BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐẶNG THỊ VĂN

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TIỆM CẬN NGHIỆM TẠI VÔ HẠN

Chuyên ngành: **ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ**
Mã số: 846 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN HỮU QUANG

Nghệ An - 2022

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Tác giả bày tỏ lòng kính trọng và tri ân sâu sắc tới TS Nguyễn Hữu Quang - thầy giáo hướng dẫn khoa học - đã dành nhiều thời gian và công sức để lựa chọn tài liệu tham khảo và đặt ra đề tài cũng như giúp đỡ cho chúng tôi hoàn thành nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn.

Tác giả cũng được xin gửi lời cảm ơn trân trọng đến các nhà giáo, nhà khoa học thuộc Chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số, Khoa Toán học, Trường Sư phạm - Trường Đại học Vinh đã nhiệt tình giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho chúng tôi hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu.

Xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Ban giám hiệu Trường THPT Ngô Sĩ Liên đã hỗ trợ nhiều về thời gian, tinh thần và vật chất cho chúng tôi để hoàn thành nhiệm vụ học tập sau đại học.

Dù đã hết sức cố gắng đọc, hiểu, suy nghĩ và nghiền ngẫm song việc trình bày một cách chi tiết những nội dung chuyên sâu thuộc về lĩnh vực lý thuyết số một cách chặt chẽ sẽ chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót.

Tác giả rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô giáo và của các bạn học viên lớp sau đại học ngành toán để chúng tôi thu được một bản luận văn hoàn thiện hơn.

Nghệ An, tháng 6 năm 2022

Tác giả

Đặng Thị Văn

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Xét bài toán sau: Tìm điều kiện cần và đủ để hệ sau vô nghiệm

$$(P) \quad \begin{cases} f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0 = 0 \\ g(x) = x^T Bx + 2b^T x + \ b_0 = 0, \end{cases}$$

trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức bậc hai.

Chú ý rằng nếu thay hai phương trình của hệ trên bằng các bất phương trình $f(x) > 0, g(x) \leq 0$ thì bài toán được giải quyết năm 1971. Nếu thay một trong hai phương trình trên bằng một bất phương trình thì gần đây bài toán mới được giải quyết một cách triệt để (năm 2016).

Các câu hỏi dạng trên thu hút được khá nhiều nhà toán học tham gia giải quyết, các kết quả quan trọng về câu hỏi trên được Finsler đưa ra và chứng minh vào năm 1937, Polyak 1998, Beck 2006, Xia Yong 2016. Điều thú vị là cho đến nay bài toán (P), trên vẫn là một câu hỏi mở.

Trong các bài toán dạng trên chúng tôi thấy một trường hợp khá thú vị đó là mặc dù hệ $\{f(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ vô nghiệm, nhưng có một dãy $\{x_n\}$ trong $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ để $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Chúng tôi gọi hệ này có "tiệm cận nghiệm tại vô hạn". Bởi tính thú vị của vấn đề này, chúng tôi chọn đề tài:

Hệ phương trình bậc hai tiệm cận nghiệm tại vô hạn

làm đề tài cho luận văn của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

- Tìm hiểu khái niệm, tính chất và ứng dụng của Phần bù Schur.
- Tìm hiểu các kết quả liên quan đến ma trận bút chì và SD.
- Xác định điều kiện cần và đủ để hệ hai phương trình đa thức bậc hai nhiều biến có nghiệm tại vô hạn.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Đọc và trình bày lại một số kết quả nghiên cứu trong bài báo tiếng Anh liên quan đến các phương trình bậc hai thông qua ma trận bút chì của các tác giả: Yong Hsia, Gang-Xuan Lin và Ruey-Lin Sheu.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Các kết quả liên quan đến ma trận bút chì và SD .
- Hệ tiệm cận nghiệm tại vô hạn.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Tham khảo bài báo [9] của các tác giả Yong Hsia, Gang-Xuan Lin và Ruey-Lin Sheu và tìm hiểu 6 bài báo khác.
- Khai thác các kết quả liên quan đến ma trận bút chì để giải quyết bài toán (P).
- Sử dụng tính chất của Phần bù Schur.

6. Nội dung chính và kết quả mới của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận văn này gồm có hai chương.

Chương 1 trình bày kiến thức chuẩn bị có liên quan đến nội dung chính như: Phân tích suy biến (SVD), Ma trận giả nghịch đảo, Ma trận nửa xác định dương và các tính chất liên quan, chéo hóa một cách đồng thời hai ma trận, Hàm bậc hai nhiều biến.

Chương 2 Hệ tiệm cận nghiệm tại vô hạn.

Chi tiết hóa và làm rõ hơn nhiều nội dung mà trong chứng minh tác giả không trình bày trong bài báo [9] .

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Phân tích suy biến (SVD)

Định lí 1.1.1. *Một ma trận $\mathbf{A}_{m\times n}$ bất kỳ đều có thể phân tích thành dạng:*

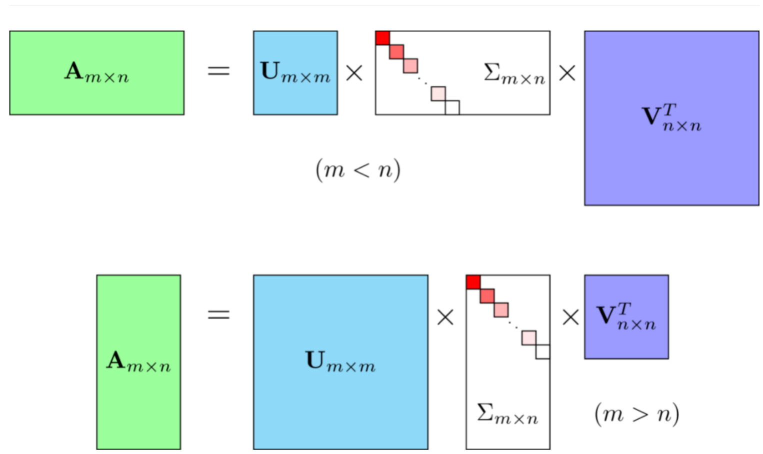
$$\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{U}_{m\times m}\mathbf{\Sigma}_{m\times n}\left(\mathbf{V}_{n\times n}\right)^T. \tag{1.1}$$

Trong đó, $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ là các ma trận trực giao, $\mathbf{\Sigma}$ là ma trận đường chéo (có thể không vuông) với các phần tử trên đường chéo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0 = 0 = \cdots = 0$ và r là hạng của ma trận $\mathbf{A}$.

Nhận xét 1.1.2. Lưu ý rằng mặc dù Σ không phải ma trận vuông, ta vẫn có thể coi nó là ma trận chéo nếu các thành phần khác không của nó chỉ nằm ở vị trí đường chéo, tức tại các vị trí có chỉ số hàng và chỉ số cột là như nhau. Số lượng các phần tử khác 0 trong Σ chính là rank của ma trận $\mathbf{A}$.

Chú ý rằng cách biểu diễn (1.1) không là duy nhất vì ta chỉ cần đổi dấu của cả $\mathbf{U}$ và $\mathbf{V}$ thì (1.1) vẫn thoả mãn. Tuy vậy, người ta vẫn thường dùng 'the SVD' thay vì 'a SVD'.

Hình 1 mô tả SVD của ma trận $\mathbf{A}_{m\times n}$ trong hai trường hợp: $m < n$ và $m > n$. Trường hợp $m = n$ có thể xếp vào một trong hai trường hợp trên.



Hình 1.1:

Tạm bỏ qua chiều của mỗi ma trận, từ (1.1) ta có:

$$AA^T = U\Sigma V^T \left(U\Sigma V^T\right)^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^{-1}. \tag{1.2}$$

Dấu bằng cuối cùng xảy ra vì $V^TV = I$ do V là một ma trận trực giao.

Quan sát thấy rằng $\Sigma\Sigma^T$ là một ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo là $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$.

Vậy (1.2) chính là chéo hóa của AA^T. Thêm nữa, $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ chính là các giá trị riêng của AA^T.

Ma trận AA^T luôn là ma trận nửa xác định dương nên các giá trị riêng của nó là không âm. Các σ_i là căn bậc hai của các trị riêng của AA^T còn được gọi là các giá trị kỳ dị của A. Cái tên Singular Value Decomposition xuất phát từ đây.

Cũng theo đó, mỗi cột của U chính là một vector riêng của AA^T. Ta gọi mỗi cột này là left-singular vectors của A.

Tương tự như thế, $A^TA = V\Sigma^T\Sigma V^T$ và các cột của V còn được gọi là các right-singular vectors của A.

Ví dụ 1.1.3. Cho $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, ta có $M = U \cdot \Sigma \cdot V^{\dagger}$, trong đó

$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

1.2 Ma trận giả nghịch đảo

Định nghĩa 1.2.1. Với $A \in M(m, n)$, ma trận giả nghịch đảo Moore–Penrose (sau đây viết gọn là giả nghịch đảo) của A được định nghĩa là ma trận $A^+ \in M(n, m)$ thỏa mãn cả bốn tính chất sau:

1. $AA^+A = A$;
2. $A^+AA^+ = A^+$;
3. $(AA^+)^T = AA^+$;
4. $(A^+A)^T = A^+A$.

Ví dụ 1.2.2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, dễ thấy rằng $\det(A) = 0$ (không tồn tại ma trận nghịch đảo của A), tuy nhiên giả nghịch đảo của A là

$$A^+ = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Định lí 1.2.3. *Với mỗi ma trận A có duy nhất A^+ thỏa mãn 4 điều kiện của Định nghĩa 1.2.1.*

Mệnh đề 1.2.4. - *Nếu A khả nghịch, thì ma trận nghịch đảo và giả nghịch đảo là một, tức $A^+ = A^{-1}$.*

- *Giả nghịch đảo của ma trận không là chuyển vị của nó.*

- *Giả nghịch đảo của giả nghịch đảo chính là ma trận ban đầu: $(A^+)^+ = A$.*

Định lý sau đây cho ta một cách tính ma trận giả nghịch đảo.

Định lí 1.2.5. - *Nếu $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$, trong đó $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ thì*

$$\Sigma^\dagger = \operatorname{diag}\left(\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_r^{-1}, 0, \ldots, 0\right).$$

- *Nếu phân tích suy biến của A là $U\Sigma V^T$ thì $A^+ = V\Sigma^+U^T$.*

Ví dụ 1.2.6. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, ta có $A^+ = V\Sigma^+U^T$, trong đó

$$U = \begin{bmatrix} 0.333781 & -0.745156 & -0.57735 \\ 0.478433 & 0.66164 & -0.57735 \\ 0.812214 & -0.0835153 & 0.57735 \end{bmatrix}; \ \Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/5.07613 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0.48255 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.480019 & -0.519212 & -0.707107 \\ 0.480019 & -0.519212 & 0.707107 \\ 0.734277 & 0.67885 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3 Ma trận nửa xác định dương và các tính chất liên quan

+ Ma trận đối xứng $A \in S^n$ được gọi là xác định dương nếu

$$x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0. \tag{1.3}$$

+ Ma trận đối xứng $A \in S^n$ được gọi là nửa xác định dương nếu

$$x^T Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

+ A là ma trận xác định dương kí hiệu $A \succ 0$.

+ A là ma trận nửa xác định dương kí hiệu $A \succeq 0$.

Tính chất:

A là ma trận đối xứng, khi đó các mệnh đề sau tương đương

- A là ma trận nửa xác định dương (xác định dương).

- các giá trị riêng của A không âm (đều dương).

-Tồn tại ma trận B sao cho $A = B^T B$ (Tồn tại ma trận vuông không suy biến B sao cho $A = B^T B$).

* Cho $A \succ 0$ khi đó

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow C - B^T A^{-1} B \geq 0. \tag{1.5}$$

1.4 Chéo hóa một cách đồng thời hai ma trận

Định nghĩa 1.4.1. Hai ma trận vuông cùng cấp A, B được gọi là chéo hóa được một cách đồng thời, ký hiệu là SD (Simultaneous Diagonalization), nếu tồn tại ma trận không suy biến P sao cho $P^T AP$ và $P^T BP$ là các ma trận đường chéo.

Ví dụ 1.4.2. Cho $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Khi đó với

$$P := \begin{pmatrix} 3.98 & 194.23 & -0.21 & 0 & 0 & 0 \\ 7.09 & -27.55 & -0.29 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3.98 & 194.22 & -0.21 & -0.45 & -0.89 & 0 \\ -3.98 & -194.22 & 0.21 & -0.89 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ta có

$$P^T AP = \operatorname{diag}(226, 40772, 9, 0, 0, 0), P^T BP = \operatorname{diag}(354, -93111, 7, 6, 1, 0).$$

1.5 Hàm bậc hai nhiều biến

Định nghĩa 1.5.1. Hàm bậc hai n biến là hàm có dạng

$$f(x) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{k}^{n} a_k x_k + a_0, \tag{1.6}$$

trong đó ít nhất một trong các hệ số $a_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., n$ khác 0.

Giả sử $a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, 2, ..., n$

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, \quad a = [a_1, a_2, ..., a_n]^T, \quad x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$$

$$f(x) = x^T A x + 2a^T x + a_0.$$

Nếu hàm bậc hai $f(x)$ bị chặn dưới thì $a_{kk} \geq 0, k = 1, 2, ..., n$, hơn nữa

$$x^T A x + 2a^T x + a_0 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} \succeq 0. \tag{1.7}$$

Định nghĩa 1.5.2 (Tập lồi)**.** Tập $D \subset \mathbb{R}^n$ gọi là tập lồi nếu

$$\forall x, y \in D,\ \lambda \in [0, 1]$$

ta có

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in D.$$

Định nghĩa 1.5.3 (Hàm lồi)**.** + Hàm số f xác định trên tập lồi D được gọi là hàm lồi trên D nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \quad \forall x, y \in D,\ \lambda \in [0, 1]. \tag{1.8}$$

+ Hàm f được gọi là hàm lồi chặt nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \quad \forall x, y \in D,\ \lambda \in (0, 1). \tag{1.9}$$

+ Hàm f là hàm lõm khi $-f$ là hàm lồi.

+ Hàm f là hàm tựa lồi trên A nếu

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \{x \in D | f(x) \leq \lambda\}$$

là một tập lồi.

+ Hàm f gọi là tựa lõm trên D nếu $-f$ là hàm tựa lồi.

Định nghĩa 1.5.4. Các hàm $\lambda f, f+g, max(f,g)$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}
&(\lambda f)(x) := \lambda f(x);\\
&(f+g)(x) := f(x) + g(x);\\
&\max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}.
\end{aligned}$$

Định lí 1.5.5. *Cho f là hàm lồi trên tập lồi A và g là hàm lồi trên tập lồi B. Lúc đó trên $A \cap B$ các hàm sau là lồi*

$$\begin{aligned}
&i)\ \lambda f + \beta g, \quad \forall \lambda, \beta \geq 0,\\
&ii)\ \max(\mathrm{f}, \mathrm{g}).
\end{aligned}$$

Định lí 1.5.6. *Một hàm lồi xác định trên tập lồi A thì liên tục tại mọi điểm trong của A.*

+ Chú ý: Hàm lồi xác định trên tập lồi thì liên tục tại mọi điểm trong, chưa chắc liên tục trên điểm biên.

+ Kí hiệu $f'(a)$ hoặc $\bigtriangledown f(a)$ là đạo hàm của f tại a.

Ví dụ 1.5.7. + Hàm số $y = ax + b$ là hàm lồi.

+ Hàm số $f(x) = a^T x + b$ vừa lồi, vừa lõm.

Hàm $f(x) = trace(A^T X) + b$, trace là hàm số tính tổng các giá trị trên đường chéo của một ma trận vuông A là một ma trận có cùng chiều với X.

+ Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ là hàm lồi nếu $a > 0$ và hàm lõm nếu $a < 0$.

+ Hàm số $f(x) = x^T Ax + b^T x + C$, với A là ma trận đối xứng có số hàng bằng số phần tử của x, $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$, b là ma trận bất kì cùng chiều với x, c là hằng số bất kỳ.

Nếu A là ma trận (nửa) xác định dương thì $f(x)$ là hàm lồi.

Nếu A là ma trận (nửa) xác định âm thì $f(x)$ là hàm lõm.

Chương 2

Hệ tiệm cận nghiệm tại vô hạn

2.1 Phần bù Schur

Chú ý rằng nếu M là ma trận đối xứng thì tồn tại các ma trận đối xứng A, C và ma trận B sao cho

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix},$$

giả sử $\det C \neq 0$ khi đó $A - BC^{-1}B^\top$ được gọi là phần bù Schur của C.

Ta có đẳng thức sau

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BC^{-1}B^\top & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^\top,$$

như một hệ quả, ta có điều kiện để kiểm tra rằng liệu A có xác định dương (nửa xác định dương) hay không.

Mệnh đề 2.1.1. *Giả sử M là một ma trận đối xứng và được viết dưới dạng*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}.$$

Nếu C khả nghịch thì các khẳng định sau đây là đúng:

(1) *$M \succ 0$ nếu và chỉ nếu $C \succ 0$ và $A - BC^{-1}B^\top \succ 0$.*

(2) *Giả sử $C \succ 0$ thì $M \succeq 0$ nếu và chỉ nếu $A - BC^{-1}B^\top \succeq 0$.*

Chứng minh (1) Để ý rằng

$$\begin{pmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

và ta biết rằng mọi ma trận đối xứng, T, và mọi ma trận khả nghịch, N, ma trận T là xác định dương ($T \succ 0$) nếu và chỉ nếu $NTN^\top$ (tất nhiên ma trận này cũng là đối xứng) là xác định dương $\left(NTN^\top \succ 0\right)$. Hơn nữa, một ma trận khối là xác định dương nếu và chỉ nếu mỗi khối là xác định dương, điều phải chứng minh.

(2) Nó được suy ra từ tính chất mọi ma trận đối xứng, T, và mọi ma trận khả nghịch, N, ma trận T là nửa xác định dương ($T \succeq 0$) nếu và chỉ nếu $NTN^\top$ là nửa xác định dương ($NTN^\top \succeq 0$). □

Một phiên bản khác của Mệnh đề 2.1.1 là sử dụng phần bù Schur của A thay vì phần bù Schur của C. Chứng minh tương tự mệnh đề trên.

Mệnh đề 2.1.2. *Giả sử M là một ma trận đối xứng và được viết dưới dạng*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}.$$

Nếu A is khả nghịch thì các khẳng định sau là đúng:

(1) $M \succ 0$ nếu và chỉ nếu $A \succ 0$ và $C - B^\top A^{-1}B \succ 0$.

(2) Giả sử $A \succ 0$, thì $M \succeq 0$ nếu và chỉ nếu $C - B^\top A^{-1}B \succeq 0$.

Sau đây là một minh họa việc áp dụng Mệnh đề 2.1.2 (2). Xét ràng buộc sau

$$(Ax+b)^\top(Ax+b) \leq c^\top x + d, \tag{2.1}$$

trong đó $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), x, b, c \in \mathbb{R}^n$ và $d \in \mathbb{R}$. Vì rõ ràng $I = I_n$ là khả nghịch và $I \succ 0$, ta có

$$\begin{pmatrix} I & Ax+b \\ (Ax+b)^\top & c^\top x + d \end{pmatrix} \succeq 0 \tag{2.2}$$

nếu và chỉ nếu $c^\top x + d - (Ax+b)^\top(Ax+b) \succeq 0$, nếu và chỉ nếu $(Ax+b)^\top(Ax+b) \leq c^\top x + d$, vì ma trận $c^\top x + d - (Ax+b)^\top(Ax+b)$ là phần bù Schur của I trong ma trận trên. Vậy ta đã chuyển được ràng buộc không tuyến tính 2.1 về ràng buộc tuyến tính của các ma trận đối xứng 2.2.

Khi ma trận C là suy biến (hoặc A là suy biến), ta vẫn có thể đưa ra đặc trưng cho ma trận đối xứng , M, như trên là nửa xác định dương, nhưng phải dùng một phiên bản khác của phần bù Schur liên quan đến ma trận giả nghịch đảo của C, nó là $A - BC^\dagger B^\top$ (hoặc phần bù Schur $C - B^\top A^\dagger B$, của A). Nhưng trước tiên ta cần làm rõ khi một hàm bậc hai dạng $\frac{1}{2}x^\top Px + x^\top b$ có giá trị nhỏ nhất, trong đó P là một ma trận đối xứng. Ta viết lại vấn đề này như sau

$$\text{minimize } f(x) = \frac{1}{2}x^\top Px + x^\top b,$$

nó sẽ không có nghiệm trừ khi P và b thỏa mãn một số điều kiện nhất định.

Mệnh đề 2.1.3. *Nếu P là một ma trận đối xứng khả nghịch, thì hàm số*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Px + x^\top b$$

có giá trị nhỏ nhất nếu và chỉ nếu $P \succeq 0$, khi đó nó đạt giá trị nhỏ nhất tại $x^* = -P^{-1}b$, và giá trị nhỏ nhất của f là

$$f\left(-P^{-1}b\right) = -\frac{1}{2}b^\top P^{-1}b.$$

Chứng minh. Để ý rằng

$$\frac{1}{2}\left(x + P^{-1}b\right)^\top P\left(x + P^{-1}b\right) = \frac{1}{2}x^\top Px + x^\top b + \frac{1}{2}b^\top P^{-1}b.$$

Do đó,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Px + x^\top b = \frac{1}{2}\left(x + P^{-1}b\right)^\top P\left(x + P^{-1}b\right) - \frac{1}{2}b^\top P^{-1}b.$$

Nếu P có giá trị riêng âm, giả sử nó là $-\lambda$ (với $\lambda > 0$), ta lấy bất kỳ một giá trị riêng, u, của P tương ứng với $-\lambda$, khi đó mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ với $\alpha \neq 0$, ta lấy $x = \alpha u - P^{-1}b$, bởi $Pu = -\lambda u$ ta có

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(x + P^{-1}b\right)^\top P\left(x + P^{-1}b\right) - \frac{1}{2}b^\top P^{-1}b \\
&= \frac{1}{2}\alpha u^\top P\alpha u - \frac{1}{2}b^\top P^{-1}b \\
&= -\frac{1}{2}\alpha^2\lambda\|u\|_2^2 - \frac{1}{2}b^\top P^{-1}b.
\end{aligned}$$

Vì α có thể lấy lớn tùy ý và $\lambda > 0$, ta thấy ngay rằng f không bị chặn dưới. Và do đó, để f có giá trị nhỏ nhất, ta phải có $P \succeq 0$. Với trường hợp này, vì $\left(x + P^{-1}b\right)^\top P\left(x + P^{-1}b\right) \geq 0$, rõ ràng giá trị nhỏ nhất của f đạt được khi $x + P^{-1}b = 0$, nghĩa là, $x = -P^{-1}b$.

Mệnh đề 2.1.4. *Nếu P là một ma trận đối xứng, khi đó hàm*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Px + x^\top b$$

có giá trị nhỏ nhất nếu và chỉ nếu $P \succeq 0$ và $\left(I - PP^\dagger\right) b = 0$, trong trường hợp này giá trị nhỏ nhất của f là

$$p^* = -\frac{1}{2}b^\top P^\dagger b.$$

Hơn nữa, nếu $P = U^\top \Sigma U$ là một phân tích SVD của P, khi đó giá trị nhỏ nhất đạt tại mọi $x \in \mathbb{R}^n$ dạng

$$x = -P^\dagger b + U^\top \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix},$$

với mọi $z \in \mathbb{R}^{n-r}$, trong đó r là hạng của P.

Chứng minh Trường hợp P là khả nghịch đã được thảo luận ở Mệnh đề 2.1.3 do đó, ta giả sử rằng P là suy biến. Nếu P có hạng $r < n$, thì ta có thể chéo hóa P như sau

$$P = U^\top \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U,$$

trong đó U là một ma trận trực giao và Σ_r là một $r \times r$ ma trận đường chéo khả nghịch. Tiếp theo, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^\top U^\top \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Ux + x^\top U^\top Ub \\ &= \frac{1}{2}(Ux)^\top \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Ux + (Ux)^\top Ub. \end{aligned}$$

Nếu ta viết $Ux = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ và $Ub = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, với $y, c \in \mathbb{R}^r$ và $z, d \in \mathbb{R}^{n-r}$, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(Ux)^\top \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Ux + (Ux)^\top Ub \\ &= \frac{1}{2}\left(y^\top z^\top\right) \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \left(y^\top z^\top\right) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} y^\top \Sigma_r y + y^\top c + z^\top d \end{aligned}$$

Với $y = 0$, ta có

$$f(x) = z^\top d$$

do đó nếu $d \neq 0$, hàm f không bị chặn dưới. Do đó, nếu f có giá trị nhỏ nhất, thì $d = 0$. Tuy nhiên, $d = 0$ có nghĩa là $Ub = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ và ta biết rằng b thuộc range$P$, điều này tương đương với $\left(I - PP^\dagger\right) b = 0$. Nếu $d = 0$ thì

$$f(x) = \frac{1}{2} y^\top \Sigma_r y + y^\top c.$$

Xét hàm số $g : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$g(y) = \frac{1}{2} y^\top \Sigma_r y + y^\top c, \quad y \in \mathbb{R}^r.$$

Vì

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = U^\top x$$

và $U^\top$ là khả nghịch (nó là nghịch đảo của U), khi x thay đổi trên toàn bộ $\mathbb{R}^n, y$ cũng thay đổi trên toàn bộ $\mathbb{R}^r$, và vì $f(x) = g(y)$, hàm số f đạt giá trị nhỏ nhất nếu và chỉ nếu g đạt giá trị nhỏ nhất. Vì Σ_r là khả nghịch, bởi Mệnh đề 2.1.3, hàm số g đạt giá trị nhỏ nhất nếu và chỉ nếu $\Sigma_r \succeq 0$, điều này tương đương với $P \succeq 0$.

Do đó, ta đã chứng minh được rằng nếu f đạt giá trị nhỏ nhất thì $\left(I - PP^{\dagger}\right) b = 0$ và $P \succeq 0$. Ngược lại, nếu $\left(I - PP^{\dagger}\right) b = 0$, thì

$$Ub = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

do đó

$$f(x) = g(y) = \frac{1}{2} y^{\top} \Sigma_r y + y^{\top} c,$$

và bởi vì $P \succeq 0$, ta cũng có $\Sigma_r \succeq 0$, do đó g và f đạt giá trị nhỏ nhất.

Khi các điều kiên trên được thỏa mãn, vì

$$P = U^{\top} \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U$$

là nửa xác định dương, ma trận giả nghịch đảo $P^{\dagger}$ của P được cho bởi

$$P^{\dagger} = U^{\top} \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U$$

và vì

$$f(x) = g(y) = \frac{1}{2} y^{\top} \Sigma_r y + y^{\top} c,$$

bởi Mệnh đề 2.1.3 giá trị nhỏ nhất của g đạt được nếu và chỉ nếu $y^* = -\Sigma_r^{-1} c$. Vì $f(x)$ là độc lập đối với z, ta có thể chọn $z = 0$, và vì $d = 0$, với x^* cho bởi

$$Ux^* = \begin{pmatrix} -\Sigma_r^{-1} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad Ub = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

ta suy ra rằng

$$x^* = U^\top \begin{pmatrix} -\Sigma_r^{-1} c \\ 0 \end{pmatrix} = U^\top \begin{pmatrix} -\Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \\ U^\top \begin{pmatrix} -\Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U b = -P^\dagger b. \tag{2.3}$$

và giá trị nhỏ nhất của f là

$$f\left(x^*\right) = \frac{1}{2}\left(-P^\dagger b\right)^\top P\left(-P^\dagger b\right) + b^\top\left(-P^\dagger b\right) = b^\top P^\dagger P P^\dagger b - b^\top P^\dagger b = -\frac{1}{2} b^\top P^\dagger b,$$

vì $P^\dagger$ là đối xứng và $P^\dagger P P^\dagger = P^\dagger$. Với bất kỳ $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$x = -P^\dagger b + U^\top \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}^{n-r},$$

vì

$$x = -P^\dagger b + U^\top \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} = U^\top \begin{pmatrix} -\Sigma_r^{-1} c \\ 0 \end{pmatrix} + U^\top \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} = U^\top \begin{pmatrix} -\Sigma_r^{-1} c \\ z \end{pmatrix},$$

và vì $f(x)$ là độc lập đối với z (vì $f(x) = g(y)$), ta có

$$f(x) = f\left(x^*\right) = -\frac{1}{2} b^\top P^\dagger b,$$

điều phải chứng minh. $\square$

Bây giờ chúng ta quy lại với vấn đề tìm đặc trưng để ma trận đối xứng, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}$, là nửa xác định dương. Do đó, chúng ta cần biết khi nào thì

$$f(x, y) = \left(x^\top y^\top\right) \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^\top A x + 2x^\top B y + y^\top C y$$

có giá trị nhỏ nhất với ẩn x và y. Cố định y như là hằng số, Mệnh đề 2.1.4 suy ra rằng $f(x,y)$ có giá trị nhỏ nhất nếu và chỉ nếu $A \succeq 0$ và $\left(I - AA^{\dagger}\right) By = 0$ và do đó, giá trị nhỏ nhất là

$$f\left(x^{*}, y\right) = -y^{\top} B^{\top} A^{\dagger} By + y^{\top} Cy = y^{\top}\left(C - B^{\top} A^{\dagger} B\right) y.$$

Vì chúng ta cần $f(x,y)$ bị chặn dưới với mọi x, y, ta phải có $\left(I - AA^{\dagger}\right) B = 0$. Bây giờ, $f\left(x^{*}, y\right)$ có giá trị nhỏ nhất nếu và chỉ nếu $C - B^{\top} A^{\dagger} B \succeq 0$. Do đó, ta đã chứng minh rằng $f(x,y)$ có giá trị nhỏ nhất với ẩn x, y nếu và chỉ nếu

$$A \succeq 0, \quad \left(I - AA^{\dagger}\right) B = 0, \quad C - B^{\top} A^{\dagger} B \succeq 0.$$

Kết quả tương tự sẽ đạt được khi ta cố định x, kết hợp chúng lại ta có kết quả sau.

Định lí 2.1.5. *Cho trước một ma trận đối xứng,* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\top} & C \end{pmatrix}$*, các khẳng định sau là tương:*

(1) $M \succeq 0$ *(M là nửa xác định dương).*

(2) $A \succeq 0, \quad \left(I - AA^{\dagger}\right) B = 0, \quad C - B^{\top} A^{\dagger} B \succeq 0.$

(3) $C \succeq 0, \quad \left(I - CC^{\dagger}\right) B^{\top} = 0, \quad A - BC^{\dagger} B^{\top} \succeq 0.$

Nếu $M \succeq 0$ như trong Định lý 2.1.5, thì ta dễ dàng kiểm tra rằng phân tích nhân tử sau (sử dụng tính chất $A^{\dagger} A A^{\dagger} = A^{\dagger}$ và $C^{\dagger} C C^{\dagger} = C^{\dagger}$):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\top} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BC^{\dagger} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BC^{\dagger} B^{\top} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C^{\dagger} B^{\top} & I \end{pmatrix}$$

và

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\top} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{\top} A^{\dagger} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^{\top} A^{\dagger} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{\dagger} B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

2.2 Các kết quả liên quan đến ma trận bút chì và SD

Với các ma trận đối xứng A, B, ta ký hiệu

$$
\begin{aligned}
I_{\succ}(A,B) &:= \{\sigma \in \mathbb{R} \mid A + \sigma B \succ 0\}, &(2.4)\\
I_{\succeq}(A,B) &:= \{\sigma \in \mathbb{R} \mid A + \sigma B \succeq 0\}, &(2.5)\\
II_{\succ}(A,B) &:= \left\{(\mu,\sigma) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu A + \sigma B \succ 0\right\}, &(2.6)\\
II_{\succeq}(A,B) &:= \left\{(\mu,\sigma) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu A + \sigma B \succeq 0\right\}, &(2.7)\\
Q(A) &:= \left\{v \mid v^T A v = 0\right\}, &(2.8)\\
N(A) &:= \{v \mid Av = 0\}. &(2.9)
\end{aligned}
$$

Các ký hiệu $I_{\succ}(A,B), I_{\succeq}(A,B), II_{\succ}(A,B), II_{\succeq}(A,B)$ được gọi chung là các ma trận bút chì.

Ta có kết quả sau nói điều kiện khác rỗng của $I_{\succeq}(A,B)$.

Định lí 2.2.1 ([9]). *Nếu $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận đối xứng và B là không xác định, thì $I_{\succeq}(A,B) \neq \emptyset$ nếu và chỉ nếu*

$$w^T A w \geq 0, \forall w \in Q(B). \tag{2.10}$$

Chứng minh ($\Longrightarrow$): là hiển nhiên.

($\Longleftarrow$): Ta lập hai tập như sau

$$F_1 = \left\{t \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}^n, x^T(-B)x \geq 0 \Rightarrow x^T A(t) x \geq 0\right\},$$
$$F_2 = \left\{t \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}^n, x^T B x \geq 0 \Rightarrow x^T A(t) x \geq 0\right\}$$

trong đó $A(t) = A + tB$. Nếu tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $t_0 \in F_1 \cap F_2$, thì $A(t_0)$ là nửa xác định dương, do đó những gì ta cần chứng minh là phần giao của F_1 và F_2 là khác rỗng.

Rõ ràng 2.10 suy ra rằng, với mọi $t \in \mathbb{R}$,

$$x^T Bx = 0 \Rightarrow x^T A(t)x \geq 0, \tag{2.11}$$

ta có $E(t) \subset C \cup D$, ở đây 3 tập được xác định bởi $E(t) = \left\{x \in R^n \mid x^T A(t)x < 0\right\}, C = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Bx > 0\right\}, D = \left\{x \in R^n \mid x^T Bx < 0\right\}$.

Tập $E(t)$ có nhiều nhất 2 thành phần liên thông, cả hai đối xứng với nhau qua gốc tọa độ; các tập C và D, hợp lại là không liên thông, chúng cũng đối xứng với nhau qua gốc tọa độ. Vì bất kỳ thành phần liên thông nào của $E(t)$ đều phải chứa trong C hoặc trong D, do đó, bởi tính đối xứng, $E(t)$ phải nằm trong C hoặc trong D với mọi $t \in \mathbb{R}$. Một cách tương đương, t thuộc vào hợp của F_1 và F_2 với mọi $t \in \mathbb{R}$, nghĩa là, $F_1 \cup F_2 = \mathbb{R}$.

Vì B không xác định, nên tồn tại $x_1 \in \mathbb{R}^n$ sao cho $x_1^T Bx_1 < 0$. Với giá trị đủ lớn $t_1, x_1^T A(t_1) x_1 < 0$ đạt được nên F_2 là không rỗng ($t_1 \in F_2$). Hơn nữa, với lý do tương tự ta có F_1 là khác rỗng.

Vì $A(t)$ là liên tục, cả hai F_1 và F_2 là hai tập đóng khác rỗng, và chúng có giao khác rỗng khi $F_1 \cup F_2 = \mathbb{R}$. Điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng, giả thiết B là không xác định ở Định lý 2.2.1 là cần thiết.

Ví dụ 2.2.2. Với

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng thấy rằng nếu $x^T Bx = 0$ thì $x = (0, x_2, x_3)^T$, và $x^T Ax \geq 0$. Nhưng với $M = A + tB$, ta có $m_{33} = 0$ và $m_{31} = 1$. Do đó, với mọi $t \in \mathbb{R}, M$ không thể là nửa xác định dương.

Định lí 2.2.3 ([4])**.** *Nếu $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận đối xứng thì $I_{\succ}(A, B) \neq \emptyset$ nếu và chỉ nếu*

$$w^T Aw > 0, \forall w \in Q(B), w \neq 0. \tag{2.12}$$

Hơn nữa, $II_{\succ}(A, B) \neq \emptyset$ suy ra rằng

$$Q(A) \cap Q(B) = \{0\}, \tag{2.13}$$

nó cũng là điều kiện đủ nếu $n \geq 3$.

Chứng minh. Vì điều kiện đủ là hiển nhiên, chúng ta chỉ cần chứng minh điều kiện cần. Nếu B hoặc $-B$ là nửa xác định dương, thì tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^T AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad P^T BP = \begin{pmatrix} \pm I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dễ dàng thấy rằng $(Px)^T B(Px) = 0$ suy ra véc tơ khác không $x = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$ sao cho $u^T A_{22} u > 0$; nghĩa là, A_{22} là xác định dương. Do đó tồn tại số dương đủ lớn t sao cho hoặc $A + tB$ hoặc $A - tB$ là xác định dương (điều này suy ra từ các Mệnh đề 2.1.1, 2.1.2 về phần bù Schur).

Mặt khác, nếu ta giả sử rằng B là không xác định, từ giả thiết (2.12), vấn đề sau

$$\varepsilon_0 = \min\left\{x^T Ax \mid x^T Bx = 0, \|x\|_2 = 1, x \in \mathbb{R}^n\right\} \tag{2.14}$$

có bị chặn dưới là 0. Vì $\left\{x \mid x^T B x = 0, \|x\|_2 = 1\right\}$ là một tập đóng, bài toán (2.14) là giải được do đó tồn tại $z \in E$ sao cho $z^T A z = \varepsilon_0$. Nên $z \neq 0$ và $z^T B z = 0$ suy ra $\varepsilon_0 = z^T A z > 0$. Điều kiện (2.12) trở thành

$$x \neq 0, x^T B x = 0 \Rightarrow x^T \left(A - \varepsilon_0 I\right) x \geq 0.$$

Bởi Định lý 2.2.1), tồn tại tham số $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\left(A - \varepsilon_0 I\right) + tB$ là nửa xác định dương hoặc $A + tB$ là xác định dương. Điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.2.4 ([4]). *Tập $I_{\succ}(A, B)$ và $I_{\succeq}(A, B)$ đều là các khoảng trong $\mathbb{R}$.*

Bổ đề 2.2.5 ([4]). *$II_{\succ}(A, B) = \left\{(\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda A + \nu B \succ 0\right\} \neq \emptyset$ suy ra rằng A và B là chéo hóa được một cách đồng thời (SD). Khi $n \geq 3, II_{\succ}(A, B) \neq \emptyset$ cũng là điều kiện đủ để cho A và B là chéo hóa đồng thời (SDC).*

Kết quả sau đây nói về các điều kiện liên quan đến sự khác rỗng của tập $I_{\succeq}(A, B)$ (Định lý 2.2.6, Định lý 2.2.7).

Định lí 2.2.6. *Giả sử $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là các ma trận đối xứng và giả sử $I_{\succeq}(A, B) \neq \emptyset$. Nếu $I_{\succeq}(A, B)$ là tập gồm một điểm thì B là không xác định và $I_{\succ}(A, B) = \emptyset$. Ngược lại, $I_{\succeq}(A, B)$ là một khoảng và*

- (a) $Q(A) \cap Q(B) = N(A) \cap N(B)$.

- (b) $N(A + \sigma B) = N(A) \cap N(B)$, với mọi σ thuộc phần trong của $I_{\succeq}(A, B)$.

- (c) A, B là chéo hóa đồng thời.

Chứng minh. Giả sử $I_{\succeq}(A, B) = \{\sigma\}$ là tập gồm một điểm. Khi đó với bất kỳ $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, không phải $A + \sigma_1 B$ cũng không phải $A + \sigma_2 B$ là nửa xác định dương. Tồn tại các véc tơ v_1 và v_2 sao cho

$$0 > v_1^T\left(A+\sigma_1 B\right)v_1 = v_1^T(A+\sigma B)v_1 + \left(\sigma_1-\sigma\right)v_1^T B v_1 \geq \left(\sigma_1-\sigma\right)v_1^T B v_1$$
$$0 > v_2^T\left(A+\sigma_2 B\right)v_2 = v_2^T(A+\sigma B)v_2 + \left(\sigma_2-\sigma\right)v_2^T B v_2 \geq \left(\sigma_2-\sigma\right)v_2^T B v_2.$$

Nó kéo theo khẳng định sau

$$v_1^T B v_1 > 0 \text{ và } v_2^T B v_2 < 0,$$

do đó B là không xác định. Hơn nữa, giả sử có một số $\hat{\sigma} \in I_{\succ}(A,B)$ sao cho $A+\hat{\sigma}B \succ 0$. Khi đó, $A+\sigma B \succ 0$ với $\sigma \in (\hat{\sigma}-\delta, \hat{\sigma}+\delta)$ và với số đủ nhỏ $\delta > 0$, điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng $I_{\succeq}(A,B)$ là tập một đơn.

Bây giờ giả sử rằng $I_{\succeq}(A,B)$ không rỗng cũng không phải là tập đơn điểm. Áp dụng Bổ đề 2.2.4 ta có $I_{\succeq}(A,B)$ là một khoảng.

Để chứng minh (a), ta chọn $\sigma_1, \sigma_2 \in I_{\succeq}(A,B)$ với $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Nếu $x \in Q(A) \cap Q(B)$, ta có $x^T\left(A+\sigma_1 B\right)x = 0$. Vì $A+\sigma_1 B \succeq 0$, $x^T\left(A+\sigma_1 B\right)x = 0$ suy ra rằng $\left(A+\sigma_1 B\right)x = 0$. Tương tự, ta có $\left(A+\sigma_2 B\right)x = 0$. Do đó,

$$0 = \left(A+\sigma_1 B\right)x - \left(A+\sigma_2 B\right)x = \left(\sigma_1-\sigma_2\right)Bx,$$

suy ra rằng $Bx = 0$. Nó cũng suy ra $Ax = 0$. Nói cách khác, $Q(A) \cap Q(B) \subseteq N(A) \cap N(B)$. Vì dễ dàng thấy rằng $N(A) \cap N(B) \subseteq Q(A) \cap Q(B)$, ta có khẳng định (a).

Để chứng minh (b), ta chọn $\sigma_1, \sigma, \sigma_2 \in \operatorname{int}\left(I_{\succeq}(A,B)\right)$ sao cho $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$,

$$0 \leq x^T\left(A+\sigma_1 B\right)x = x^T(A+\sigma B)x + \left(\sigma_1-\sigma\right)x^T B x,$$
$$0 \leq x^T\left(A+\sigma_2 B\right)x = x^T(A+\sigma B)x + \left(\sigma_2-\sigma\right)x^T B x,$$

nó suy ra rằng

$$0 \leq x^T Bx \leq 0,$$

và do đó $x^T Bx = 0$. Hơn nữa, nếu $x \in N(A+\sigma B)$, thì không chỉ $(A+\sigma B)x = 0$, mà ta còn có $x^T(A+\sigma B)x = 0$. Vì $x^T Bx = 0$, nên $x^T Ax = 0$. Bởi khẳng định (a), ta đã chứng minh được rằng

$$N(A+\sigma B) \subseteq Q(A) \cap Q(B) = N(A) \cap N(B).$$

Vì $N(A) \cap N(B) \subseteq N(A+\sigma B)$ với $\sigma \in \operatorname{Int}(I_{\succeq}(A, B))$, ta thấy rằng $N(A+\sigma B)$ là bất biến với mọi $\sigma \in \operatorname{int}(I_{\succeq}(A, B)\ )$, và như thế khẳng định (b) được chứng minh.

Với khẳng định (c), giả sử $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$ là ma trận cơ sở của $N(A+\sigma B)$ với $\sigma \in \operatorname{Int}(I_{\succeq}(A, B))$ nào đó, trong đó $r = \dim(N(A+\sigma B))$. Mở rộng V thành một ma trận không suy biến $[UV] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho $U^T U$ là không suy biến và $U^T V = 0$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U^T \\ V^T \end{bmatrix} (A+\sigma B)[UV] &= \begin{bmatrix} U^T(A+\sigma B)U & U^T(A+\sigma B)V \\ V^T(A+\sigma B)U & V^T(A+\sigma B)V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U^T AU + \sigma U^T BU & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hệ quả là,

$$U^T AU + \sigma U^T BU \succ 0, \tag{2.15}$$

nó được kiểm tra bởi việc áp dụng u^T và $u, u \in \mathbb{R}^{n-r}$, vào $U^T AU + \sigma U^T BU$. Nên, $\left(u^T U^T\right)(A+\ \sigma B)(Uu) = 0$ nếu và chỉ nếu $(A+\sigma B)(Uu) = 0$. Vì U là phần bù trực giao của V, nên $u = 0$.

Bởi Bổ đề 2.2.5 U^TAU và U^TBU là chéo hóa đồng thời (nghĩa là tồn tại ma trận vuông không suy biến U_1 sao cho cả hai $U_1^TU^TAUU_1$ và $U_1^TU^TBUU_1$ đều có dạng chéo. Giả sử W là ma trận sao cho

$$\begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$$

là không suy biến. Bởi khẳng định (b), V sinh ra $N(A) \cap N(B)$ và do đó $AV = BV = 0$. Do đó

$$\begin{bmatrix} U_1^T & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^T \\ V^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^TU^TAUU_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} U_1^T & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^T \\ V^T \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^TU^TBUU_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra, A và B là chéo hóa đồng thời. Khẳng định (c) được chứng minh.

Định lí 2.2.7. *Giả sử $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận đối xứng, $Q(A)\cap Q(B) = N(A) \cap N(B)$ và*

$$\dim\{N(A) \cap N(B)\} \leq n - 3. \tag{2.16}$$

Khi đó,

- (a') $II_{\succ}\left(U^TAU, U^TBU\right) \neq \emptyset$ trong đó U là ma trận cơ sở sinh ra phần bù trực giao của $N(A) \cap N(B)$;

- (b') $II_{\succeq}(A, B) \neq \emptyset$;

- (c') A, B là chéo hóa đồng thời.

Chứng minh. Với các ký hiệu đã dùng như trong định lý 2.2.6 ta giả sử $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$ là ma trận cơ sở của $N(A) \cap N(B), r = \dim(N(A) \cap N(B))$, và ta bổ sung V thành ma trận không suy biến $[UV] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho U^TU là không suy biến và $U^TV = 0$. Với mọi $x \in Q\left(U^TAU\right) \cap Q\left(U^TBU\right)$, ta có $x^TU^TAUx = x^TU^TBUx = 0$ và do đó $Ux \in Q(A) \cap Q(B)$. Bởi giả thiết, $Q(A) \cap Q(B) = N(A) \cap N(B)$, phải tồn tại $z \in \mathbb{R}^r$ sao cho

$$Ux = Vz.$$

Do đó,

$$x = \left(U^TU\right)^{-1} U^TVz = 0,$$

nó cho thấy rằng

$$Q\left(U^TAU\right) \cap Q\left(U^TBU\right) = \{0\}. \tag{2.17}$$

Từ giả thiết (2.16) suy ra rằng

$$\dim\left(U^TAU\right) = \dim\left(U^TBU\right) = n - r \geq 3.$$

Theo Định lý 2.2.3 và (2.17) suy ra rằng

$$II_{\succ}\left(U^TAU, U^TBU\right) \neq \emptyset. \tag{2.18}$$

Nghĩa là, tồn tại $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\mu\left(U^TAU\right) + \sigma\left(U^TBU\right) \succ 0$, điều này chứng minh khẳng định (a').

Bây giờ, với $y \in \mathbb{R}^n$, ta có thể viết $y = Uu + Vv$, trong đó $u \in \mathbb{R}^{n-r}$, $v \in \mathbb{R}^r$. Nên,

$$\begin{aligned}
&y^T(\mu A + \sigma B)y \\
=&\left(u^TU^T + v^TV^T\right)(\mu A + \sigma B)(Uu + Vv) \\
=&u^T\left(\mu U^TAU + \sigma U^TBU\right)u \geq 0
\end{aligned}$$

nó chứng minh rằng $II_{\succeq}(A, B) \neq \emptyset$. Từ (2.18) và Bổ đề 2.2.5. Một lần nữa ta có U^TAU và U^TBU là chéo hóa được một cách đồng thời. Phần còn lại của chứng minh tương tự với chứng minh phần (c) của Định lý 2.2.6, ta có A, B là chéo hóa được một cách đồng thời. □

Chú ý 2.2.8. Khi $Q(A) \cap Q(B) = \{0\}$, giả thiết của định lý 2.2.7 trở thành $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Với trường hợp này, điều kiện số chiều của (2.16) là tương đương với $n \geq 3$ và ma trận cơ sở của U là I_n, ma trận đơn vị cấp n. Từ khẳng định (a') trong Định lý 2.2.7 ta đi đến kết quả $II_{\succ}(A, B) \neq \emptyset$. Nói cách khác, ta đã mở rộng phần kết luận của định lý 2.2.3 thành "$Q(A) \cap Q(B) = \{0\}$ và $n \geq 3$" suy ra "$II(A, B) \neq \emptyset$".

Từ định lý trên 2.2.7 ta có hệ quả nói về điều kiện đủ để một cặp ma trận có thể được chéo hóa một cách đồng thời.

Hệ quả 2.2.9. *Giả sử $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận đối xứng. Nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:*

- *(S1) $I_{\succeq}(A, B)$ chứa nhiều hơn một điểm;*
- *(S2) $I_{\succeq}(B, A)$ chứa nhiều hơn một điểm;*
- *(S3) $Q(A) \cap Q(B) = N(A) \cap N(B)$, với $\dim\{N(A) \cap N(B)\} \neq n - 2$,*

thì A, B có thể được chéo hóa một cách đồng thời.

Chứng minh. Điều kiện (S1) và (S2) trực tiếp cho thấy rằng $I_{\succeq}(A, B)$ (và $I_{\succeq}(B, A)$ tương ứng) là khác rỗng và là không phải là tập đơn điểm. Do đó kết luận của định lý này được suy ra từ khẳng định (c) của Định lý 2.2.6.

Điều kiện (S3) một sự mở rộng nhẹ của Định lý 2.2.7 trong đó tình huống cho $\dim\{N(A) \cap N(B)\} \leq n - 3$ đã hoàn toàn được chứng minh. Vấn đề còn lại là ta chứng tỏ rằng A, B có thể được chéo hóa một cách đồng thời khi $\dim\{N(A)\cap N(B)\} = n \vee (n-1)$. Chú ý rằng $\dim\{N(A)\cap N(B)\} = n$ suy ra $A = B = 0$ (với trường này ta ngay có điều phải chứng minh), trong đó $\dim\{N(A)\cap N(B)\} = n-1$ suy ra rằng ma trận A và B phải có dạng $A = \alpha uu^T, B = \beta uu^T$ với véc tơ $u \in R^n$ nào đó và $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Giả sử $\beta \neq 0$, khi đó $A = \frac{\alpha}{\beta}B$ do đó hai ma trận này có thể được chéo hóa một cách đồng thời. $\square$

Ví dụ 2.2.10 sau đây chỉ ra rằng giả thiết không đơn điểm của $I_{\succeq}(A,B)$ là cần thiết để có các khẳng định (a) và (c); và giả thiết về số chiều trong (S3) cũng là cần thiết và không thể bỏ qua.

Ví dụ 2.2.10. Xét

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Có duy nhất $\sigma = 0$ sao cho $A + \sigma B \succeq 0$, nhưng

$$Q(A)\cap Q(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ * \end{bmatrix} \right\};$$
$$N(A)\cap N(B) = \{0\};$$
$$\dim\{N(A)\cap N(B)\} = n-2.$$

Ta dễ dàng kiểm tra rằng A và B không thể chéo hóa một cách đồng thời.

Chú ý 2.2.11. Hệ quả 2.2.9 là một mở rộng của Bổ đề 2.2.5 vì $\big\{(\lambda,\nu)\in R^2 \mid \lambda A + \nu B \succ 0\big\} \neq \emptyset$ suy ra rằng hoặc $I_{\succ}(A,B) \neq \emptyset$ hoặc $I_{\succ}(B,A) \neq \emptyset$, các giả thiết này mạnh hơn (S1) và (S2), tương ứng.

Chú ý 2.2.12. Cả hai (S1) và (S2) có thể kiểm tra được trong thời gian đa thức. Trong quá khứ, có một số kiểu kiện cần và đủ để A và B có thể được chéo hóa một cách đồng thời, xem [3] và các tài liệu tham khảo trong đó. Nhưng chúng không kiểm tra được trong thời gian đa thức.

2.3 Hệ tiệm cận nghiệm tại vô hạn

Từ nay ta luôn giả sử có hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có dạng lần lượt là

$$\begin{aligned} f(x) &= x^T Ax - 2a^T x + a_0, \\ g(x) &= x^T Bx - 2b^T x + b_0. \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.3.1. Hệ $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ được gọi là có tiệm cận nghiệm tại vô hạn nếu hệ này vô nghiệm và tồn tại một dãy $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x^k)) = t$.

Cặp hàm $\{f(x),\ g(x)\}$ được gọi là thỏa mãn điều kiện BC nếu tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ để hệ $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ vô nghiệm với mọi $t \leq \lambda$.

Ví dụ 2.3.2. Lấy $f(x) = x_1^2, g(x) = -x_1x_2 + 1$. Dễ thấy hệ $f(x) = x_1^2 = 0, g(x) = -x_1x_2+1 \leq 0$ vô nghiệm, dãy $\{\frac{1}{k}, k\}_{k=1}^{\infty}$ thuộc $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ và $f(\frac{1}{k}, k) = \frac{1}{k^2} \to 0$ khi $k \to \infty$. Vậy theo định nghĩa trên hệ $\{f(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ tiệm cận nghiệm tại vô hạn.

Định lí 2.3.3 ([9]). *Nếu tập $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0\} \neq \emptyset$ thì cặp $\{f(x), g(x)\}$ không thỏa mãn điều kiện BC nếu và chỉ nếu hệ sau, với ẩn σ:*

$$\begin{cases} A + \sigma B \succeq 0 \\ \sigma \geq 0 \\ a + \sigma b \in R(A + \sigma B) \end{cases} \tag{2.19}$$

vô nghiệm.

Chú ý 2.3.4. Việc kiểm tra liệu rằng hệ (2.19)) có nghiệm hay không được thực hiện trong thời gian đa thức. Từ nay, ta ký hiệu

$$\sigma_l^* := \min_{A+\sigma B\succeq 0} \sigma, \tag{2.20}$$

$$\sigma_u^* := \max_{A+\sigma B\succeq 0} \sigma, \tag{2.21}$$

và giả sử $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$ là ma trận cơ sơ của $N(A) \cap N(B)$; $U \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ sao cho $[UV]$ và không suy biến và $U^T V = 0$. Từ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U^T \\ V^T \end{bmatrix} (A+\sigma B)[UV] &= \begin{bmatrix} U^T(A+\sigma B)U & U^T(A+\sigma B)V \\ V^T(A+\sigma B)U & V^T(A+\sigma B)V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U^TAU + U^TBU & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ta có thể thấy rằng, nếu $U^TBU = 0$ và $U^TAU \not\succeq 0$, thì $I_{\succeq}(A,B) = 0$ và hệ (2.19) không có nghiệm. Nó kéo theo rằng $f(x), g(x)$ thỏa mãn điều kiên BC với trường hợp này.

Giả sử rằng $I_{\succeq}(A,B) \neq \emptyset$ và $\bar{\sigma} \in I_{\succeq}(A,B)$. Thì, ta suy ra từ

$$A + \sigma B = (A + \bar{\sigma}B) + (\sigma - \bar{\sigma})B$$

rằng $\sigma_l^* = -\infty$ nếu và chỉ nếu $B \preceq 0$. Tương tự, $\sigma_u^* = \infty$ nếu và chỉ nếu $B \succeq 0$.

Bây giờ giả sử $-\infty < \sigma_l^* \leq \sigma_u^* < \infty$. Từ chứng minh phần (c) trong Định lý 2.2.6 và (2.15), nếu $\bar{\sigma} \in \operatorname{int}(I_{\succeq}(A,B))$, thì $U^TAU + \bar{\sigma}U^TBU \succ 0$. Ngược lại, nếu $U^TAU + \bar{\sigma}U^TBU \succ 0$, phải có $\epsilon > 0$ nào đó sao cho

$U^TAU+(\bar{\sigma}\pm\epsilon)U^TBU \succ 0$ và do đó $A+(\bar{\sigma}\pm\epsilon)B \succeq 0$. Nên $\bar{\sigma} \in \text{Int}\,(I_{\succeq}(A,B))$. Ngược lại, σ_l^* và σ_u^*, như là điểm cuối của $I_{\succeq}(A,B)$, phải là nghiệm của phương trình

$$\det\left(U^TAU + \sigma U^TBU\right) = 0. \tag{2.22}$$

Trước hết ta tìm tất cả nghiệm của 2.22, các nghiệm này được ký hiệu bởi $r_1, \ldots, r_{n-r}$, nó có thể được giải quyết trong thời gian đa thức. Do đó,

$$\sigma_l^* = \min\left\{r_i : U^TAU + r_iU^TBU \succeq 0, i = 1, \ldots, n-r\right\};$$
$$\sigma_u^* = \max\left\{r_i : U^TAU + r_iU^TBU \succeq 0, i = 1, \ldots, n-r\right\}.$$

- Trường hợp (a) Nếu $\sigma_u^* < 0$, (2.19) không có nghiệm.

- Trường hợp (b) $\sigma_u^* = 0$ hoặc $\sigma_l^* = \sigma_u^* > 0$. Kiểm tra tính có nghiệm của (2.19)là tương đương với việc kiểm tra hệ phương trình tuyến tính

$$(A + \sigma B)x = a + \sigma b$$

có nghiệm $\sigma = 0$ hoặc $\sigma = \sigma_l^* = \sigma_u^*$.

- Trường hợp (c) $\sigma_u^* > 0$ và $\sigma_l^* < \sigma_{u^*}$. Theo định lý 2.2.6, ma trận cơ sở V sinh ra $N(A+\ \sigma' B) = N(A) \cap N(B)$ với mọi $\sigma' \in (\sigma_l^*, \sigma_u^*)$.

- Trường hợp (c1) $\sigma_l^* < 0$. (2.19) có nghiệm nếu và chỉ nếu hoặc tồn tại $\sigma \in [0, \sigma_u^*)$ sao cho

$$V^Ta + \sigma V^Tb = 0, \tag{2.23}$$

hoặc hệ phương trình tuyến tính

$$(A + \sigma_u^* B)\, x = a + \sigma_u^* b$$

có nghiệm.

- Trường hợp (c2) $\sigma_l^* \geq 0$. (2.19) có nghiệm nếu và chỉ nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{gathered} V^T a + \sigma V^T b = 0, \text{ với } \sigma \in (\sigma_l^*, \sigma_u^*) \text{ nào đó;} \\ (A + \sigma_l^* B)\, x = a + \sigma_l^* b \text{ có nghiệm;} \\ (A + \sigma_u^* B)\, x = a + \sigma_u^* b \text{ có nghiệm.} \end{gathered} \tag{2.24}$$

Ta chứng tỏ rằng hoặc (2.23) hoặc (2.24) là giải được trong thời gian đa thức. Vì V, a, b là cố định, nếu $V^T a = V^T b = 0$, $V^T a + \sigma V^T b = 0$ đạt được với mọi σ. Nếu $V^T a$ và $V^T b \neq 0$ là phụ thuộc tuyến tính, tồn tại duy nhất σ sao cho $V^T a + \sigma V^T b = 0$. Trái lại, $V^T a + \sigma V^T b = 0$ không có nghiệm.

Từ Định lý 2.3.3 ta dễ dàng suy ra rằng, nếu $\{f(x), g(x)\}$ thỏa mãn điều kiện BC thì $I_{\succeq}(A, B)$ phải khác rỗng. Và ta sẽ xét các trường hợp $I_{\succeq}(A, B)$ là một khoảng và $I_{\succeq}(A, B)$ là một tập đơn điểm.

Định lí 2.3.5. *Nếu tồn tại $x^0 \in \mathbb{R}^n$ để $g(x^0) < 0$; $\{f(x), g(x)\}$ thỏa mãn điều kiện BC và $I_{\succeq}(A, B)$ là một khoảng thì với mọi $t \in \mathbb{R}, t \leq f(x^0)$ hệ $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ không có nghiệm tiệm cận tại vô hạn.*

Chứng minh. Giả sử $[UV] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là một ma trận không suy biến sao cho V sinh ra $N(A) \cap N(B)$. Bởi Định lý 2.2.6, với mọi $\sigma' \in \operatorname{Int}\left(I_{\succeq}(A, B)\right), V$ cũng sinh ra $N\left(A + \sigma' B\right)$. Từ (2.15) ta suy ra rằng

$$U^T A U + \sigma' U^T B U \succ 0, \forall \sigma' \in \operatorname{Int}\left(I_{\succeq}(A, B)\right). \tag{2.25}$$

Vì $\{f(x), g(x)\}$ thỏa mãn điều kiện BC, có một nghiệm σ của hệ (2.19) sao cho $\sigma \in I_{\succeq}(A, B) \cap [0, +\infty)$ và $a + \sigma b \in R(A + \sigma B)$. Vì V sinh ra

$N(A) \cap N(B)$ nên V phải sinh ra một không gian con của $N(A + \sigma B)$. Từ $a + \sigma b \in R(A + \sigma B)$ ta suy ra rằng

$$V^T a + \sigma V^T b = 0. \tag{2.26}$$

Ta xét phép biến đổi không suy biến $x = Uu + Vv$ nó sẽ tách biến của các hàm $f(x), g(x)$ thành hai phần, phần u và phần v, hệ $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ trở thành:

$$f(u, v) = u^T U^T AUu - 2a^T Uu - 2a^T Vv + a_0 = t, \tag{2.27}$$

$$g(u, v) = u^T U^T BUu - 2b^T Uu - 2b^T Vv + b_0 \leq 0. \tag{2.28}$$

- Trường hợp (d) $V^T a = V^T b = 0$. Thì bởi (2.27)-(2.28) , $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ được rút gọn lại thành hệ chỉ phụ thuộc vào u. Hơn nữa bởi (2.25), với mỗi $t \leq f(x^0)$ hệ $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ không có nghiệm tiệm cận tại vô hạn (điều này đã được nhiều tác giả chứng minh, chẳng hạn xem [4, 5]).

- Trường hợp (e) $V^T a = 0, V^T b \neq 0$. Bởi (2.26), ta có $\sigma = 0$ điều này suy ra rằng $A \succeq 0$ và $a \in R(A)$. Trường hợp này, vì (2.28) luôn có nghiệm với mọi u, do đó sự có nghiệm của (2.27)-(2.28) trở thành vấn đề sự có nghiệm của $u^T U^T AUu - 2a^T Uu + a_0 = t$ với $a \in R(A)$, và do đó với mọi $t \leq f(x^0)$ $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ không có nghiệm tiệm cận tại vô hạn.

- Trường hợp (f) $V^T a \neq 0$. Bởi (2.26), $V^T a \neq 0$, nên σ là duy nhất và khác 0. Do đó, $\sigma > 0$. Nên, bất phương trình (2.28) tương đương với

$$\sigma u^T U^T BUu - 2\sigma g^T Uu - 2\sigma b^T Vv + \sigma b_0 \leq 0,$$

hoặc, một cách tương đương, bởi (2.26),

$$-2a^T Vv = 2\sigma b^T Vv \geq \sigma u^T U^T BUu - 2\sigma b^T Uu + \sigma b_0. \tag{2.29}$$

Do đó, bởi (2.27) và (2.29) ta có

$$f(u,v) \geq u^T \left(U^T AU + \sigma U^T BU\right) u - 2\left(a^T U + \sigma b^T U\right) u + \sigma b_0. \qquad (2.30)$$

Vì $A+\sigma B \succeq 0$, vế phải của (2.30) là một hàm lồi. Vì $a+\sigma b \in R(A+\sigma B)$ nên ta có thể giả sử $a+\sigma b = (A+\sigma B)w$, ta có thể viết w thành $w = Uy^* + Vz$ để $a+\sigma b = (A+\sigma B)Uy^*$ và do đó ta có $U^T(a+\sigma b) \in R\left(U^T AU + \sigma U^T BU\right)$ với y^* trở thành điểm cực tiểu của hàm bên phải của 2.30. Thay thế $u = y^*$ vào (2.29), vì $V^T a \neq 0$ nên luôn tồn tại $v = z^*$ nào đó sao cho $(u,v) = (y^*, z^*)$ và làm cho dấu " = " xảy ra ở (2.29). Do đó, $g\left(y^*, z^*\right) + b_0 \leq 0$ và $f\left(y^*, z^*\right)$ bằng giá trị nhỏ nhất của hàm lồi bên trái của (2.30). Vậy với mọi $t \leq f(x^0)$ $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ không có nghiệm tiệm cận tại vô hạn.

Vậy trong tất cả các trường hợp (d), (e) và (f), ta có với mọi $t \leq f(x^0)$ $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ không có nghiệm tiệm cận tại vô hạn. Đây là điều phải chứng minh. □

Vậy phần còn lại cần được thảo luận khi tập $I_{\succeq}(A,B)$ là một tập đơn điểm $\{\sigma^*\}$. Bởi Định lý 2.3.3, $\{f(x), g(x)\}$ thỏa mãn điều kiện BC nếu và chỉ nếu phải có $\sigma^* \geq 0$ sao cho, với V là ma trận cơ sở của $N\left(A + \sigma^* B\right)$ và $r = \dim N\left(A + \sigma^* B\right)$, tập

$$S = \left\{(A + \sigma^* B)^+ \left(a + \sigma^* b\right) + Vy \mid y \in \mathbb{R}^r\right\} \qquad (2.31)$$

khác rỗng. Theo một kết quả của Moré trong [4], x^* là điểm cực tiểu của $f(x)$ trên $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ nếu và chỉ nếu $x^* \in S \cap \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ và (x^*, σ^*) thỏa mãn điều kiện

$$\sigma^* g(x^*) = 0. \qquad (2.32)$$

Do đó ta có kết quả sau.

Định lí 2.3.6. *Nếu tồn tại $x^0 \in \mathbb{R}^n$ để $g(x^0) < 0$; $\{f(x), g(x)\}$ thỏa mãn điều kiện BC.*

Khi đó tồn tại $t \in \mathbb{R}, t \leq f(x^0)$, để $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ có nghiệm tiệm cận tại vô hạn khi và chỉ khi $I_{\succeq}(A, B)$ là tập đơn điểm $\{\sigma^*\}$ với $\sigma^* \geq 0$, và hệ phương trình ẩn y

$$\begin{array}{ll} g\left((A+\sigma^* B)^+ (f + \sigma^* g) + Vy\right) + b_0 = 0, & \text{nếu } \sigma^* > 0 \\ g\left(A^+ f + Vy\right) + b_0 \leq 0, & \text{nếu } \sigma^* = 0 \end{array} \tag{2.33}$$

không có nghiệm, trong đó V là ma trận cơ sở của $N(A + \sigma^* B)$.

Chứng minh. Vì $\{f(x), g(x)\}$ thỏa mãn điều kiện BC, bởi Định lý 2.3.3, hệ 2.19 có ít nhất một nghiệm. Bởi Định lý 2.3.5, tồn tại $t \in \mathbb{R}, t \leq f(x^*)$, để $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ có nghiệm tiệm cận tại vô hạn chỉ xảy ra khi $I_{\succeq}(A, B)$ là tập đơn điểm $\{\sigma^*\}$ với $\sigma^* \geq 0$. Hơn nữa, tập S ở 2.31 không thể có nghiệm trong $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$, mà nghiệm này cùng với σ^* thỏa mãn điều kiện (2.32). Nói cách khác, hệ 2.33 không có nghiệm, vậy điều kiện cần của định lý đã được chứng minh. Điều kiện đủ của định lý là hiển nhiên, nó được suy ra từ Định lý 2.3.5.

Chú ý 2.3.7. Trong các định lý trên ta thường giả thiết $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0\} \neq \emptyset$, nếu điều kiện này không được thỏa mãn thì các vấn đề xét trong luận văn này trở thành các bài toán đơn giản. Thật vậy nếu $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0\} = \emptyset$ thì $g(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, do đó $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ hoặc là tập rỗng hoặc là một không gian con afin của $\mathbb{R}^n$, khi đó hệ $\{f(x) = t, g(x) \leq 0\}$ không có nghiệm hoặc nó trở thành phương trình dạng $h(y) = t$, vậy bài toán trở nên rất đơn giản.

KẾT LUẬN

Với mục tiêu đi sâu nghiên cứu, tìm hiểu về điều kiện để hệ phương trình bậc hai nhiều biến tiệm cận nghiệm tại vô hạn, luận văn giới thiệu ba định lý chính cùng với các chứng minh chi tiết một phần trong bài báo tiếng Anh của các tác giả Yong Hsia, Gang-Xuan Lin, Ruey-Lin Sheu (xem [9]). Với nhiệm vụ đặt ra như trên, nội dung đã thực hiện được của luận văn chủ yếu bao gồm:

1. Trình bày khái niệm và một số tính chất của Phần bù Schur .

2. Trình bày chi tiết một số kết quả có liên quan đến ma trận bút chì và SD.

3. Trình bày hệ tiệm cận nghiệm tại vô hạn.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Mộng Hy (2017), *Hình học cao cấp*, Nhà xuất bản Giáo dục

[2] Nguyễn Hữu Việt Hưng (2019) *Đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội .

Tiếng Anh

[3] R.I. Becker (1980) *Necessary and sufficient conditions for the simultaneous diagonability of two quadratic forms.* Linear Algebra and its Applications, 30 129–139.

[4] J.J. Mor´e (1993) *Generalizations Of The Trust Region Problem.* Optimization Methods and Software, 2, 189–209.

[5] Y. Ye and S. Zhang (2003) *New results on quadratic minimization.* SIAM J. Optim., 14(1), 245–267.

[6] H. Q. Nguyen and R. L. Sheu.*Geometric properties for level sets of quadratic functions.* Journal of Global Optimization, 73 (2019), 349–369.

[7] Pólik, I., Terlaky, T.*A survey of the S-lemma*. SIAM Rev. 49(3), 371–418 (2007)

[8] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe. *Introduction to Applied Linear Algebra - Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press (2018).

[9] Y. Hsia, G. X. Lin, and R. L. Sheu. *A revisit to quadratic programming with one inequality quadratic constraint via matrix pencil.* Pac. J. Optim., 10 (2014), pp. 461–481.