ quả sau.

2.1.6 Hệ quả. Cho G là một đồ thị với m cạnh $e_1, \dots, e_m$. Cho x_i là một đỉnh trong G .

1. Nếu $k_l \leq k$ cho mọi cạnh e_l liên thuộc với x_i thì

$$G(k_1, \dots, k_m) \setminus \{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\} \simeq (G \setminus x_i)(k'_1, \dots, k'_m) \cup \{\text{các đỉnh cô lập}\},$$

trong đó $k'_i \leq k_i$ với mọi i .

2. $G(k_1, \dots, k_m) \setminus N_{G(k_1, \dots, k_m)}[x_i] \simeq (G \setminus N_G[x_i])(k'_1, \dots, k'_m) \cup \{x_{i,2}, \dots, x_{i,k_\alpha}\}$
trong đó $\alpha = \max\{k_l \mid e_l \text{ liên thuộc với } x_i\}$.

Chứng minh. (1) Suy ra từ Bổ đề 2.1.5 rằng việc loại bỏ $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,k}\}$ từ $G(k_1, \dots, k_m)$ sẽ xoá tất cả các cái bóng của x_i được giới thiệu trong quá trình

nhân đôi e_l với mọi cạnh e_l liên thuộc với x_i . Đặc biệt, tất cả cái bóng của các cạnh như e_l đều được xoá. Mệnh đề được suy ra ngay lập tức.

(2) Nhận thấy rằng, $N_{G(k_1, \dots, k_m)}[x_{i,1}]$ bao gồm $x_{i,1}$ cùng với $\{x_{j,1}, \dots, x_{j,k_l}\}$, đối với tất cả các cạnh $e_l = \{x_i, x_j\}$ liên thuộc với x_i . Mệnh đề suy ra bằng việc áp dụng chứng minh của Bổ đề 2.1.5 một cách lặp lại. $\square$

Định lý sau cho ta một phát biểu tổng quát hơn kết quả trong Định lý 2.1.10. Cho G là đồ thị và S là phủ chu trình cho trước của G . Ta nói rằng một bộ các số không âm $(k_1, \dots, k_m)$, trong đó m là số các cạnh trọng $G \cup W(S)$, thoả mãn *điều kiện* $(\star)$ nếu với mọi đỉnh $x \in S$, số cái bong của các rẽ nhánh tại x trong đồ thị $(G \cup W(S))(k_1, \dots, k_m)$ là lớn hơn hoặc bằng cái của các cạnh tới x trong G . Tức là, nếu k_i biểu diễn số các cái bóng của nhánh tại x và k_j là số các cái bóng của các cạnh khác liên thuộc tới x trong G , từ Định nghĩa trên về xây dựng $(G \cup W(S))(k_1, \dots, k_m)$, thì $k_i \geq k_j$. Một tình huống đặc biệt cần quan tâm khi điều kiện này đúng, đó là khi $k_1 = \dots = k_m$.

2.1.7 Định lí. *Cho G là một đồ thị và cho S là một phủ chu trình của G . Với mọi bộ các số nguyên không âm $(k_1, \dots, k_m)$, trong đó m là số các cạnh trong $G \cup W(S)$, thoả mãn điều kiện $(\star)$, đồ thị $(G \cup W(S))(k_1, \dots, k_m)$ là phân tách đỉnh được.*

Chứng minh. Ta sử dụng quy nạp trên số $c(G)$ của các chu trình trong G . Nếu $c(G) = 0$ thì G là một rừng và kết luận được suy ra từ [8, Theorem 3.3]. Giả sử rằng $c(G) \geq 1$. Đặt $G' = G \cup W(S)$ và $H = G'(k_1, \dots, k_m)$.

Ta áp dụng Bổ đề 1.2.21 để chứng minh rằng H là phân tách đỉnh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $x_1 \in S$ và x_1 thuộc một chu trình trong G . Đặt $z_i = x_{1,i}$, với $i = 1, \dots, k$. Cho $\Psi_0 = H$, $\Psi_i = \Psi_{i-1} \setminus z_i$ và $\Omega_i = \Psi_{i-1} \setminus N_{\Psi_{i-1}}[z_i]$, với $i = 1, \dots, k$.

Từ Bổ đề 2.1.4, ta suy ra rằng z_i là một đỉnh tách của Ψ_{i-1} . Bằng việc đánh số lại, nếu cần thiết, chúng ta có thể giả sử rằng $e_1, \dots, e_\gamma$, với $\gamma \leq \ell$, là các cạnh của các chu trình trong G liên thuộc tới x_1 và nhánh tại x_1 . Bằng việc áp

dùng Bổ đề 2.1.5 một cách lặp lại, ta có

$$\Psi_k = H \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \cong (G' \setminus \{e_1, \dots, e_\gamma\})(k'_1, \dots, k'_m) \cup \{\text{các đỉnh cô lập}\},$$

trong đó $k'_l \leq k_l$ với mọi $l = 1, \dots, m$. Nhận thấy rằng

$$G' \setminus \{e_1, \dots, e_\gamma\} = (G \setminus \{e_1, \dots, e_\gamma\}) \cup \{\text{một đỉnh cô lập}\} \cup W(S \setminus x_1)$$

và rõ ràng rằng $c(G \setminus \{e_1, \dots, e_\gamma\}) < c(G)$. Do đó, bởi giả thiết quy nạp, Ψ_k là phân tách đỉnh được.

Sử dụng Bổ đề 1.2.21, ta chỉ cần chỉ ra rằng Ω_i là phân tách đỉnh được cho tất cả $i = 1, \dots, k$. Cụ thể, từ $N_H(z_j) \subset N_H(z_i)$ với $i \leq j$, ta có

$$\begin{aligned} \Omega_i &= H \setminus (\{z_1, \dots, z_{i-1}\} \cup N_H[z_i]) \\ &= (G' \setminus x_1)(k''_1, \dots, k''_m) \cup \{z_{i+1}, \dots, z_k, \text{các đỉnh cô lập khác}\}, \end{aligned}$$

trong đó $k''_l \leq k_l$ với mọi $l = 1, \dots, m$. Hơn nữa,

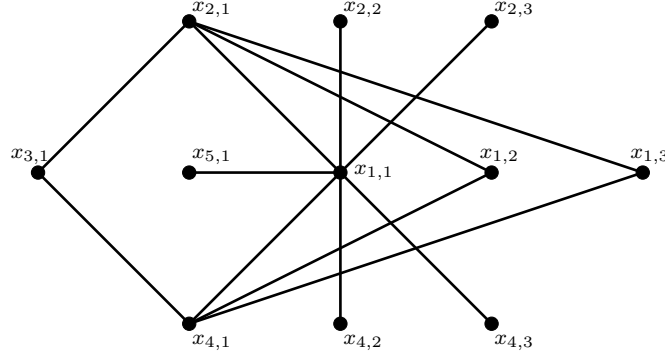
$$G' \setminus x_1 = (G \setminus x_1) \cup \{\text{một đỉnh cô lập}\} \cup W(S \setminus x_1)$$

và rõ ràng $c(G \setminus x_1) < c(G)$. Do đó, bởi giả thiết quy nạp, Ω_i là phân tách đỉnh được với mọi $i = 1, \dots, k$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Như là một hệ quả của Định lý 2.1.7, ta đạt được một kết quả tổng quát hơn của [8, Theorem 4.3].

2.1.8 Hệ quả. *Cho G là một đồ thị chứa chu trình duy nhất trên m cạnh, với chu trình duy nhất $C = (x_1, \dots, x_{\ell-1})$ và ít nhất một nhánh nối với C . Giả sử rằng $E_C = \{e_1, \dots, e_{\ell-1}\}$, trong đó $e_j = \{x_j, x_{j+1}\}$ với $j = 1, \dots, \ell - 2$ và $e_{\ell-1} = \{x_{\ell-1}, x_1\}$, và một nhánh nối với C là $e_\ell = \{x_1, x_\ell\}$. Khi đó, với mọi bộ các số nguyên không âm $(k_1, \dots, k_m)$ sao cho $k_\ell \geq k_i$, với mọi $1 \leq i \leq m$, đồ thị $G(k_1, \dots, k_m)$ là phân tách đỉnh được.*

Chứng minh. Ta thấy rằng $S = \{x_1\}$ là một phủ chu trình của G . Điều phải chứng minh được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.1.7. $\square$



Hình 2.2: $(G \cup W(S))(3, 1, 1, 3, 1)$ không là phân tách đỉnh được.

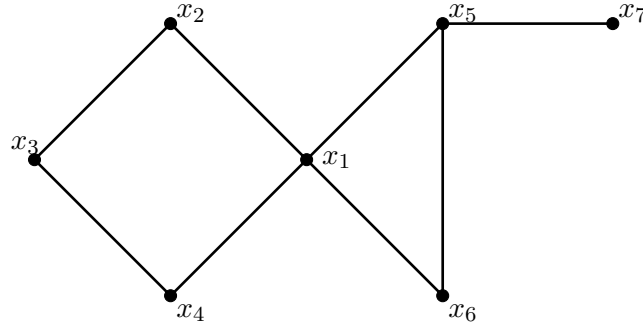
2.1.9 Ví dụ. Điều kiện $(\star)$ trên bộ số $(k_1, \dots, k_m)$ trong Định lý 2.1.7 và Hệ quả 2.1.8 có thể được nới lỏng nhưng không bị loại bỏ hoàn toàn. Xét $G = C_4$. Khi đó $G \cup W(x_1)$ có một nhánh tại x_1 và thỏa mãn điều kiện phủ chu trình của Định lý 2.1.7. Tuy nhiên, với $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ với $i = 1, 2, 3$, $e_4 = \{x_1, x_4\}$, và $e_5 = \{x_1, x_5\}$ chúng ta có thể dễ dàng kiểm chứng rằng $(G \cup W(x_1))(3, 1, 1, 3, 1)$, như được mô tả trong Hình 2.2, không là phân tách đỉnh được. Điều này là bởi vì $x_{1,1}$ là đỉnh tách duy nhất trong $(G \cup W(x_1))(3, 1, 1, 3, 1)$, và $(G \cup W(x_1))(3, 1, 1, 3, 1) \setminus x_{1,1}$ không chứa đỉnh tách nào.

2.1.10 Định lý. Cho G là một đồ thị và cho S là một phủ chu trình của G . Cho H là một đồ thị đạt được bởi việc thêm ít nhất một nhánh tại mỗi đỉnh trong S và cho J là ideal phủ của nó. Khi đó, $J^{(k)}$ là Koszul với mọi $k \geq 1$.

Chứng minh. Lưu ý rằng một phủ chu trình của G vẫn là một phủ chu trình sau khi thêm các nhánh vào các đỉnh trong G . Do đó, ta chỉ cần chứng minh định lý cho trường hợp $H = G \cup W(S)$. Cho m là số các cạnh của H . Bởi Định lý 2.1.7, với mọi $k \geq 1$, $H_k = H(\underbrace{k, \dots, k}_{m \text{ lần}})$ là phân tách đỉnh được. Điều này cùng với (2.1) và Bổ đề 1.2.20, suy ra $J^{(k)}$ là Koszul với mọi $k \geq 1$. $\square$

Định lý 2.1.10 có thể không nhất thiết đúng nếu S không là phủ chu trình của G . Trong ví dụ sau đây, đồ thị xác định tại Hình 2.3 cho ta một ví dụ như thế.

2.1.11 Ví dụ. Điều kiện S là một phủ chu trình của G là cần thiết trong Định lý 2.1.10. Cho G là đồ thị "cá" (một chu trình 4 đỉnh và một chu trình 3 đỉnh gắn một đỉnh) như trong Hình 2.3. Cho $S = \{x_5\}$. Khi đó S không là một phủ chu trình của G . Bằng tính toán, người ta chỉ ra được rằng $(G \cup W(S))_2$ không là phân tách đỉnh được; tức là $J(G \cup W(S))^{(2)}$ không là Koszul. Lưu ý rằng $G \cup W(S)$ là phân tách đỉnh được trong trường hợp này.

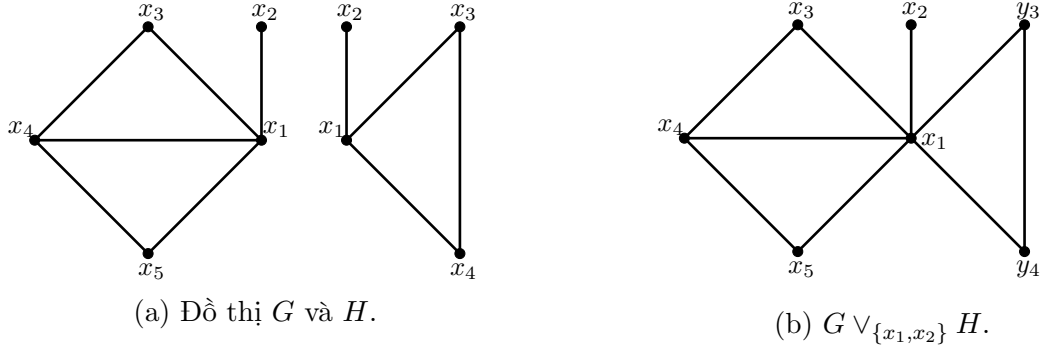


Hình 2.3: $(G \cup W(S))_2$ không là phân tách đỉnh được khi S không là một phủ chu trình.

2.2 Thêm nhánh vào một đồ thị và Đồ thị sao đầy đủ

Một nhánh có thể xem như là một đồ thị đầy đủ trên 2 đỉnh. Mục này trình bày một số kết quả trong tài liệu tham khảo chính về đồ thị sao đầy đủ và việc thêm nhánh vào một đồ thị.

2.2.1 Định nghĩa. Cho G và H là các đồ thị trên tập đỉnh $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, và cho $e = \{x_i, x_j\}$ là một cạnh chung của G và H . Ta xây dựng phép *dán của G và H dọc theo e* , ký hiệu bởi $G \vee_e H$, như sau. Cho H' là một ảnh đẳng cấu của G trên tập đỉnh $V' = \{y_1, \dots, y_n\}$. Khi đó, $G \vee_e H$ đạt được từ hợp rời $G \cup H'$ bằng việc đồng nhất x_i với y_i và x_j với y_j , một cách tương ứng.



Hình 2.4: Dán G và H dọc theo cạnh $e = \{x_1, x_2\}$.

2.2.2 Ví dụ. Cho G và H là các đồ thị được mô tả như trong Hình 2.4a và cho $e = \{x_1, x_2\}$. Hình 2.4b minh họa cho việc dán G với H dọc theo cạnh e .

Nhắc lại rằng, một cạnh của đồ thị G được gọi là một *lá* nếu một đỉnh cuối của nó có bậc 1. Nếu $e = \{x, y\}$ là một lá của G , trong đó $\deg_G(y) = 1$, thì ta gọi y là một *đỉnh lá* của G .

2.2.3 Định lí. Cho G và H là các đồ thị trên cùng một tập đỉnh với các tập cạnh là $\{e, e_2, \dots, e_r\}$ và $\{e, e'_2, \dots, e'_s\}$, trong đó $e = \{x_u, x_v\}$ là một lá chung của G và H (với x_v là đỉnh lá). Giả sử rằng với $(\ell, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ và $(\ell, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$, trong đó $\ell \geq k_i$ và $\ell \geq h_j$ với mọi i và j , cái bóng $\{x_{u,1}, \dots, x_{u,\ell}\}$ của x_u trong $G(\ell, k_2, \dots, k_r)$ và $H(\ell, h_2, \dots, h_s)$ thỏa mãn các điều kiện của Bổ đề 1.2.21. Khi đó, cái bóng $\{x_{u,1}, \dots, x_{u,\ell}\}$ của x_u trong $(G \vee_e H)(\ell, k_2, \dots, k_r, h_2, \dots, h_s)$ cũng thỏa mãn các điều kiện của Bổ đề 1.2.21. Đặc biệt, $(G \vee_e H)(\ell, k_2, \dots, k_r, h_2, \dots, h_s)$ là phân tách đỉnh.

Chứng minh. Tương ứng với Bổ đề 1.2.21, khẳng định sau được suy ra từ. Để chứng minh mệnh đề đầu, cho $K = G \vee_e H$ và $A = \{x_{u,1}, \dots, x_{u,\ell}\}$. Đặt

$$\Psi_0 = K(\ell, k_2, \dots, k_r, h_2, \dots, h_s), \Psi'_0 = G(\ell, k_2, \dots, k_r) \text{ và } \Psi''_0 = H(\ell, h_2, \dots, h_s).$$

Hơn nữa, với $1 \leq i \leq \ell$, đặt

$$\begin{aligned}\Psi_i &= \Psi_{i-1} \setminus x_{u,i}, \quad \Omega_i = \Psi_{i-1} \setminus N_{\Psi_{i-1}}[x_{u,i}], \\ \Psi'_i &= \Psi'_{i-1} \setminus x_{u,i}, \quad \Omega'_i = \Psi'_{i-1} \setminus N_{\Psi'_{i-1}}[x_{u,i}], \\ \Psi''_i &= \Psi''_{i-1} \setminus x_{u,i}, \quad \Omega''_i = \Psi''_{i-1} \setminus N_{\Psi''_{i-1}}[x_{u,i}].\end{aligned}$$

Lưu ý rằng, từ $\ell \geq k_i$ và $\ell \geq h_j$ với mọi i và j , bởi Hệ quả 2.1.6 ta có $\Psi_\ell = \Psi'_\ell \cup \Psi''_\ell$. Do đó, Ψ_ℓ là phân tách đỉnh được bởi giả thiết. Hơn nữa, từ $N_\bullet(x_{u,p}) \subseteq N_\bullet(x_{u,q})$ với mọi $p \geq q$, trong đó $N_\bullet$ có thể là $N_{K(\ell, k_2, \dots, k_r, h_2, \dots, h_s)}$, $N_{G(\ell, k_2, \dots, k_r)}$ hoặc $N_{H(\ell, h_2, \dots, h_s)}$, ta suy ra rằng với mọi $1 \leq i \leq \ell$, ta có

$$\Omega_i = \Omega'_i \cup \Omega''_i \cup \{\text{đỉnh cô lập}\}.$$

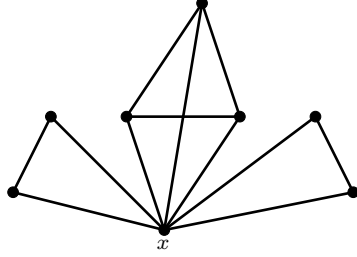
Điều này, bởi giả thiết quy nạp, suy ra rằng Ω_i , với $1 \leq i \leq \ell$, là phân tách đỉnh được.

Còn lại, ta cần phải chứng minh rằng $x_{u,i}$ là một đỉnh rơi của Ψ_{i-1} với mọi $1 \leq i \leq \ell$. Thật vậy, xét tập độc lập tùy ý T trong $\Omega_i = \Psi_{i-1} \setminus N_{\Psi_{i-1}}[x_{u,i}]$, và đặt $U = T \cap \Omega'_i$ và $W = T \cap \Omega''_i$. Như nhậ xét ở trên, $\Omega_i = \Omega'_i \cup \Omega''_i$, và cho nên U và W là các tập độc lập trong Ω'_i và Ω''_i , một cách tương ứng. Bởi giả thiết, $x_{u,i}$ là một đỉnh rơi của Ψ'_{i-1} . Đặt biệt, U không là tập độc lập tối đại trong $\Psi'_i = \Psi'_{i-1} \setminus x_{u,i}$. Suy ra có một tập độc lập U' trong Ψ'_i chứa thực sự U . Đặt $T' = U' \cup W$. Khi đó, T' chứa thực sự T . Ta có thể thấy rằng, từ $N_\bullet(x_{u,j}) \subseteq N_\bullet(x_{u,i})$ với tất cả $j \geq i$, không đỉnh nào của $\Omega''_i = \Psi''_{i-1} \setminus N_{\Psi''_{i-1}}[x_{u,i}]$ liên kết với mọi đỉnh trong Ψ'_i . Do đó, T' là một tập độc lập của Ψ_i . Do đó, $x_{u,i}$ là một đỉnh rơi của Ψ_{i-1} . Định lý được chứng minh. $\square$

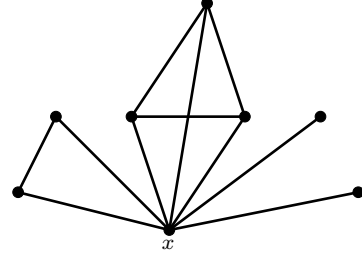
2.2.4 Định nghĩa (Xem [12]). Một *đồ thị sao đầy đủ* là một đồ thị đạt được bằng việc gắn các đồ thị đầy đủ tại cùng một đỉnh. Một đồ thị sao đầy đủ được gọi là *thuần túy* nếu tất cả các clique tối đại chứa ít nhất 3 đỉnh (tức là, nó không có các nhánh); ngược lại thì đồ thị sao đầy đủ được gọi là *không thuần túy*.

2.2.5 Ví dụ. Hình 2.5 biểu diễn ví dụ về đồ thị sao đầy đủ thuần túy và không thuần túy. Đồ thị trong Hình 2.5a là đầy đủ như ta thấy tất cả các clique tối

đại có nhiều hơn 3 đỉnh. Mặt khác, đồ thị trong Hình 2.5b có hai nhánh dính vào đỉnh x .



(a) Đồ thị sao đầy đủ thuần túy.



(b) Đồ thị sao đầy đủ không thuần túy.

Hình 2.5: Các đồ thị sao đầy đủ thuần túy và không thuần túy.

2.2.6 Định lý. Cho G là một đồ thị và cho S là một phủ chu trình của G . Giả sử H là đồ thị đạt được bằng việc gắn một đồ thị sao không đầy đủ vào mỗi đỉnh trong S . Khi đó, với tất cả $k \geq 1$, đồ thị $H_k = H(k, \dots, k)$ là phân tách đỉnh được. Đặc biệt, $J(H)^{(k)}$ là Koszul với mọi $k \geq 1$.

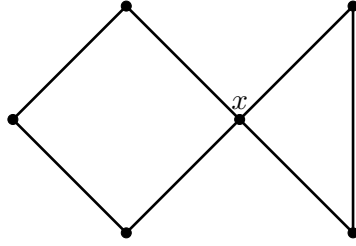
Chứng minh. Khẳng định thứ hai suy ra từ khẳng định đầu tiên kết hợp với Bổ đề 1.2.20 và (2.1). Ta cần chứng minh H_k là phân tách đỉnh được với mọi $k \geq 1$.

Với mỗi đỉnh $x \in S$, ký hiệu $\mathbb{K}(x)$ là đồ thị sao đầy đủ được gắn với x trong xây dựng H , xóa tất cả các nhánh tại x . Đặt $S' = \{x \in S \mid \mathbb{K}(x) \neq \emptyset\}$. Cho G' là đồ thị đạt được từ G bằng cách thêm các nhánh tại các đỉnh trong S trong xây dựng của H . Nói cách khác, G' đạt được từ H bằng việc loại bỏ $\mathbb{K}(x)$ với $x \in S'$. Rõ ràng, $H = G' \cup (\bigcup_{x \in S'} \mathbb{K}(x))$.

Bởi Định lý 2.1.7, G'_k là phân tách đỉnh được. Bằng quy nạp trên $|S'|$, để chứng minh H_k là phân tách đỉnh được, ta chỉ cần xét trường hợp $|S'| = 1$. Trong trường hợp này, gọi z là đỉnh trong S' và e là một nhánh tại z trong G' . Đặt $\mathbb{K} = \mathbb{K}(z) \cup \{e\}$. Khi đó, $H = G' \vee_e \mathbb{K}$.

Nhận thấy rằng, bởi chứng minh của [12, Trường hợp 1 của Định lý 3.7], các cái bóng của z trong $\mathbb{K}_k$ thỏa mãn các điều kiện của Bổ đề 1.2.21. Mặt khác, bởi chứng minh của Định lý 2.1.7, các cái bóng của z trong $(G')_k$ thỏa mãn các

điều kiện của Bổ đề 1.2.21. Do đó, kết luận của định lý suy ra từ Định lý 2.2.3 bằng việc dán G' và $\mathbb{K}$ dọc theo cạnh e . $\square$



Hình 2.6: Thêm các đồ thị sao đầy đủ vào một phủ chu trình.

2.2.7 Ví dụ. Điều kiện các đồ thị sao đầy đủ không thuần túy được gắn vào các đỉnh của một phủ chu trình trong Định lý 2.2.6 không thể bỏ đi được. Xét một 4-chu trình C_4 và một trong các đỉnh của nó, giả sử là x . Rõ ràng rằng, $S = \{x\}$ là một phủ chu trình của C_4 . Gọi G là đồ thị đạt được bằng cách thêm một tam giác gắn vào x : xem Hình 2.6. Khi đó, G là đồ thị "cá" như mô tả trong Hình 2.3. Tính toán chỉ ra rằng G_2 là không phân tác đỉnh được.

KẾT LUẬN

Trên cơ sở trình bày lại một số kết quả trong tài liệu tham khảo chính [4], luận văn đã hoàn thành được các nội dung sau:

1. Trình bày các khái niệm, tính chất về đồ thị, ideal phủ của đồ thị cùng với một số ví dụ minh họa.
2. Trình bày khái niệm về lũy thừa hình thức của ideal cạnh của đồ thị.
3. Trình bày một số chứng minh về tính chất Koszul của lũy thừa hình thức của ideal phủ của đồ thị.
4. Trình bày khái niệm và một số ví dụ về đồ thị sao đầy đủ, đồ thị phân tách đỉnh được và một số tính chất liên quan việc thêm nhánh vào các đỉnh của đồ thị.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Danh mục tài liệu tham khảo của luận văn gồm các tài liệu sau, trong đó tài liệu chính là [4]

TIẾNG VIỆT

- [1] Phan Trúc Lâm (2020), *Chỉ số chính quy của lũy thừa hình thức của ideal phân của đồ thị*, Luận văn thạc sĩ Toán học, Trường Đại học Vinh.

TIẾNG ANH

- [2] A. Dochtermann and A. Engström (2009), *Algebraic properties of edge ideals via combinatorial topology*. Electron. J. Combin., 16 (2, Special volume in honor of Anders Björner):Research Paper 2, 24.
- [3] L. X. Dung, T. T. Hien, H. D. Nguyen, and T. N. Trung (2021), *Regularity and koszul property of symbolic powers of monomial ideals*, Mathematische Zeitschrift volume 298, pages1487–1522.
- [4] Yan Gu, Huy Tai Ha, And Joseph W. Skelton (2021), *Symbolic powers of cover ideals of graphs and Koszul property*, International Journal of Algebra and ComputationVol. 31, No. 05, pp. 865-881.
- [5] J. Herzog and T. Hibi (1999), *Componentwise linear ideals*. Nagoya Math. J., 153:141–153.
- [6] J. Herzog and T. Hibi (2011), *Monomial ideals*, volume 260 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, Ltd., London.
- [7] J. Herzog and S. Iyengar (2005), *Koszul modules*. J. Pure Appl. Algebra, 201(1-3):154–188.

- [8] A. Kumar and R. Kumar (2020), Symbolic powers of cover ideals of certain graphs. *arXiv:2005.08576*.
- [9] H. D. Nguyen, P. D. Thieu, and T. Vu (2015), *Koszul determinantal rings and $2 \times e$ matrices of linear forms*. Michigan Math. J., 64(2):349–381.
- [10] S. B. Priddy (1970), *Koszul resolutions*. Trans. Amer. Math. Soc., 152:39–60.
- [11] T. Römer (2001), On minimal graded free resolutions. *Ph.D. dissertation, University of Essen*.
- [12] S. Selvaraja (2020), *Symbolic powers of vertex cover ideals*, International Journal of Algebra and Computation Vol. 30, No. 06, pp. 1167-1183.
- [13] S. A. Seyed Fakhari (2018), Symbolic powers of cover ideal of very well-covered and bipartite graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(1):97–110.
- [14] R. H. Villarreal (1990), *Cohen-Macaulay graphs*. Manuscripta Math., 66(3):277–293.
- [15] R. Woodroffe (2009), *Vertex decomposable graphs and obstructions to shellability*. Proc. Amer. Math. Soc., 137(10):3235–3246.