

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

LÊ MAI PHÁP

VỀ LŨY THỪA HÌNH THỨC
CỦA IDEAN CẠNH NHỊ THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

LÊ MAI PHÁP

VỀ LŨY THỪA HÌNH THỨC
CỦA IDEAN CẠNH NHỊ THỨC

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 8460104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. THIỀU ĐÌNH PHONG

Nghệ An - 2022

MỤC LỤC

Mục lục	1
Mở đầu	2
1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	5
1.1. Một số khái niệm về đồ thị	5
1.2. Idean khởi đầu và cơ sở Gröbner	7
1.3. Lũy thừa hình thức của idean	10
2 LŨY THỪA HÌNH THỨC CỦA IDEAN CẠNH NHỊ THỨC	14
2.1. Idean cạnh nhị thức	14
2.2. Lũy thừa hình thức của idean cạnh nhị thức	16
Kết luận	21
Tài liệu tham khảo	22

MỞ ĐẦU

Gọi $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ là vành đa thức $2n$ biến trên một trường K và G một đồ thị đơn trên tập đỉnh $[n]$ với tập cạnh $E(G)$. Idean cạnh nhị thức của G được tạo ra bởi tập hợp định thức con cấp 2 ứng với chỉ số các cạnh của G từ ma trận các biến

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

được lập chỉ mục bởi các cạnh của G . Nói cách khác,

$$J_G = (x_i y_j - x_j y_i : i < j \text{ và } \{i, j\} \in E(G)).$$

Trong thập kỷ gần đây, một số tính chất của các idean cạnh nhị thức đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Trong [11], các tác giả đã chỉ ra rằng, đối với mọi đồ thị G , idean J_G là một idean căn và các idean nguyên tố tối thiểu được đặc trưng bởi tính chất tổ hợp của đồ thị. Nhiều nhà toán học đã nghiên cứu tính chất Cohen-Macaulay của các idean cạnh nhị thức; và đạt được một số kết quả đáng kể, đặc biệt là về giải tự do của các idean cạnh nhị thức.

Các tính chất và ứng dụng của lũy thừa hình thức là một chủ đề nghiên cứu trong đại số giao hoán trong hơn 40 năm qua. Lũy thừa hình thức và lũy thừa thông thường nói chung không trùng khớp với nhau. Tuy nhiên, có những lớp của các idean thuần nhất trong vành đa thức mà các lũy thừa hình thức và lũy thừa thông thường trùng nhau. Ví dụ: nếu I là cạnh idean của đồ thị, thì

$I^k = I^{(k)}$ với tất cả $k \geq 1$ nếu và chỉ khi đồ thị là đồ thị hai phần. Tổng quát hơn, idêan mặt cực đại $I(\Delta)$ của một phức đơn hình Δ có tính chất $I(\Delta)^k = I(\Delta)^{(k)}$ cho tất cả $k \geq 1$ (tương đương, $I(\Delta)$ là xoắn tự do chuẩn tắc) nếu và chỉ nếu Δ là một phức Mengerian; xem [10, Phần 10.3.4]. Idêan của các định thức con cực đại của một ma trận chung có cùng một tính chất, đó là, các lũy thừa hình thức và lũy thừa thông thường của chúng là trùng nhau [6].

Cho đến nay, phép so sánh giữa lũy thừa hình thức và lũy thừa thông thường đối với các idêan cạnh nhị thức mới chỉ được xem xét trong [12]. Trong Phần 4 của bài báo này, Ohtani đã chứng minh rằng nếu G là một đồ thị đa phần hoàn chỉnh thì $J_G^k = J_G^{(k)}$ với mọi số nguyên $k \geq 1$.

Trong bài báo [8], các tác giả Viviana Ene và Jurgen Herzög đã chứng minh rằng, đối với mọi idêan cạnh nhị thức có cơ sở Gröbner bình phương thì lũy thừa hình thức và lũy thừa thông thường của J_G trùng nhau. Chứng minh dựa trên việc chuyển đẳng thức cho lũy thừa hình thức và lũy thừa thông thường từ idêan khởi đầu sang idêan chính nó.

Trên cơ sở đó chúng tôi chọn đề tài “**Lũy thừa hình thức của idêan cạnh nhị thức**” để trình bày lại chứng minh của định lý và các kết quả đã đề cập ở trên của Viviana Ene và Jurgen Herzög trong tài liệu tham khảo chính [8].

Luận văn bao gồm phần mở đầu, nội dung chính và các tài liệu tham khảo. Trong đó, nội dung của luận văn được chia làm hai chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày các kiến thức cơ sở về đồ thị, idêan khởi đầu, idêan cạnh nhị thức...

Chương 2. Lũy thừa hình thức của idêan cạnh nhị thức Nội dung của chương này là trình bày về Lũy thừa hình thức của idêan cạnh nhị thức trên cơ sở trình bày chứng minh chi tiết một số kết quả của tài liệu tham khảo chính.

Luận văn được thực hiện tại Trường Đại học Vinh với sự hướng dẫn của TS. Thiều Đình Phong. Tác giả xin trân trọng cảm ơn TS. Thiều Đình Phong đã hướng dẫn tác giả tận tình chu đáo. Tác giả xin chân thành cảm ơn các Thầy giáo, Cô giáo của Khoa Toán - Trường Sư phạm thuộc Trường Đại học Vinh đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả nhiệt tình trong suốt thời gian học tập và làm luận văn. Mặc dù đã có nhiều cố gắng song luận văn có thể còn có một số sai sót, tác giả rất mong nhận được các ý kiến góp ý, bổ sung và chỉnh chữa của các Thầy, Cô cùng các bạn học viên.

Nghệ An, tháng 07 năm 2022

Tác giả

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

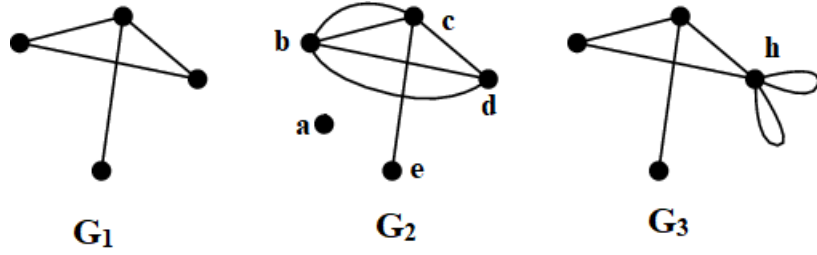
1.1 Một số khái niệm về đồ thị

Nội dung của mục này là trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của đồ thị.

1.1.1 Định nghĩa. Ta gọi G là một *đồ thị* nếu G có một tập đỉnh $V = V(G)$ và một tập cạnh $E = E(G)$ nối các cặp đỉnh (nếu có), kí hiệu $G = (V, E)$.

1. Một đỉnh v của đồ thị G được gọi là *đỉnh cô lập* nếu v không thuộc bất cứ cạnh nào của G .
2. Một cạnh có 2 đỉnh trùng nhau của đồ thị G được gọi là một *khuyên* của đồ thị G .
3. Hai cạnh có cùng chung cặp đỉnh của một đồ thị G được gọi *cạnh kép* của đồ thị G .
4. Đồ thị G không có cạnh kép và không có khuyên được gọi là đồ thị *đơn*.

1.1.2 Ví dụ. Cho các đồ thị G_1, G_2, G_3 như trong Hình 1.1. Khi đó G_1, G_3 không có đỉnh cô lập, tuy nhiên đồ thị G_2 có đỉnh cô lập là đỉnh a vì nó không thuộc bất cứ cạnh nào của G_2 . Đồ thị G_3 có hai khuyên tại đỉnh h ; đồ thị G_2 có cạnh kép là bc, bd . Do đó, ta có đồ thị G_1 là đồ thị đơn trong khi đồ thị G_2, G_3 không phải là đồ thị đơn.

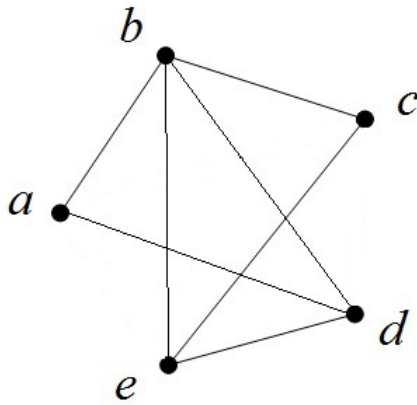


Hình 1.1: Đồ thị G_1, G_2, G_3 .

1.1.3 Định nghĩa. Đồ thị H được gọi là *đồ thị con* của G nếu $V(H) \subseteq V(G)$ và $E(H) \subseteq E(G)$.

Đồ thị H được gọi là *đồ thị con cảm sinh* của G trên tập đỉnh $V(H)$ nếu H là đồ thị con của G và u, v là một cạnh của H khi và chỉ khi $\{u, v\}$ cũng là một cạnh của G .

1.1.4 Ví dụ. Cho đồ thị $G = (V, E)$ xác định như trong Hình 1.2. Khi đó G là một đồ thị đơn. Xét $W = \{a, b, c, d\} \subset V$ là một tập con các đỉnh. Tập hợp các cạnh của đồ thị G chỉ chứa các đỉnh trong W là $E_W = \{ab, bc, ad, bd\}$. Khi đó $G_W = (W, E_W)$ chính là đồ thị con cảm sinh của G trên W .



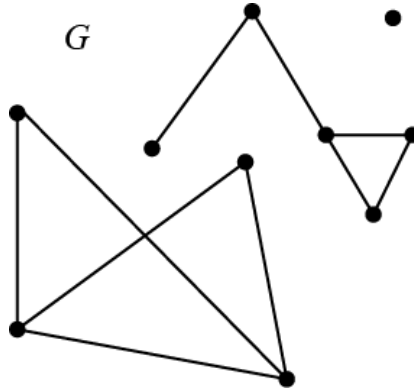
Hình 1.2: Đồ thị G

1.1.5 Định nghĩa. Cho G là một đồ thị với tập đỉnh $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Một *đường đi* trong G là một dãy các đỉnh $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ trong G sao cho $x_{i_j}, x_{i_{j+1}}$, với $1 \leq j \leq k - 1$, là một cạnh của G .

Đồ thị G được gọi là *liên thông* nếu giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của G luôn tồn tại một đường đi chứa chúng. Ngược lại, nếu tồn tại một cặp đỉnh phân biệt của G mà không có đường đi chứa chúng thì G được gọi là *không liên thông*.

Một *thành phần liên thông* của đồ thị G là một đồ thị con liên thông tối đại của G , tức là không được chứa thực sự trong một đồ thị con liên thông khác của G . Đồ thị liên thông khi và chỉ khi nó chỉ có một thành phần liên thông.

1.1.6 Ví dụ. Cho G là đồ thị trong Hình 1.3. Khi đó đồ thị G không liên thông vì không có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt. Cụ thể ở đây là đỉnh cô lập của G . Đồ thị G bao gồm 3 thành phần liên thông. Đỉnh cô lập của G cũng là một thành phần liên thông.



Hình 1.3: Đồ thị có 3 thành phần liên thông.

1.2 Idêan khởi đầu và cơ sở Gröbner

Cho $R = K[x_1, \dots, x_n]$ vành đa thức trên trường K . Tập hợp tất cả các đơn thức thuộc R được ký hiệu $\text{Mon}(R)$.

1.2.1 Định nghĩa. Một thứ tự toàn phần trên tập $\text{Mon}(R)$ được gọi là một *thứ tự đơn thức* $<$ trên R nếu thỏa mãn các tính chất.

1. $1 < u$ với mọi $u \neq 1$, $u \in \text{Mon}(R)$;

2. Nếu $u, v \in \text{Mon}(R)$ và $u < v$, thì với mọi $w \in \text{Mon}(R)$ ta có $uw < vw$.

Một thứ tự đơn thức trên vành đa thức được sử dụng thường xuyên đó là thứ tự từ điển. *Thứ tự từ điển* $<_{\text{lex}}$ trên R cảm sinh bởi thứ tự tự nhiên của các biến $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ được định nghĩa như sau: Với $u = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$, $v = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}$ trong đó $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_k \in [n]$, ta có $u <_{\text{lex}} v \Leftrightarrow x_{i_1} < x_{j_1}$ hoặc $\exists 1 \leq t \leq k-1$ sao cho $x_{i_1} = x_{j_1}, \dots, x_{i_t} = x_{j_t}$ và $x_{i_{t+1}} < x_{j_{t+1}}$.

Thứ tự đơn thức được xét trong luận văn này thứ tự đơn thức cảm sinh bởi thứ tự tự nhiên $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ của các biến.

1.2.2 Định nghĩa. Cho $<$ là một thứ tự đơn thức trên R và $0 \neq f \in R$. *Đơn thức khởi đầu* của f ứng với $<$, ký hiệu bởi $\text{in}_<(f)$, là đơn thức lớn nhất theo thứ tự $<$ giữa tất cả các đơn thức thuộc vào $\text{Supp}(f)$ (tập các đơn thức với hệ số khác 0 xuất hiện trong đa thức f)

Tức là với $f = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m$; $a_i \neq 0, u_i \neq u_j$ là các đơn thức phân biệt. Ta có

$$\text{in}_<(f) = \max \{u_i | u_i \in \text{Supp}(f)\} = \max \{u_i | i = 1, \dots, m\}.$$

Ta có thể kiểm tra trực tiếp được bổ đề sau.

1.2.3 Bổ đề. Cho các đa thức $0 \neq fg \in R$ và đơn thức $u \in \text{Mon}(R)$. Ta có:

1. $\text{in}_<(uf) = u \text{in}_<(f)$.
2. $\text{in}_<(fg) = \text{in}_<(f) \text{in}_<(g)$.

1.2.4 Định nghĩa. Cho $I \subseteq R$ là ideal thuần nhất. Ta định nghĩa *ideal khởi đầu* của I , ký hiệu bởi $\text{in}_<(I)$, là ideal đơn thức trong R sinh bởi tất cả các đơn thức khởi đầu $\text{in}_<(f)$ của các đa thức $0 \neq f \in I$. Tức là

$$\text{in}_<(I) = \langle \text{in}_<(f) | f \in I \rangle.$$

Do I là thuần nhất nên ta cũng có:

$$\text{in}_<(J) = \langle \text{in}_<(f) \mid f \in J \text{ và } f \text{ là thuần nhất} \rangle.$$

1.2.5 Mệnh đề. Cho $<, <'$ là các thứ tự đơn thức trên R và $I, I' \subset R$ là các ideal thuần nhất. Khi đó ta có:

1. Nếu $\text{in}_<(I) \subseteq \text{in}_{<'}(I)$ thì $\text{in}_<(I) = \text{in}_{<'}(I)$.
2. Nếu $I \subseteq I'$ và $\text{in}_<(I) = \text{in}_<(I')$ thì $I = I'$.

1.2.6 Định nghĩa. Cho ideal $0 \neq I \subset R$. Một cơ sở Gröbner của I ứng với thứ tự đơn thức $<$ là một tập hữu hạn các phần tử $g_1, g_2, \dots, g_s \in I$ sao cho ideal khởi đầu $\text{in}_<(J)$ của I sinh bởi $\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s)$, tức là

$$\text{in}_<(I) = \langle \text{in}_<(g_1), \text{in}_<(g_2), \dots, \text{in}_<(g_s) \rangle.$$

1.2.7 Ví dụ. Cho vành đa thức $R = K[x_1, x_2, x_3]$ và ideal

$$I = \langle x_1x_2 + x_3^2, x_1x_3 + x_2x_3 \rangle.$$

Khi đó với $<$ là thứ tự từ điển trên R ta có

$$\text{in}_<(I) = \langle x_1x_2, x_1x_3 \rangle.$$

Do đó hệ sinh $\{x_1x_2 + x_3^2, x_1x_3 + x_2x_3\}$ cũng là một cơ sở Gröbner của I .

1.2.8 Định nghĩa. Cho R là một vành đa thức và I là một ideal thuần nhất trong R . Một cơ sở Gröbner $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ của ideal I được gọi là *bình phương* nếu với mọi i , hệ số của $\text{in}_<(g_i)$ trong $\mathcal{G}$ là 1 và g_i là các đa thức thuần nhất bậc 2.

1.3 Lũy thừa hình thức của idêan

Cho $I \subset R$ là một idêan trong vành Noether R , và ký hiệu $\text{Min}(I)$ là tập các idêan nguyên tố tối tiểu của I . Cho số nguyên $k \geq 1$, lũy thừa hình thức bậc k của I , ký hiệu là $I^{(k)}$, được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} I^{(k)} &= \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(I)} (I^k R_{\mathfrak{p}} \cap R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(I)} \ker(R \rightarrow (R/I^k)_{\mathfrak{p}}) \\ &= \{a \in R : \text{với mọi } \mathfrak{p} \in \text{Min}(I), \text{ tồn tại } w_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p} \text{ với } w_{\mathfrak{p}} a \in I^k\} \\ &= \{a \in R : \text{tồn tại } w \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(I)} \mathfrak{p} \text{ với } wa \in I^k\}. \end{aligned}$$

Bởi định nghĩa của lũy thừa hình thức, ta có $I^k \subseteq I^{(k)}$ for $k \geq 1$. Lũy thừa hình thức nói chung là khác với lũy thừa thông thường của một idêan. Tuy nhiên nếu I là một idêan giao đầy đủ hoặc là idêan định thức sinh bởi các định thức con tối đại của một ma trận tổng quát thì người ta đã chứng minh được rằng $I^k = I^{(k)}$ với $k \geq 1$; xem [6].

Cho $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_m$ là một phân tích nguyên sơ thu gọn của I với $\sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i$ với mọi i . Nếu các idêan nguyên tố tối tiểu của I là $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$, thì

$$I^{(k)} = Q_1^{(k)} \cap \dots \cap Q_s^{(k)}.$$

Đặc biệt, nếu $I \subset R = K[x_1, \dots, x_n]$ là một idêan đơn thức không chính phương trong vành đa thức trên trường K , thì

$$I^{(k)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Min}(I)} \mathfrak{p}^k.$$

1.3.1 Ví dụ. Cho $R = K[x, y, z]$ là vành đa thức 3 biến trên trường K . Xét $I = (x^3, y^2, xyz)$ là một idêan của R . Ta có một phân tích nguyên sơ của I dạng

$$I = (x, y^2) \cap (x^3, y) \cap (x^3, y^2, z)$$

Phân tích này không là phân tích nguyên sơ thu gọn vì $\sqrt{x, y^2} = \sqrt{x^3, y}$.

Một phân tích nguyên sơ khác của I dạng

$$I = (xy, x^3, y^2) \cap (x^3, y^2, z)$$

là một phân tích nguyên sơ thu gọn của I vì

$$\sqrt{(xy, x^3, y^2)} = (x, y) \neq \sqrt{x^3, y^2, z} = (x, y, z).$$

1.3.2 Ví dụ. Cho $R = K[x, y]$ và idêan $I = (xy, z)$. Ta có một phân tích nguyên sơ của I là $I = (x, z) \cap (y, z)$. Do I là idêan đơn thức không chính phương nên ta có

$$I^{(2)} = (x, z)^2 \cap (y, z)^2 = (x^2, xz, z^2) \cap (y^2, yz, z^2) = (x^2y^2, xyz, z^2) = I^2.$$

1.3.3 Định nghĩa. Một idêan $I \subset R$ được gọi là *xoắn tự do chuẩn tắc* nếu

$$\text{Ass}(I^k) \subset \text{Ass}(I), \forall k.$$

1.3.4 Mệnh đề. Cho $I \subset S$ là một idêan đơn thức không chính phương. Khi đó các điều kiện sau tương đương:

(a) I là xoắn tự do chuẩn tắc;

(b) $I^{(k)} = I^k, \forall k$.

Nếu các điều kiện tương đương được thỏa mãn, thì I là một idêan chuẩn tắc.

1.3.5 Ví dụ. Chứng tỏ rằng idêan $I = (xy, xz, yz) \subset K[x, y, z]$, không phải xoắn tự do chuẩn tắc mà là chuẩn tắc.

Trước hết I có biểu diễn thu gọn là $I = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z)$. Khi đó ta có $\text{Min}(I) = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$. Từ $I^{(k)} = \bigcap_{P \in \text{Min}(I)} P^k$, ta cần chứng tỏ:

(a) $\text{Ass}(I^k) \subsetneq \text{Ass}(I)$ và

(b) $I^{(k)} \neq I^k$, với một vài k nào đó.

Do $\text{Min}(I) = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$, ta có $\text{Ass}(I) = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$, mặt khác từ

$$I^2 = (x^2y^2, x^2yz, xy^2z, x^2z^2, xyz^2, y^2z^2).$$

Ta có phân tích nguyên sơ của I^2 là

$$I^2 = (x^2, xy, y^2) \cap (y^2, yz, z^2) \cap (x^2, xz, z^2) \cap (x^2, y^2, z^2).$$

Từ đó

$$\text{Ass}(I^2) = \{(x, y), (x, z), (y, z), (x, y, z)\} \neq \text{Ass}(I).$$

Vậy (a) được chứng minh.

Ngoài ra:

Với $k = 2$: Ta có $I^2 = (x^2y^2, x^2yz, xy^2z, x^2z^2, xyz^2, y^2z^2)$, trong khi đó

$$I^{(2)} = (x^2, xy, y^2) \cap (x^2, xz, z^2) \cap (y^2, yz, z^2) = (x^2y^2, x^2z^2, xyz, y^2z^2).$$

Vì vậy $I^{(2)} \neq I^2$.

Do đó theo mệnh đề trên ta có I không là idêan xoắn tự do chuẩn tắc.

Tiếp theo, ta trình bày khai triển nhị thức của các lũy thừa hình thức. Cho $I \subset R$ và $J \subset R'$ là hai idêan thuần nhất trong vành đa thức R, R' của các tập biến phân biệt trên cùng trường K . Ta viết I, J cho các mở rộng của hai idêan này trong $R \otimes_K R'$. Khi đó, người ta chứng minh được khai triển nhị thức như sau.

1.3.6 Định lí. [9, Theorem 3.4] Với các định nghĩa và ký hiệu như trên, ta có,

$$(I + J)^{(n)} = \sum_{i+j=n} I^{(i)} J^{(j)}.$$

Hơn nữa, ta có tiêu chuẩn sau cho sự bằng nhau giữa lũy thừa hình thức và lũy thừa thông thường của một idêan .

1.3.7 Hệ quả. *[9, Corollary 3.5] Với các khái niệm và ký hiệu ở trên, giả sử rằng $I^t \neq I^{t+1}$ và $J^t \neq J^{t+1}$ với $t \leq n-1$. Khi đó $(I+J)^{(n)} = (I+J)^n$ nếu và chỉ nếu $I^{(t)} = I^t$ và $J^{(t)} = J^t$ cho mọi $t \leq n$.*

CHƯƠNG 2

LŨY THỪA HÌNH THỨC CỦA IDEAN CẠNH NHỊ THỨC

2.1 Idêan cạnh nhị thức

2.1.1 Định nghĩa. Cho G là một đồ thị đơn trên tập các đỉnh $[n]$ với tập cạnh $E(G)$ và cho S là một vành đa thức $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ của $2n$ biến trên trường K . *Idêan cạnh nhị thức* $J_G \subset S$ của G được định nghĩa là idêan

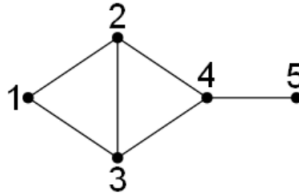
$$J_G = (f_{ij} : i < j, \{i, j\} \in E(G)),$$

trong đó $f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ với $1 \leq i < j \leq n$. Lưu ý rằng f_{ij} chính xác là các định thức tối đại của ma trận chung cấp $2 \times n$ có dạng

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$

Chúng ta thường sử dụng khái niệm $[i, j]$ cho các ma trận con cấp 2 của X xác định bởi các cột i và j .

2.1.2 Ví dụ. Cho đồ thị G như hình vẽ.



Hình 2.1: Đồ thị G .

Khi đó, idêan cạnh nhị thức của G là

$$J_G = (x_1 y_2 - x_2 y_1, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_2 y_3 - x_3 y_2, x_2 y_4 - x_4 y_2, x_3 y_4 - x_4 y_3, x_4 y_5 - x_5 y_4).$$

Xét vành đa thức S cùng với thứ tự từ điển cảm sinh bởi thứ tự tự nhiên của các biến và $\text{in}_<(J_G)$ ký hiệu là idêan khởi đầu của J_G ứng với thứ tự đơn thức này. Bởi [11, Corollary 2.2], J_G là một idêan căn. Các idêan nguyên tố tối tiểu của nó có thể đặc trưng bởi tính chất tổ hợp của đồ thị G . Ta có khái niệm sau:

Cho $\mathcal{S} \subset [n]$ là một tập con (có thể là tập rỗng) của $[n]$, và cho $G_1, \dots, G_{c(\mathcal{S})}$ là các thành phần liên thông của $G_{[n] \setminus \mathcal{S}}$ trong đó $G_{[n] \setminus \mathcal{S}}$ là đồ thị con cảm sinh của G trên tập các đỉnh $[n] \setminus \mathcal{S}$. Với $1 \leq i \leq c(\mathcal{S})$, ký hiệu $\tilde{G}_i$ là đồ thị đầy đủ trên tập các đỉnh $V(G_i)$. Cho

$$P_{\mathcal{S}}(G) = (\{x_i, y_i\}_{i \in \mathcal{S}}) + J_{\tilde{G}_1} + \dots + J_{\tilde{G}_{c(\mathcal{S})}}.$$

Khi đó $P_{\mathcal{S}}(G)$ là một idêan nguyên tố. Do các lũy thừa hình thức của một idêan của các định thức con tối đại của một ma trận chung trùng với lũy thừa thông thường của idêan đó, và bởi Hệ quả 1.3.7, ta có

$$P_{\mathcal{S}}(G)^{(k)} = P_{\mathcal{S}}(G)^k \text{ for } k \geq 1. \quad (2.1)$$

Bởi [11, Theorem 3.2], $J_G = \bigcap_{\mathcal{S} \subset [n]} P_{\mathcal{S}}(G)$. Đặc biệt, các idêan nguyên tố tối tiểu của J_G là idêan nguyên tố tối tiểu của $P_{\mathcal{S}}(G)$ với $\mathcal{S} \subset [n]$. Mệnh đề sau đặc trưng các tập $\mathcal{S}$ trong đó idêan nguyên tố $P_{\mathcal{S}}(G)$ là tối tiểu.

2.1.3 Mệnh đề. [11, Corollary 3.9] $P_{\mathcal{S}}(G)$ là một idêan nguyên tố tối tiểu của J_G nếu và chỉ nếu hoặc $\mathcal{S} = \emptyset$ hoặc $\mathcal{S}$ là khác rỗng và với mỗi $i \in \mathcal{S}$, $c(\mathcal{S} \setminus \{i\}) < c(\mathcal{S})$.

Trong thuật ngữ tổ hợp, đối với một đồ thị liên thông G , $P_{\mathcal{S}}(G)$ là một idêan nguyên tố tối thiểu của J_G nếu và chỉ nếu $\mathcal{S}$ rỗng hoặc $\mathcal{S}$ không rỗng và là một *tập điểm cắt* của G , tức là i là điểm cắt của đồ thị thu hẹp $G_{([n] \setminus \mathcal{S}) \cup \{i\}}$ với mỗi $i \in \mathcal{S}$. Gọi $\mathcal{C}(G)$ là tập hợp tất cả các tập hợp $\mathcal{S} \subset [n]$ sao cho $P_{\mathcal{S}}(G) \in \text{Min}(J_G)$.

Bởi [4, Theorem 3.1] và [4, Corollary 2.12], ta có

$$\text{in}_<(J_G) = \bigcap_{S \in \mathcal{C}(G)} \text{in}_< P_S(G). \quad (2.2)$$

Khi nghiên cứu lũy thừa hình thức của các idêan cạnh nhị thức, ta thường chỉ cần xem xét các đồ thị liên thông. Cho $G = G_1 \cup \dots \cup G_c$ trong đó $G_1, \dots, G_c$ là các thành phần liên thông của G và $J_G \subset S$ là idêan cạnh nhị thức của G . Khi đó ta có thể viết

$$J_G = J_{G_1} + \dots + J_{G_c}$$

trong đó $J_{G_i} \subset S_i = K[x_j, y_j : j \in V(G_i)]$ với $1 \leq i \leq c$. Trong đẳng thức trên, ta sử dụng khái niệm J_{G_i} cho mở rộng của J_{G_i} trong S .

2.1.4 Mệnh đề. *Với các định nghĩa và ký hiệu ở trên, ta có $J_G^k = J_G^{(k)}$ với mọi $k \geq 1$ nếu và chỉ nếu $J_{G_i}^k = J_{G_i}^{(k)}$ với mọi $k \geq 1$.*

Chứng minh. Được suy ra trực tiếp từ Hệ quả 1.3.7. □

2.2 Lũy thừa hình thức của idêan cạnh nhị thức

Trong mục này, chúng ta tìm hiểu việc chuyển sự bằng nhau giữa lũy thừa hình thức và lũy thừa thông thường từ idêan khởi đầu sang idêan chính nó.

Cho $R = K[x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức trên trường K và $I \subset R$ là một idêan thuần nhất. Ta giả sử rằng tồn tại một thứ tự đơn thức $<$ trên R sao cho $\text{in}_<(I)$ là một idêan đơn thức không chính phương. Đặc biệt, ta có I là một idêan căn. Ký hiệu $\text{Min}(I) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s\}$. Khi đó $I = \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{p}_i$.

2.2.1 Bổ đề. *Với các khái niệm và ký hiệu ở trên, ta giả sử rằng các điều kiện sau được thoả mãn:*

$$(i) \text{ in}_<(I) = \bigcap_{i=1}^s \text{in}_<(\mathfrak{p}_i);$$

(ii) Với mỗi số nguyên $t \geq 1$ ta có:

- (a) $\mathfrak{p}_i^{(t)} = \mathfrak{p}_i^t$ for $1 \leq i \leq s$;
- (b) $\text{in}_<(\mathfrak{p}_i^t) = (\text{in}_<(\mathfrak{p}_i))^t$ for $1 \leq i \leq s$;
- (c) $(\text{in}_<(I))^{(t)} = (\text{in}_<(I))^t$.

Khi đó $I^{(t)} = I^t$.

Chứng minh. Với giả thiết như trên, ta có:

$$\begin{aligned}
 \text{in}_<(I^t) &\supseteq (\text{in}_<(I))^t = (\text{in}_<(I))^{(t)} = \bigcap_{i=1}^s (\text{in}_<(\mathfrak{p}_i))^{(t)} \\
 &\supseteq \bigcap_{i=1}^s (\text{in}_<(\mathfrak{p}_i))^t = \bigcap_{i=1}^s \text{in}_<(\mathfrak{p}_i^t) \\
 &\supseteq \text{in}_<\left(\bigcap_{i=1}^s \mathfrak{p}_i^t\right) = \text{in}_<\left(\bigcap_{i=1}^s \mathfrak{p}_i^{(t)}\right) = \text{in}_<(I^{(t)}) \\
 &\supseteq \text{in}_<(I^t).
 \end{aligned}$$

Do đó, suy ra rằng $\text{in}_<(I^{(t)}) = \text{in}_<(I^t)$. Từ $I^t \subseteq I^{(t)}$, ta có $I^t = I^{(t)}$. $\square$

Ta tìm hiểu vấn đề khi nào chúng ta có thể sử dụng bổ đề trên để nghiên cứu lý thừa hình thức của idêan cạnh nhị thức. Lưu ý rằng, bởi (2.2), điều kiện đầu tiên trong Bổ đề 2.2.1 sẽ đúng với mọi idêan cạnh nhị thức J_G . Thêm nữa, như ta thấy từ (2.1), điều kiện (a) trong Bổ đề 2.2.1 là đúng với mọi idêan nguyên tố $P_{\mathcal{S}}(G)$ và mọi số nguyên $t \geq 1$.

2.2.2 Bổ đề. Cho $\mathcal{S} \subset [n]$. Khi đó ta có

$$\text{in}_<(P_{\mathcal{S}}(G)^t) = (\text{in}_<(P_{\mathcal{S}}(G)))^t,$$

với mọi $t \geq 1$.

Chứng minh. Để rút ngắn khái niệm, ta viết P thay cho $P_S(G)$, c thay cho $c(\mathcal{S})$, và J_i thay cho $J_{\tilde{G}_i}$ với $1 \leq i \leq c$.

Cho $\mathcal{R}(P)$, tương ứng $\mathcal{R}(\text{in}_<(P))$ là các đại số Rees của P , tương ứng $\text{in}_<(P)$. Khi đó, từ các tập của các biến $\{x_j, y_j : j \in V(\tilde{G}_i)\}$ là đôi một phân biệt, ta có

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(\{x_i, y_i\}_{i \in \mathcal{S}}) \otimes_K (\otimes_{i=1}^c \mathcal{R}(J_i)). \quad (2.3)$$

Mặt khác, từ

$$\text{in}_<(P) = (\{x_i, y_i\}_{i \in \mathcal{S}}) + \text{in}_<(J_1) + \cdots + \text{in}_<(J_c),$$

và thực tế là $J_1, \dots, J_c$ là các idêan của tập các biến phân biệt từ $\{x_i, y_i\}_{i \in \mathcal{S}}$ (xem [11]), ta đạt được

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\text{in}_<P) &= \mathcal{R}(\{x_i, y_i\}_{i \in \mathcal{S}}) \otimes_K (\otimes_{i=1}^c \mathcal{R}(\text{in}_<J_i)) \\ &= \mathcal{R}(\{x_i, y_i\}_{i \in \mathcal{S}}) \otimes_K (\otimes_{i=1}^c \text{in}_<\mathcal{R}(J_i)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Cho đẳng thức cuối, ta đã sử dụng đẳng thức $\text{in}_<(J_i^t) = (\text{in}_<J_i)^t$, với mọi $t \geq 1$, là một trường hợp đặc biệt của [3, Theorem 2.1] và đẳng thức $\mathcal{R}(\text{in}_<J_i) = \text{in}_<\mathcal{R}(J_i)$ dựa vào [5, Theorem 2.7]. Lưu ý rằng $\mathcal{R}(P)$ và $\text{in}_<(\mathcal{R}(P))$ có cùng hàm Hilbert. Mặt khác, các đẳng thức (2.3) và (2.4) chỉ ra rằng $\mathcal{R}(P)$ và $\mathcal{R}(\text{in}_<P)$ có cùng hàm Hilbert từ $\mathcal{R}(J_i)$ và $\text{in}_<\mathcal{R}(J_i)$ có cùng hàm Hilbert với mọi $1 \leq i \leq s$. Do đó, $\mathcal{R}(\text{in}_<P)$ và $\text{in}_<\mathcal{R}(P)$ có cùng hàm Hilbert. Từ $\mathcal{R}(\text{in}_<P) \subseteq \text{in}_<(\mathcal{R}(P))$, ta có $\mathcal{R}(\text{in}_<P) = \text{in}_<(\mathcal{R}(P))$, điều này suy ra bởi [5, Theorem 2.7] rằng $\text{in}_<(P^t) = (\text{in}_<P)^t$ với mọi t . $\square$

2.2.3 Định lí. Cho G là một đồ thị liên thông trên tập đỉnh $[n]$. Nếu $\text{in}_<(J_G)$ là một idêan xoắn tự do chuẩn tắc, thì $J_G^{(k)} = J_G^k$ với $k \geq 1$.

Chứng minh. Chứng minh định lý là một hệ quả của Bổ đề 2.2.2 kết hợp với các kết quả (2.2) và (2.1). $\square$

Có các idêan cạnh nhị thức sao cho idêan khởi đầu của chúng ứng với thứ tự từ điển là xoắn tự do chuẩn tắc. Ví dụ, các idêan cạnh nhị thức với cơ sở Gröbner bình phương sẽ có idêan khởi đầu là xoắn tự do chuẩn tắc. Chúng được đặc trưng trong [11, Theorem 1.1] và tương ứng với các đồ thị đóng. Trong đó, một đồ thị G được gọi là *đóng* nếu tồn tại một cách đánh số các đỉnh của nó sao cho với mọi cạnh $\{i, k\}$ với $i < k$ và với mọi $i < j < k$, ta có $\{i, j\}, \{j, k\} \in E(G)$. Nếu G là đóng ứng với cách đánh số của nó, thì ứng với thứ tự từ điển $<$ trên S cảm sinh bởi thứ tự tự nhiên của các biến, idêan khởi đầu của J_G là $\text{in}_<(J_G) = (x_i y_j : i < j \text{ and } \{i, j\} \in E(G))$. Điều này suy ra rằng $\text{in}_<(J_G)$ là một idêan cạnh của một đồ thị hai phần, do đó nó là xoắn tự do chuẩn tắc. Do đó ta có như sau.

2.2.4 Hệ quả. *Cho G là một đồ thị đóng trên tập các đỉnh $[n]$. Khi đó $J_G^{(k)} = J_G^k$ với $k \geq 1$.*

Cho C_4 là một chu trình 4 đỉnh với các cạnh $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}$. Giả sử $<$ là thứ tự từ điển trên $K[x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4]$ cảm sinh bởi $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > y_1 > y_2 > y_3 > y_4$. Ứng với thứ tự đơn thức này, ta có

$$\text{in}_<(J_{C_4}) = (x_1 x_4 y_3, x_1 y_2, x_1 y_4, x_2 y_1 y_4, x_2 y_3, x_3 y_4).$$

Cho Δ là một phức đơn hình có idêan mặt tối đạt là $I(\Delta) = \text{in}_<(J_{C_4})$. Khi đó Δ không có chu trình lẻ cụ thể nào, do đó, bởi [10, Theorem 10.3.16], suy ra rằng $I(\Delta)$ là xoắn tự do chuẩn tắc. Lưu ý rằng chu trình 4 đỉnh là một đồ thị hai phần đầy đủ, do đó đẳng thức $J_{C_4}^k = J_{C_4}^{(k)}$ với mọi $k \geq 1$ được suy ra từ [12].

2.2.5 Chú ý. Từ kết quả này, người ta mong muốn rằng các idêan khởi đầu của idêan cạnh nhị thức của các chu trình là xoắn tự do chuẩn tắc. Tuy nhiên, điều này không đúng. Cụ thể, cho C_5 là chu trình 5 đỉnh với các cạnh $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 5\}$ và $I = \text{in}_<(J_{C_5})$ là idêan khởi đầu của J_{C_5}

ứng với thứ tự từ điển trên $K[x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5]$. Bằng cách sử dụng Phần mềm SINGULAR [7], người ta đã kiểm tra được rằng $I^2 \subsetneq I^{(2)}$. Thực tế, đơn thức $x_1^2 x_4 x_5 y_3 y_5 \in I^2$ là một đơn thức sinh tối tiểu của I^2 . Mặt khác, đơn thức $x_1 x_4 x_5 y_3 y_5 \in I^{(2)}$, do đó $I^2 \neq I^{(2)}$, và I là không xoắn chuẩn tắc. Mặt khác, cũng bằng cách sử dụng Phần mềm SINGULAR, người ta đã kiểm tra được rằng $J_{C_5}^2 = J_{C_5}^{(2)}$.

KẾT LUẬN

Luận văn đã hoàn thành được các nội dung sau:

1. Trình bày các khái niệm, tính chất về đồ thị, idêan khởi đầu, cơ sở Gröbner, lũy thừa hình thức của idêan và một số ví dụ minh họa.
2. Trình bày khái niệm và một số ví dụ về idêan cạnh nhị thức của một đồ thị.
3. Trình bày chứng minh một số tính chất về lũy thừa hình thức của idêan cạnh nhị thức của đồ thị.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Danh mục tài liệu tham khảo của luận văn gồm các tài liệu sau, trong đó tài liệu chính là [8]

TIẾNG VIỆT

- [1] Phan Trúc Lâm (2020), *Chỉ số chính quy của lũy thừa hình thức của ideal phủ của đồ thị*, Luận văn thạc sĩ Toán học, Trường Đại học Vinh.
- [2] Trần Ngọc Tuyền (2020), *Chỉ số chính quy của lũy thừa hình thức của ideal cạnh của đồ thị Cameron - Walker*, Luận văn thạc sĩ Toán học, Trường Đại học Vinh.

TIẾNG ANH

- [3] A. Conca (1997), *Gröbner bases of powers of ideals of maximal minors*, J. Pure Appl. Algebra **121**, 223–231.
- [4] A. Conca, E. De Negri, E. Gorla (2018), *Cartwright Sturmfels ideals associated to graphs and linear spaces*, J. Comb. Algebra **2**(3), 231–257.
- [5] A. Conca, J. Herzog, G. Valla (1996), *Sagbi bases with applications to blow-up algebras*, J. Reine Angew. Math. **474**, 113–138.
- [6] C. DeConcini, D. Eisenbud, C. Procesi (1980), *Young diagrams and determinantal varieties*, Invent. Math. **56**(2), 129–165.

- [7] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann (2019), SINGULAR 4-1-2 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [8] Viviana Ene, Jürgen Herzog (2020), *On the symbolic powers of binomial edge ideals*, Combinatorial Structures in Algebra and Geometry (D. Stamate, T. Szemberg, Eds), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 331, Springer, 43-50.
- [9] H. T. Hà, H. D. Nguyen, N. V. Trung, T. N. Trung, *Symbolic powers of sums of ideals*, Math. Z. <https://doi.org/10.1007/s00209-019-02323-8>
- [10] J. Herzog, T. Hibi (2010), *Monomial Ideals*, Grad. Texts in Math. **260**, Springer.
- [11] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdotir, T. Kahle, J. Rauh (2010), *Binomial edge ideals and conditional independence statements*, Adv. Appl. Math. **45**, 317–333.
- [12] M. Ohtani (2013), *Binomial edge ideals of complete multipartite graphs*, Comm. Algebra **41**, no. 10, 3858–3867.