BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐINH CÔNG MINH

NHÓM ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU CỦA ĐẠI SỐ LIE KIM CƯƠNG VÀ ĐẠI SỐ LIE KIỂU JORDAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐINH CÔNG MINH

NHÓM ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU CỦA ĐẠI SỐ LIE KIM CƯƠNG VÀ ĐẠI SỐ LIE KIỂU JORDAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 8.46.01.04

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Nguyễn Quốc Thơ

Nghệ An - 2022

Mục lục

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên tác giả xin chân thành cảm ơn đến quý Thầy - Cô của Khoa Toán, Trường Sư phạm - Trường Đại học Vinh. Đặc biệt quý Thầy - Cô trong Bộ môn Đại số - Hình học cũng như quý Thầy - Cô đã giảng dạy lớp Cao học Khóa 28 của Trường Đại học Vinh đã tận tình dạy bảo tác giả trong suốt khoa học vừa qua.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Nguyễn Quốc Thơ. Thầy đã luôn quan tâm, tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập. Thầy đã dành nhiều thời gian và công sức hướng dẫn để giúp tôi hoàn thành luận văn của mình

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám hiệu và Phòng đào tạo Sau đại học của Trường Đại học Vinh đã tạo điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành nhiệm vụ của một học viên cao học.

Tác giả chân thành cảm ơn quý Thầy - Cô, đồng nghiệp nơi tác giả đang giảng dạy và công tác đã tạo điều kiện thuận lợi, cổ vũ, động viên và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập.

Cuối cùng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình tôi. Gia đình luôn là nguồn động viên tinh thần to lớn để tôi vượt qua khó khăn, hoàn thành nhiệm vụ học tập của mình.

Nghệ An, ngày 25 tháng 5 năm 2022

Tác giả

Đinh Công Minh

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Đại số Lie toàn phương **g** là đại số Lie **g** mà trên đó được trang bị một dạng song tuyến tính đối xứng, bất biến và không suy biến. Đại số Lie toàn phương được coi là lớp đại số Lie tổng quát của đại số Lie nửa đơn và dạng song tuyến tính đối xứng được khái quát từ dạng Killing. Lớp đại số này được đề cập đầu tiên vào năm 1985 trong cuốn sách **Infinite-dimensional Lie algebras**, *Cambridge University Press, New York* của V. Kac. Nếu xét về mặt cấu trúc thì một đại số Lie toàn phương là tổng trực tiếp trực giao của các iđêan không suy biến hoặc là tổng trực tiếp trực giao của một iđêan tâm không suy biến và một iđêan có tâm đẳng cự toàn bộ. Về bài toán mở rộng đại số Lie thì một đại số Lie toàn phương không tầm thường có thể coi như là một mở rộng kép của một đại số Lie có số chiều nhỏ hơn hoặc bằng những đạo hàm phản xứng (xem [6]) hoặc một đại số Lie toàn phương giải được có số chiều chẵn là mở rộng T^* của một đại số Lie bởi một đối chu trình cyclic (xem [9]). Một ví dụ về đại số Lie toàn phương là đại số Lie kim cương $4-$ chiều **k** sinh bởi hệ vectơ cơ sở là $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (ký hiệu là $\mathbf{k} = span\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$), với tích Lie được xác định bởi: $\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 \\ [e_4, e_1] = -e_1 \\ [e_4, e_2] = e_2 \\ [e_3, e_1] = [e_3, e_2] = [e_4, e_3] = 0 \end{cases}$

và dạng song tuyến tính đối xứng φ được cho bởi $\varphi(e_4, e_1) = \varphi(e_2, e_3) = 1$, các trường hợp khác bằng 0. Dễ dàng thấy đại số Lie kim cương này là giải được và nó là mở rộng T^* của đại số Lie giải được không giao hoán $2-$ chiều. Bên cạnh đó ta còn có các đại số Lie toàn phương kiểu Jordan $\mathbf{j}_{2n}$ và $\mathbf{j}_{2n+1}$. Cụ thể nó được xây dựng như sau:

• Xét khối Jordan lũy linh $J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ (với $n \geq 2$) và $J_1 = [0]$ (ma trận không). Không gian vectơ $\mathbf{j}_{2n} = \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}x_0 \oplus \mathbb{C}y_0$ là một mở rộng của $\mathbb{C}^{2n}$ bởi ánh xạ tuyến tính $\Phi : \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}$ là một đại số Lie toàn phương, với tích Lie:

$$\begin{cases} [x, y] = \varphi(\Phi(x), y)x_0, \forall x, y \in \mathbb{C}^{2n} \\ [x_0, \mathbf{j}_{2n}] = 0 \\ [y_0, x] = \Phi(x) \end{cases}$$

và dạng song tuyến tính bất biến, không suy biến φ được xác định bởi

$$\begin{aligned} \varphi : & V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (x_i, y_j) \quad \longmapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j = \overline{0, n} \\ 0 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

• Đối với đại số Lie toàn phương kiểu Jordan $\mathbf{j}_{2n+1}$ xây dựng hoàn toàn tương tự như trường hợp $\mathbf{j}_{2n}$.

Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie, V là một không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường số phức $\mathbb{C}$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu $C^k(\mathbf{g}, V)$ là không gian các ánh xạ $k-$ tuyến tính phản xứng từ $\mathbf{g} \times \mathbf{g} \times \cdots \times \mathbf{g}$ vào V nếu $k \geq 1$ và $C^0(\mathbf{g}, V) = V$. Một phần tử $f \in C^k(\mathbf{g}, V)$ gọi là một $k-$ *đối chu trình* nếu $\delta f = 0$ và f là một $k-$ *đối bờ* nếu tồn tại $g \in C^{k+1}(\mathbf{g}, V)$ sao cho $f = \delta g$, trong đó $\delta := \delta_k : C^k(\mathbf{g}, V) \longrightarrow C^{k+1}(\mathbf{g}, V)$ là *toán tử đối bờ* được xác định bởi:

$$\begin{aligned} \delta_k f(x_0, x_1, \dots, x_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho(x_i)(f(x_0, \dots \widehat{x}_i, \dots, x_k)) \\ &+ \sum_{i<j}^{k} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_0, \dots \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Ký hiệu $Z^k(\mathbf{g}, V)$ là tập hợp các $k-$ đối chu trình và $B^k(\mathbf{g}, V)$ là tập hợp các $k-$ đối bờ. Khi đó không gian thương $H^k(\mathbf{g}, V) = Z^k(\mathbf{g}, V)/B^k(\mathbf{g}, V)$ được gọi là *nhóm đối đồng điều thứ k* của $\mathbf{g}$ với hệ số trong V. Mỗi phần tử thuộc $H^k(\mathbf{g}, V)$

cũng được gọi là *một $k-$ chu trình* (xem [1]). Mô tả $H^k(\mathbf{g}, V)$ nhóm đối đồng điều thứ k của đại số Lie **g** là một trong những bài toán nghiên cứu cấu trúc của đại số Lie, nhưng sự hiểu biết về nó vẫn còn khá hạn chế. Ví dụ như người ta mới giải quyết được trên một ít các đại số Lie cụ thể hoặc chỉ dừng lại ở việc mô tả số chiều của các nhóm đối đồng điều. Do đó xoay quanh vấn đề này vẫn đang tồn tại những câu hỏi mở.

Trong trường hợp **g** là đại số Lie toàn phương, thì nhóm đối đồng điều $H^2(\mathbf{g}, \mathbb{C})$ được mô tả bằng hai cách: Mô tả thông qua không gian các đạo hàm phản xứng của **g** hoặc tính toán trực tiếp trên $H^2(\mathbf{g}, \mathbb{C})$ nhờ toán toán tử đối bờ $\delta = -\{I, .\}$, trong đó I là $3-$ dạng liên kết với **g** và $\{., .\}$ là tích Super - Poisson được định nghĩa trên không gian $\Lambda(\mathbf{g}^*)$ chứa các dạng đa tuyến tính phản xứng trên **g** (xem [6]). So với cách thứ nhất thì cách mô tả nhóm đối đồng điều của đại số Lie toàn phương nhờ toán tử đối bờ thuận tiện hơn, vì nó mở ra cho ta một hướng đi mới trong việc tìm kiếm những họ đại số Lie thích hợp với cách tính thông qua tích super - Poisson. Từ đó nhóm đối đồng điều được mô tả một cách triệt để và chi tiết.

Việc mô tả tường minh các nhóm đối đồng điều sẽ cung cấp thêm các thông tin về đại số Lie toàn phương và từ đó giúp chúng ta hiểu biết thêm về lớp đại số này. Với mong muốn tìm hiểu thêm về lớp các đại số Lie toàn phương và được sự gợi ý của TS. Nguyễn Quốc Thơ, chúng tôi chọn đề tài: **Nhóm đối đồng điều của đại số Lie kim cương và đại số Lie kiểu Jordan** làm đề tài nghiên cứu của mình.

Mục đích của luận văn là dựa vào các kết quả của bài báo khoa học "*Cohomology of some families of Lie algebras and quadratic Lie algebras,*" East-West J. of Mathematics. **Vol 20, No 2** (2018), 188-201 của các tác giả Cao Trần Tứ Hải, Dương Minh Thành và Lê Anh Vũ và "*Số Betti thứ hai của các đại số Lie lũy linh kiểu Jordan,*" Tạp chí Khoa học Trường đại học Sư phạm Hồ Chí Minh.**Vol 16, No 12**(2019), 877 - 890 của các tác giả Cao Trần Tứ Hải và Dương Minh Thành, cùng với một số tài liệu liên quan để đọc hiểu, trình bày cách tính nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie kim cương và đại số Lie kiểu Jordan.

2. Nội dung nghiên cứu của luận văn

Trình bày một cách có hệ các kiến thức về đại số Lie toàn phương, nhóm đối đồng điều của đại số Lie toàn phương. Từ đó áp dụng các kiến thức trên cho đại số Lie kim cương và đại số Lie kiểu Jordan. Nội dung cụ thể như sau:

2.2.1. Mô tả nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie kim cương.

2.2.2. Mô tả nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie kiểu Jordan.

3. Tổng quan và cấu trúc của luận văn

Ngoài phần Lời nói đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo thì nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1: Kiến thức cơ sở. Nội dung chính trong chương này, chúng tôi trình bày khái niệm và một số tính chất của đại số Lie toàn phương, đại số Lie toàn phương lũy linh, đại số Lie toàn phương giải được và nhóm đối đồng điều của đại số Lie và đại số Lie toàn phương.

1.1. Đại số Lie toàn phương Lũy linh - Giải đươc.

1.2. Nhóm đối đồng điều của đại số Lie.

Chương 2: Đối đồng điều của đại số Lie kim cương. Nội dung chính của chương này là chúng tôi trình bày khái niệm về đại số Lie kim cương, đại số Lie kiểu Jordan, một số kết quả về mô tả không gian các đạo hàm phản xứng của đại số Lie, mô tả đối đồng điều của đại số Lie kim cương và đại số Lie kiểu Jordan. Dự kiến được chia thành các mục sau:

2.1. Nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie kim cương.

2.2. Nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie kiểu Jordan.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong việc hoàn thành luận văn, nhưng do năng lực còn nhiều hạn chế, nên chắc chắn luận văn vẫn còn có những sai sót không mong muốn, những thiếu sót không tránh khỏi. Tác giả rất mong nhận được sự đánh giá, nhận xét, góp ý của các nhà khoa học và đồng nghiệp để luận văn có thể được hoàn thiện tốt hơn.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Nội dung trong chương này, chúng tôi trình bày lại một cách có hệ thống các khái niệm cơ bản và những kết quả cần thiết liên quan đến đại số Lie toàn phương, đại số Lie toàn phương giải được, đại số Lie toàn phương lũy linh, nhóm đối đồng của đại số Lie toàn phương......

1.1 Đại số Lie toàn phương Lũy linh - Giải được

1.1.1. Định nghĩa. Cho **g** là không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường số phức $\mathbb{C}$. Trên **g** ta định nghĩa phép nhân

$$\begin{aligned} [.,.]: \quad & \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g} \\ & (x, y) \longmapsto [x, y]. \end{aligned}$$

Khi đó **g** được gọi là một *đại số Lie trên* $\mathbb{C}$ (hay $\mathbb{C}-$ *đại số Lie*) nếu phép nhân định nghĩa ở trên thỏa mãn các điều sau:

$i)$ Phép nhân là toán tử song tuyến tính, tức là: $\forall x, y, z \in \mathbf{g}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, ta có

$$[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x, z] + \mu[y, z],$$
$$[x, \lambda y + \mu z] = \lambda[x, y] + \mu[x, z].$$

$ii)$ Phép nhân phản xứng, tức là: $[x, y] = -[y, x], [x, x] = 0, \quad \forall x, y \in \mathbf{g}$.

$iii)$ Phép nhân thỏa mãn đẳng thức Jacôbi, tức là:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \quad x, y, z \in \mathbf{g}.$$

+) Phép nhân định nghĩa ở trên được gọi là *tích Lie* trên đại số Lie **g**.

+) Số chiều của không gian vectơ $\mathbf{g}$ được gọi là *số chiều của đại số Lie* $\mathbf{g}$. Đại số Lie $\mathbf{g}$ được gọi là *giao hoán,* nếu $[x,y]=0, \forall x,y \in \mathbf{g}$.

● Không gian vectơ con $\mathbf{h}$ của đại số Lie $\mathbf{g}$ được gọi là *đại số Lie con* của $\mathbf{g}$, nếu

$$\forall x, y \in \mathbf{h} \text{ thì } [x,y] \in \mathbf{h}.$$

● Không gian vectơ con $\mathbf{i}$ của đại số Lie $\mathbf{g}$ được gọi là *iđêan* của $\mathbf{g}$ (ký hiệu là $\mathbf{i} \lhd \mathbf{g}$), nếu:

$$\forall x \in \mathbf{g}, \forall a \in \mathbf{i} \text{ thì } [x,a] \in \mathbf{i}.$$

● Cho $\mathbf{i}$ là iđêan của đại số Lie $\mathbf{g}$. Trên không gian vectơ thương

$$\mathbf{g}/\mathbf{i} = \{x + \mathbf{i} \mid \forall x \in \mathbf{g}\}$$

định nghĩa tích Lie

$$[x+\mathbf{i}, y+\mathbf{i}] = [x,y] + \mathbf{i}, \quad \forall x+\mathbf{i}, y+\mathbf{i} \in \mathbf{g}/\mathbf{i}$$

Khi đó không gian vectơ thương $\mathbf{g}/\mathbf{i}$ là một đại số Lie, với tích Lie được định nghĩa ở trên và được gọi là *đại số Lie thương* của đại số Lie $\mathbf{g}$ theo iđêan $\mathbf{i}$.

Ví dụ 1. Cho $\mathbf{a}$ là đại số trên trường $\mathbb{C}$. Toán tử tuyến tính $\varphi : \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{a}$ được gọi là *toán tử vi phân* trên A nếu nó thỏa mãn công thức Leibniz:

$$\varphi(x.y) = \varphi(x).y - x.\varphi(y).$$

Ký hiệu $Der(\mathbf{a})$ là tập hợp các toán tử vi phân trên $\mathbf{a}$. Khi đó $Der(\mathbf{a})$ là đại số Lie con của $gl(\mathbf{a})$.

Chứng minh. Thậy vậy, $\forall \varphi, \varphi' \in Der(\mathbf{a})$, ta có:

$$\begin{aligned}
[\varphi,\varphi'](a.b) &= (\varphi\varphi' - \varphi'\varphi)(a.b)\\
&= \varphi(\varphi'(a).b - a.\varphi'(b)) - \varphi'(\varphi(a).b - a.\varphi(b))\\
&= (\varphi\varphi' - \varphi'\varphi)(a).b - a.(\varphi\varphi' - \varphi'\varphi)(b)\\
&= [\varphi,\varphi'](a).b - a.[\varphi,\varphi'](b).
\end{aligned}$$

Do đó $[\varphi,\varphi'] \in Der(\mathbf{a})$. Vậy $Der(\mathbf{a})$ là đại số Lie con của $gl(\mathbf{a})$. □

1.1.2. Định nghĩa.• Cho $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ là hai $\mathbb{C}-$ đại số Lie. Một ánh xạ $\phi : \mathbf{g}_1 \longrightarrow \mathbf{g}_2$ được gọi là *đồng cấu đại số Lie*, nếu:

+) ϕ là ánh xạ tuyến tính,

+) $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad \forall x, y \in \mathbf{g}_1$.

• Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie trên $\mathbb{C}$ và V là $\mathbb{C}-$ không gian vectơ. Một *biểu diễn* của $\mathbf{g}$ trên V là đồng cấu $\phi : \mathbf{g} \longrightarrow gl(V)$.

1.1.3. Định nghĩa. • Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie trên trường số phức $\mathbb{C}$. *Tâm* của $\mathbf{g}$ là tập hợp $Z(\mathbf{g}) := \{x \in \mathbf{g} \mid [x, y] = \theta, \forall y \in \mathbf{g}\}$.

• Cho $\mathbf{a}$ là đại số con của $\mathbf{g}$. Tập hợp

$$N_{\mathbf{g}}(\mathbf{a}) := \{x \in \mathbf{g} \mid [x, y] \subset \mathbf{a}, \forall y \in \mathbf{a}\}$$

được gọi là *chuẩn tắc hóa* của $\mathbf{a}$. Nếu $\mathbf{a} = N_{\mathbf{g}}(\mathbf{a})$ thì $\mathbf{a}$ được gọi là *tự chuẩn tắc.*

• Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie. Khi đó đại số Lie con $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] := \{[x, y] \mid x, y \in \mathbf{g}\}$ được là *đại số dẫn xuất* của $\mathbf{g}$.

Từ định nghĩa đại số con và iđêan của đại số Lie, ta có:

+) $Z(\mathbf{g})$ là đại số Lie con của $\mathbf{g}$.

+) $N_{\mathbf{g}}(\mathbf{a})$ là đại số con của $\mathbf{g}$ và hơn thế nữa nó là đại số con lớn nhất của $\mathbf{g}$ mà chứa $\mathbf{a}$ như là một iđêan.

+) Đại số Lie $\mathbf{g}$ giao hoán khi và chỉ khi $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] = 0$.

+) Nếu $\mathbf{g}$ là đại số Lie đơn thì $Z(\mathbf{g}) = \{\theta\}$ và $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] = 0$.

+) Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie và $\phi : \mathbf{g} \longrightarrow gl(n)$ là một biểu diễn của $\mathbf{g}$. Ký hiệu $Tr(\phi(g))$ là vết của $\phi(g), \forall g \in \mathbf{g}$. Khi đó, nếu $x \in [\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ thì $Tr(\phi(x)) = 0$.

Qua định nghĩa về đại số Lie ta thấy nếu $\mathbf{g}$ đại số Lie thì $\mathbf{g}$ là đại số. Ngược lại, mỗi đại số nói chung không phải là đại số Lie. Nhưng nếu ta chọn tích Lie là hoán tử thì mỗi đại số trở thành đại số Lie. Đại số Lie xây dựng như vậy được gọi là *đại số Lie cảm sinh từ đại số*. Đó chính là nội dung của định lý sau.

1.1.4. Định lý. *Cho **g** là một đại số trên trường số phức $\mathbb{C}$. Trên **g** định nghĩa tích Lie như sau:*

$$\begin{aligned} [.,.]: \quad & \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} \longrightarrow \boldsymbol{g} \\ & (x, y) \longmapsto [x, y] = xy - yx, \quad \forall x, y \in \boldsymbol{g}. \end{aligned}$$

*Khi đó, **g** cùng với tích Lie định nghĩa ở trên là một đại số Lie trên $\mathbb{C}$.*

Cho **g** là đại số Lie trên trường số phức $\mathbb{C}$ và $x \in \mathbf{g}$.

+) Định nghĩa ánh xạ

$$\begin{aligned} ad_x: \quad & \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g} \\ & y \longmapsto ad_x(y) = [x, y]. \end{aligned}$$

Khi đó ad_x là ánh xạ tuyến tính và hơn thế nữa ad_x còn là một vi phân, có nghĩa là: $ad_x[y, z] = [ad_x(y), z] + [y, ad_x(z)]$.

+) Từ vi phân ad_x, ta xét ánh xạ

$$\begin{aligned} ad: \quad & \mathbf{g} \longrightarrow Der(\mathbf{g}) \\ & x \longmapsto ad_x. \end{aligned}$$

Khi đó, $\forall x, y, z \in \mathbf{g}$, ta có:

$$\begin{aligned} [ad_x, ad_y](z) &= ad_x \circ ad_y(z) - ad_y \circ ad_x(z) \\ &= ad_x([y, z]) - ad_y([x, z]) \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [[x, z], y] \\ &= [[x, y], z] \\ &= ad_{[x,y]}(z). \end{aligned}$$

Vậy ánh xạ ad là một đồng cấu đại số Lie và hơn nữa ad là một biểu diễn.

1.1.5. Định nghĩa. • Vi phân có dạng ad_x định nghĩa ở trên được gọi là *vi phân trong* của **g**.

• Biểu diễn ad định nghĩa ở trên được gọi là *biểu diễn chính quy* của **g**.

1.1.6. Định nghĩa. Cho **g** là một đại số Lie trên trường $\mathbb{C}$. Dạng song tuyến tính

$$\begin{aligned} \mathcal{K}: \quad & \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g} \\ & (x, y) \longmapsto \mathcal{K}(x, y) = Tr[ad_x \circ ad_y]. \end{aligned}$$

gọi là *dạng Killing* của **g**.

Từ định nghĩa trên, ta có:

+) Dạng Kiling $\mathcal{K}$ bất biến qua mọi tự đẳng cấu của **g**. Có nghĩa là, nếu **g** là đại số Lie, f là một tự đẳng cấu của **g** và $\mathcal{K}$ là dạng Kiling của **g** thì

$$\mathcal{K}(f(x), f(y)) = \mathcal{K}(x, y), \forall x, y \in \mathbf{g}.$$

+) Cho **g** là đại số Lie và $\mathcal{K}$ là dạng Kiling của **g**. Ký hiệu

$$rad_{\mathcal{K}} = \{x \in \mathbf{g} \mid \mathcal{K}(x, y) = 0, \forall y \in \mathbf{g}\}.$$

Khi đó $rad_{\mathcal{K}} \lhd \mathbf{g}$. Dạng Kiling $\mathcal{K}$ gọi là *không suy biến* nếu $rad_{\mathcal{K}} = \{0\}$.

Ví dụ 2. Cho đại số Lie $\mathbf{g} = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \forall x, y, t \in \mathbb{C} \right\}$. Giả sử $\mathcal{K}$ là dạng Kiling của **g**. Khi đó $\mathcal{K}$ được xác định như sau:

$$\mathcal{K}(X, Y) = Tr(ad_X \circ ad_Y) = 2\alpha\beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall X, Y \in \mathbf{g}$$

và ma trận biểu diễn của $\mathcal{K}$ là $M_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.1.7. Định nghĩa. Cho **g** là đại số Lie. Đặt:

$$\begin{aligned} Z^0(\mathbf{g}) &:= \mathbf{g}, \\ Z^1(\mathbf{g}) &:= [\mathbf{g}, \mathbf{g}] = \mathbf{g}^1, \\ \cdots \quad &\cdots \quad \cdots \\ Z^n(\mathbf{g}) &:= [\mathbf{g}, Z^{n-1}(\mathbf{g})] = [\mathbf{g}, [\mathbf{g}, \cdots [\mathbf{g}, \mathbf{g}] \cdots] = \mathbf{g}^n. \end{aligned}$$

+) Dãy

$$\{Z(\mathbf{g})\}: \qquad Z^0(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \supseteq \mathbf{g}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{g}^n \supseteq \cdots$$

được gọi là *dãy tâm giảm* của **g**.

+) Đại số Lie **g** được gọi là *lũy linh* nếu dãy tâm giảm $\{Z(\mathbf{g})\}$ dừng sau hữu hạn bước, tức là tồn tại số tự nhiên n để $Z^n(\mathbf{g}) = \{0\}$.

+) Số n thỏa mãn điều kiện trên được gọi là *bậc lũy linh* của đại số Lie **g**.

Từ định nghĩa trên, ta có (xem [6]):

+) Đại số con của đại số lũy linh là lũy linh, có nghĩa là: Cho **g** là đại số lũy linh và **a** là đại số con của **g**. Khi đó **a** lũy linh.

+) Cho **g** là đại số lũy linh và $Z(\mathbf{g})$ là tâm của **g**. Nếu $\mathbf{g}/Z(\mathbf{g})$ là lũy linh thì $Z(\mathbf{g})$ lũy linh.

Ví dụ 3. Xét đại số Lie các ma trận trên trường số phức $\mathbb{C}$ là

$$\mathbf{g} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X^T & -Y^T & z \\ 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, x_i, y_i, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Khi đó **g** là lũy linh và **g** được gọi là đại số Lie Heisenberg.

1.1.8. Tiêu chuẩn lũy linh. *Đại số Lie **g** là lũy linh khi và chỉ khi một trong các điều kiện tương đương sau được thỏa mãn.*

i) Tồn tại số tự nhiên n để sao cho $Z^{n+1}(\boldsymbol{g}) = \{0\}$.

ii) Tồn tại số tự nhiên n để với $\forall u_1, u_2, \cdots, u_{n+1} \in \boldsymbol{g}$, ta có

$$[\cdots[u_1, [u_2, \cdots, [u_n, u_{n+1}], \cdots] = 0.$$

*iii) Tồn tại một dãy $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{i}_0 \supset \boldsymbol{i}_1 \supset \cdots \boldsymbol{i}_n \supset \boldsymbol{i}_{n+1} = \{0\}$ hữu hạn các ideal giảm của **g** sao cho $\boldsymbol{i}_i/\boldsymbol{i}_{i+1}$ chứa trong tâm $Z(\boldsymbol{g}/\boldsymbol{i}_{i+1})$, tức là $[\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}_i] \subset \boldsymbol{i}_{i+1}$.*

1.1.9. Tiêu chuẩn Cartan về lũy linh. (xem [6]) *Đại số Lie **g** là lũy linh khi và chỉ khi*

$$tr(ad_x \circ ad_y) = 0, \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{g}.$$

Vậy qua tiêu chuẩn Cartan ta thấy, đại số Lie **g** là lũy linh khi và chỉ khi dạng Killing là triệt tiêu trên **g**.

1.1.10. Định lý. *Cho **g** là đại số Lie trên trường số phức $\mathbb{C}$. Đặt*

$$\begin{aligned} D^0(\boldsymbol{g}) &= \boldsymbol{g}, \\ D^1(\boldsymbol{g}) &= [\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}], \\ D^2(\boldsymbol{g}) &= [D^1(\boldsymbol{g}), D^1(\boldsymbol{g})], \\ \cdots\cdots & \cdots \cdots\cdots\cdots \\ D^n(\boldsymbol{g}) &= [D^{n-1}(\boldsymbol{g}), D^{n-1}(\boldsymbol{g})] \quad (n > 1). \end{aligned}$$

Khi đó

$$D^i(\boldsymbol{g}) \lhd \boldsymbol{g} \text{ và } D^i(\boldsymbol{g}) \supseteq D^{i+1}(\boldsymbol{g}), \forall i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Từ kết quả của Định lý trên ta có dãy giảm các iđêan của **g** là:

$$\{D^n(\mathbf{g})\} : \qquad \mathbf{g} = D^0(\mathbf{g}) \supseteq D^1(\mathbf{g}) \supseteq D^2(\mathbf{g}) \cdots \supseteq D^n(\mathbf{g}) \supseteq \cdots$$

1.1.11. Định nghĩa. Cho **g** là đại số Lie trên trường số phức $\mathbb{C}$.

+) Dãy $\{D^n(\mathbf{g})\}$ xây dựng ở trên được gọi là *dãy đạo giảm* của **g**.

+) Đại số Lie **g** được gọi là *giải được* nếu dãy đạo giảm $\{D^n(\mathbf{g})\}$ của **g** dừng sau hữu hạn bước, tức là $\exists n \in \mathbb{N}$ sao cho $D^n(\mathbf{g}) = \{0\}$.

+) Số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện trên gọi là *bậc giải được* của **g**.

Từ định nghĩa đại số Lie lũy linh và đại số Lie giải được, ta có một số tính chất sau.

1.1.12. Mệnh đề. *Cho* $\boldsymbol{g}$ *là đại số Lie trên trường số phức* $\mathbb{C}$. *Ta có:*

i) Giả sử $\boldsymbol{a}$ *là đại số Lie con của* $\boldsymbol{g}$. *Nếu* $\boldsymbol{g}$ *là giải được và thì* $\boldsymbol{a}$ *giải được.*

ii) Nếu $\boldsymbol{g}$ *là giải được và* $\varphi : \boldsymbol{g} \longrightarrow \boldsymbol{g}_1$ *là một đồng cấu đại số Lie. Khi đó* $Im(\boldsymbol{g})$ *là một đại số Lie giải được.*

iii) Giả sử $\boldsymbol{h}$ *là ideal của* $\boldsymbol{g}$. *Nếu* $\boldsymbol{h}$ *và* $\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}$ *là giải được thì* $\boldsymbol{g}$ *giải được.*

iv) Giả sử $\boldsymbol{h}$ *và* $\boldsymbol{k}$ *là hai ideal của* $\boldsymbol{g}$. *Nếu* $\boldsymbol{h}$ *và* $\boldsymbol{k}$ *là giải được thì* $\boldsymbol{h} + \boldsymbol{k}$ *giải được.*

v) *Nếu* $\boldsymbol{g}$ *lũy linh thì* $\boldsymbol{g}$ *giải được.*

vi) *Nếu* $\boldsymbol{g}$ *giải được thì đại số con* $\boldsymbol{g}_1 = [\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}]$ *lũy linh.*

vii) *Cho* $\boldsymbol{h}_i (i = \overline{0, n})$ *là các iđêan của* $\boldsymbol{g}$ *sao cho*

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}_0 \supseteq \boldsymbol{h}_1 \supseteq \boldsymbol{h}_2 \supseteq \cdots \boldsymbol{h}_{n-1} \supseteq \boldsymbol{h}_n \supseteq = \{0\}.$$

Nếu $\boldsymbol{h}_{k-1}/\boldsymbol{h}_k$ *giao hoán với mọi* $1 \leq k \leq n$ *thì* $\boldsymbol{g}$ *giải được.*

1.1.13. Tiêu chuẩn Cartan về giải được. *Cho* $\boldsymbol{g}$ *là đại số Lie trên trường số phức* $\mathbb{C}$ *và* $\mathcal{K}$ *là dạng Kiling của* $\boldsymbol{g}$. *Khi đó* $\boldsymbol{g}$ *giải được khi và chỉ khi*

$$\mathcal{K}(x, y) = 0, \forall x \in \boldsymbol{g}, \forall y \in [\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}].$$

Có nghĩa là dạng Killing $\mathcal{K}$ *triệt tiêu trên tích Đề các* $\boldsymbol{g} \times [\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}]$.

Ví dụ 4. Đại số Lie các ma trận $\mathbf{g} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$ là giải được.

Chứng minh. Trong **g** ta xét cơ sở

$$U = \left\{ U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Khi đó với $\forall X, Y, Z \in \mathbf{g}$, tồn tại duy nhất $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}(i = \overline{1,3})$ sao cho:

$$\begin{cases} X = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 \\ Y = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3 \\ Z = \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \gamma_3 U_3 \end{cases}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} ad_X = \alpha_1 ad_{U_1} + \alpha_2 ad_{U_2} + \alpha_3 ad_{U_3} \\ ad_Y = \beta_1 ad_{U_1} + \beta_2 ad_{U_2} + \beta_3 ad_{U_3} \\ ad_Z = \gamma_1 ad_{U_1} + \gamma_2 ad_{U_2} + \gamma_3 ad_{U_3} \end{cases}.$$

Theo Ví dụ 2, nếu $\mathcal{K}$ là dạng Kiling của **g** thì

$$\mathcal{K}(X, Y) = Tr(ad_X \circ ad_Y) = 2\alpha\beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall X, Y \in \mathbf{g}.$$

Suy ra ma trận biểu diễn của ad_X, ad_Y, ad_Z tương ứng là

$$M_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad M_Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad M_Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \end{bmatrix}.$$

Bây giờ bằng cách tính toán trực tiếp, ta có:

Ma trận biểu diễn của $ad[Y, Z]$ là $M_{[Y,Z]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2 & 0 & 0 \\ \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ma trận biểu diễn của $adX \circ ad[Y, Z]$ là $M_X.M_{[Y,Z]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1(y_2 z_1 - y_1 z_2) & 0 & 0 \\ x_1(y_3 z_1 - y_1 z_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Vậy

$$\mathcal{K}(X, [Y, Z]) = Tr(adX \circ ad[Y, Z]) = Tr(M_X.M_{[Y,Z]}) = 0, \forall X, Y, Z \in \mathbf{g}.$$

Do đó theo tiêu chuẩn Cartan về giải được thì **g** là giải được. □

1.1.14. Định nghĩa. Cho **g** đại số Lie hữu hạn chiều trên trường số phức $\mathbb{C}$ và $\varphi : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ là dạng song tuyến tính trên **g**. Đại số Lie **g** được gọi là *đại số Lie toàn phương,* nếu φ có các tính chất:

+) *Đối xứng,* có nghĩa là $\varphi(x, y) = \varphi(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbf{g}$.

+) *Không suy biến,* có nghĩa là nếu $\varphi(x, y) = 0, \forall y \in \mathbf{g}$ thì $x = 0$.

+) *Bất biến* (hay là *kết hợp*) có nghĩa là $\varphi([x, y], z) = \varphi(x, [y, z]) \forall x, y, z \in \mathbf{g}$.

Vậy, *đại số Lie toàn phương* là đại số Lie $\mathbf{g}$ trên trường $\mathbb{C}$ mà trên nó được trang bị một tích vô hướng bất biến, đối xứng và không suy biến. Đại số Lie toàn phương được ký hiệu là $(\mathbf{g}, \varphi)$.

Ví dụ 5. Cho $\mathbf{g} = GL(n, \mathbb{C})$ là đại số các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{C}$. Trên $\mathbf{g}$ ta định nghĩa:

+) Tích Lie: $[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in \mathbf{g}$.

+) Dạng song tuyến tính φ xác định bởi: $\varphi(A, B) = Tr(AB), \forall A, B \in \mathbf{g}$.

Khi đó $\mathbf{g}$ là một đại số Lie với tích Lie được xác định ở trên và dạng song tuyến tính φ đối xứng, không suy biến và bất biến. Vậy $\mathbf{g}$ là một đại số Lie toàn phương.

Ví dụ 6. Cho $\mathbf{g}$ là $\mathbb{C}-$ không gian vectơ sinh bởi hệ vectơ cơ sở $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. (Ký hiệu là $\mathbf{g} = span\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$).

+) Tích Lie không tầm thường trên $\mathbf{g}$ được xác định bởi:

$$[x_1, x_2] = x_2, [x_1, x_3] = -x_3, [x_2, x_3] = x_4.$$

+) Dạng song tuyến tính φ được xác định bởi $\varphi(x_1, x_4) = \varphi(x_2, x_3) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0.

Khi đó $\mathbf{g}$ cùng với tích Lie và dạng song tuyến tính định nghĩa ở trên là một đại số Lie toàn phương trên $\mathbb{C}$.

1.1.15. Định nghĩa. (xem [8]). Cho $(\mathbf{g}, \varphi)$ là đại số Lie toàn phương, V là không gian vectơ con của $\mathbf{g}$ và $\mathbf{i}$ là một iđêan của $\mathbf{g}$.

i) Phần tử $x \in \mathbf{g}$ được gọi là *tự đẳng hướng* nếu $\varphi(x, x) = 0$.

ii) V được gọi là *tự đẳng hướng hoàn toàn* nếu $\varphi(x, y) = 0, \forall x, y \in V$.

iii) $\mathbf{g}$ được gọi là *đại số Lie rút gọn* nếu tâm $Z(\mathbf{g})$ là tự đẳng hướng hoàn toàn.

iv) $\mathbf{g}$ được gọi là *đầy đủ* nếu $\mathbf{g} := [\mathbf{g}, \mathbf{g}]$.

v) $\mathbf{i}$ được gọi là *không suy biến* nếu $\varphi|_{\mathbf{i} \times \mathbf{i}}$ không suy biến.

vi) $\mathbf{i}$ được gọi là *đẳng hướng* nếu $\varphi|_{\mathbf{i} \times \mathbf{i}} = 0$.

vii) Tập hợp $V^\perp = \{x \in \mathbf{g} \mid \varphi(x,y) = 0, \forall y \in V\}$ được gọi là *thành phần trực giao* của V.

viii) $\mathbf{g}$ được gọi là *bất khả phân* nếu $\mathbf{g} = \mathbf{i}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{i}_2$ phân tích thành tổng trực tiếp trực giao của hai iđêan bất kỳ $\mathbf{i}_1$ và $\mathbf{i}_2$ của $\mathbf{g}$ thì $\mathbf{i}_1 = \{0\}$ hoặc $\mathbf{i}_2 = \{0\}$.

ix) $\mathbf{g}$ được gọi là *khả quy* nếu trong $\mathbf{g}$ tồn tại một iđêan $\mathbf{k}$ không tầm thường để sao cho $\varphi|_{\mathbf{k}\times\mathbf{k}}$ là dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến. Ngược lại, nếu không tồn tại iđêan $\mathbf{k}$ thỏa mãn điều kiện trên thì $\mathbf{g}$ được gọi là *bất khả quy*.

1.1.16. Định nghĩa. Hai đại số Lie toàn phương $(\mathbf{g}_1, \varphi_1)$ và $\mathbf{g}_2, \varphi_2)$ gọi là *đẳng cấu đẳng cự* nếu tồn tại một đẳng cấu đại số Lie $\Phi : \mathbf{g}_1 \longrightarrow \mathbf{g}_2$ thỏa mãn điều kiện

$$\varphi_1(x,y) = \varphi_2(\Phi(x), \Phi(y)), \quad \forall x, y \in \mathbf{g}_1.$$

Trong trường hợp này ta cũng nói Φ là *đẳng cấu đẳng cự*. Như vậy Φ là đẳng cấu đẳng cự khi và chỉ khi Φ vừa đẳng cấu, vừa đẳng cự. Nhưng tính chất đẳng cấu và đẳng cấu đẳng cự không tương đương nhau.

Cho $(\mathbf{g}, \varphi)$ là một đại số Lie toàn phương trên trường số phức $\mathbb{C}$ và $Der(\mathbf{g})$ đại số Lie các toán tử vi phân trên $\mathbf{g}$. Ký hiệu

$$Der_a(\mathbf{g}, \varphi) = \{f \in Der(\mathbf{g}) \mid \varphi(f(x), y) = -\varphi(x, f(y)), \forall x, y \in \mathbf{g}\}.$$

là tập hợp các toán tử vi phân f trên $\mathbf{g}$ phản xứng đối với φ.

Khi đó, $Der_a(\mathbf{g}, \varphi)$ là đại số Lie con của $Der(\mathbf{g})$.

1.1.17. Định nghĩa. Đại số Lie con $Der_a(\mathbf{g}, \varphi)$ xây dựng như trên được gọi là *đại số Lie các toán tử vi phân phản xứng* của $\mathbf{g}$.

Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie trên trường số phức $\mathbb{C}$. Ký hiệu:

+) $\mathcal{F}(\mathbf{g})$ là tập hợp tất cả các dạng song tuyến tính đối xứng, bất biến trên $\mathbf{g}$.

+) $\mathcal{B}(\mathbf{g})$ là tập hợp tất cả các tích vô hướng bất biến (tức là các dạng song tuyến tính đối xứng bất biến, không suy biến) trên $\mathbf{g}$

Khi đó ta dễ dàng chứng minh được:

+) $\mathcal{F}(\mathbf{g})$ lập thành một không gian vectơ trên $\mathbb{C}$.

+) $\mathcal{B}(\mathbf{g})$ là không gian vectơ con của $\mathcal{F}(\mathbf{g})$.

1.1.18. Định nghĩa. Cho $(\mathbf{g}, \varphi)$ là $\mathbb{C}-$ đại số Lie toàn phương. *Chiều toàn phương* của $\mathbf{g}$ là chiều của không gian vectơ $\mathcal{B}(\mathbf{g})$ và được ký hiệu là $d_q(\mathbf{g})$.
Nghĩa là, $d_q(\mathbf{g}) = dim_{\mathbb{C}}\mathcal{B}(\mathbf{g})$.

1.2 Đối đồng điều của đại số Lie

1.2.1. Định nghĩa (xem [1]) Cho $\mathbf{g}$ là đại số Lie, V là một $\mathbb{C}-$ không gian vectơ, $\dim(V) < \infty$ (hữu hạn) và $\rho : \mathbf{g} \longrightarrow End(V)$ là một đồng cấu đại số Lie từ $\mathbf{g}$ vào đại số $End(V)$ chứa các đồng cấu trên V, có nghĩa là

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)], \quad \forall X, Y \in \mathbf{g},$$

hay ρ là một biểu diễn của $\mathbf{g}$ trong V.

Với mỗi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}^* \backslash \{0\}$, ký hiệu $C^k(\mathbf{g}, V)$ là không gian các ánh xạ $k-$ tuyến tính phản xứng từ $\mathbf{g} \times \mathbf{g} \times \cdots \times \mathbf{g}$ vào V và quy ước $C^0(\mathbf{g}, V) = V$. Đặt $C(\mathbf{g}, V) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\mathbf{g}, V)$. Xây dựng ánh xạ $\delta_k : C^k(\mathbf{g}, V) \longrightarrow C^{k+1}(\mathbf{g}, V)$ như sau:

$$\begin{aligned} \delta_k f(x_0, x_1, \ldots, x_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho(x_i)(f(x_0, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_k)) \\ &+ \sum_{i<j}^{k} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_0, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_k), \end{aligned}$$

với mọi $f \in C^k(\mathbf{g}, V); x_0, \ldots, x_k \in \mathbf{g}$ và ở đây ký hiệu $\widehat{x}_i$ để chỉ x_i không có trong công thức. Khi đó ánh xạ δ_k xây dựng như trên được gọi là *toán tử đối bờ* và dễ dàng chứng minh được $\delta_k \circ \delta_{k-1} = 0$. Nếu chúng ta không quan tâm đến chỉ số k thì ta đồng nhất ký hiệu $\delta := \delta_k$. Do đó $\delta^2 = 0$.

Một phần tử $f \in C^k(\mathbf{g}, V)$ gọi là một *$k-$ đối chu trình* nếu $\delta f = 0$ và f gọi là một *$k-$ đối bờ* nếu tồn tại $g \in C^{k+1}(\mathbf{g}, V)$ sao cho $f = \delta g$.

Ký hiệu $Z^k(\mathbf{g}, V)$ là tập hợp các $k-$ đối chu trình và $B^k(\mathbf{g}, V)$ là tập hợp các $k-$ đối bờ, tức là $Z^k(\mathbf{g}, V) = Ker\delta_k$ và $B^k(\mathbf{g}, V) = Im\delta_{k-1}$. Từ tính chất $\delta^2 = 0$ ở trên, chứng tỏ $B^k(\mathbf{g}, V) \subset Z^k(\mathbf{g}, V)$ và do đó ta có không gian thương $Z^k(\mathbf{g}, V)/B^k(\mathbf{g}, V)$. Không gian thương này thường được ký hiệu là $H^k(\mathbf{g}, V)$ và được gọi là *nhóm đối đồng điều thứ k* của $\mathbf{g}$ với hệ số trong V. Mỗi phần tử thuộc $H^k(\mathbf{g}, V)$ cũng được gọi là *một $k-$ chu trình* (xem [1]).

Bài toán mô tả tường minh $H^k(\mathbf{g}, V)$ nhóm đối đồng điều của một đại số Lie $\mathbf{g}$ cho trước hoặc ít nhất là tính được chiều của nó đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Ví dụ như trong [2] người ta đã xây dựng được công thức tính số chiều của $H^k(\mathbf{g}, V)$ thông qua số chiều của **g** và số chiều của V, như sau: *Nếu* $n = \dim(\boldsymbol{g}), m = \dim(V)$ *thì*

$$\dim\big(H^k(\mathbf{g}, V)\big) = \dim(Ker\delta_{k-1}) + \dim(Ker\delta_k) - m\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix},$$

trong đó $\binom{n}{k-1} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)(k-2)\cdots 2.1}$.

Trong trường hợp $V = \mathbb{C}$ thì $C^0(\mathbf{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ và $C^k(\mathbf{g}, \mathbb{C})$ không gian các ánh xạ $k-$ tuyến tính phản xứng từ $\mathbf{g} \times \mathbf{g} \times \cdots \times \mathbf{g}$ vào $\mathbb{C}$ được định nghĩa là

$$\begin{aligned} C^k(\mathbf{g}, \mathbb{C}) &= \{\varphi : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \times \cdots \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ là } k- \text{ tuyến tính phản xứng } \} \\ &= \Lambda^k(\mathbf{g}^*) \text{ là không gian các k - dạng phản xứng trên đối ngẫu } \mathbf{g}^*. \end{aligned}$$

Mặt khác mỗi biểu diễn ρ của **g** trong $\mathbb{C}$ là một đồng cấu đại số Lie $\rho : \mathbf{g} \longrightarrow End(\mathbb{C})$, do đó $\rho(x) = 0, \forall x \in \mathbf{g}$ và toán tử đối bờ δ được xác định là

$$\begin{aligned} \delta_k(f)(x_0, x_1, \ldots, x_k) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\rho(x_i)(f(x_0, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_k)) \\ &+ \sum_{i<j}^{k}(-1)^{i+j}f([x_i, x_j], x_0, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\delta_k f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i<j}^{k}(-1)^{i+j}f([x_i, x_j], x_0. \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_k),$$

với mọi $f \in C^k(\mathbf{g}, \mathbb{C}); x_0, \ldots, x_k \in \mathbf{g}$ và ở đây ký hiệu $\widehat{x}_i$ để chỉ x_i không có trong công thức.

1.2.2. Định nghĩa. Cho **g** là một đại số Lie. Dạng song tuyến tính, đối xứng, không suy biến $\omega : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ được gọi là *một cấu trúc symplectic* trên **g**, nếu:

$$\omega([x, y], z) + \omega([y, z], x) + \omega([z, x], y), \qquad x, y, z \in \mathbf{g}.$$

Ví dụ 1. Nếu **g** là đại số Lie $sl_2(\mathbb{C})$ thì Khi đó $H^2(\mathbf{g}, \mathbb{C}) = \{0\}$.

Chứng minh. Gọi

$C^2(\mathbf{g}), \mathbb{C}) = \{\varphi : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi$ là $2-$ tuyến tính phản xứng $\}$

là không gian các ánh xạ $2-$ tuyến tính phản xứng từ $\mathbf{g} \times \mathbf{g}$ vào $\mathbb{C}$.

$Z^2(\mathbf{g}), \mathbb{C})$ là tập hợp các $2-$ chu trình của $\mathbf{g}$ trên $\mathbb{C}$.

$B^2(\mathbf{g}), \mathbb{C})$ là tập hợp các $2-$ đối bờ của $\mathbf{g}$ trên $\mathbb{C}$.

Vì $\dim(\mathbf{g}) = 3$, do đó giả sử $\mathbf{g} = span\{e_1, e_2, e_3\}$ là không gian sinh bởi hệ vectơ cơ sở $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ và tích Lie $[.,.]$ được xác định bởi:

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -2e_1 \text{ và } [e_2, e_3] = 2e_2.$$

Ta lấy $\omega \in C^2(\mathbf{g}), \mathbb{C})$. Nếu $\omega \in Z^2(C^2(\mathbf{g}), \mathbb{C}))$ thì

$$\omega([e_i, e_j], e_k) - \omega([e_i, e_k], e_j) + \omega([e_j, e_k], e_i) = 0, \forall i, j, k = 1, 2, 3.$$

Không mất tính tổng quát ta xét $(i, j, k) = (1, 2, 3)$. Khi đó ta có

$$\omega([e_1, e_2], e_3) - \omega([e_1, e_3], e_2) + \omega([e_2, e_3], e_1) = 0.$$

Vì $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -2e_1, [e_2, e_3] = 2e_2$, nên

$$\omega(e_3, e_3) + 2\omega(e_1, e_2) + 2\omega(e_2, e_1) = 0.$$

Vì biểu thức cuối cùng hiển nhiên đúng, nên $\forall \omega \in C^2(\mathbf{g}), \mathbb{C})$ thì $\omega \in Z^2(sl_2(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

Mặt khác, vì $\{[e_1, e_2], [e_1, e_3], [e_2, e_3]\}$ tạo thành một cơ sở của $\mathbf{g}$ nên $\forall \omega \in C^2(\mathbf{g}), \mathbb{C})$ ta luôn tìm được $f \in \mathbf{g}$ để $\omega(e_i, e_j) = f([e_i, e_j])$. Điều này chứng tỏ $B^2(\mathbf{g}), \mathbb{C}) = Z^2(\mathbf{g}), \mathbb{C})$. Vậy $H^2(\mathbf{g}), \mathbb{C}) = \{0\}$. $\square$

Chương 2

Đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie toàn phương

Nội dung trong chương này, chúng tôi trình bày lại một cách có hệ thống các khái niệm cơ bản và những kết quả cần thiết liên quan đến nhóm đối đồng điều của đại số Lie toàn phương. Sử dụng các kết quả đó để tính nhóm đối đồng điều thứ 2 *của đại số Lie kim cương và đại số Lie kiểu Jordan.*

2.1 Đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie kim cương

2.1.1. Định nghĩa. Một không gian vectơ V hữu hạn $(\dim(V) = n)$ trên trường số phức $\mathbb{C}$ được gọi là không gian vectơ *toàn phương* $n-$ chiều nếu tồn tại $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ là dạng song tuyến tính đối xứng, không suy biến trên V. Khi đó người ta ký hiệu là (V, φ).

Giả sử V^* là không gian đối ngẫu của V. Ký hiệu $\Lambda^k(V^*)$ là đại số Grassmann chứa các dạng $k-$ tuyến tính phản xứng trên V^* với tích ngoài $\wedge$ và l_x là ánh xạ đạo hàm của $\Lambda(V^*)$, với $x \in V$. Khi đó l_x được xác định như sau: (xem [1])

$$\begin{aligned} l_x(\Omega)(y_1, \ldots, y_k) &= \Omega(x, y_1, \ldots, y_k), \\ &\quad \forall \Omega \in \Lambda^{k+1}(V^*); y_1, \ldots, y_k \in V, (k \geq 0). \end{aligned}$$

Giả sử $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V. Khi đó *tích super*

- *Poisson* trên không gian $\Lambda(V^*)$ được định nghĩa như sau:

$$\{\Omega, \Omega^{'}\} := (-1)^{k+1}\sum_{j=1}^{n} l_{e_j}(\Omega) \wedge l_{e_j}(\Omega^{'}), \forall \Omega \in \Lambda^k(V^*), \forall \Omega^{'} \in \Lambda(V^*).$$

Từ định nghĩa tích super - Poisson ta thấy:

+) Tích super - Poisson định nghĩa ở trên không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở trực chuẩn E của V.

+) Nếu $\alpha, \alpha^{'} \in V^*$ thì

$$\{\alpha, \Omega\} = l_{\phi^{-1}(\alpha)}(\Omega), \forall \Omega \in \Lambda(V^*)$$

và

$$\{\alpha, \alpha^{'}\} = B(\phi^{-1}(\alpha), \phi^{-1}(\alpha^{'})).$$

Với mỗi dạng $k-$ tuyến tính phản xứng $\Omega \in \Lambda^k(V^*)$, xây dựng ánh xạ $ad_P(\Omega) : \Lambda(V^*) \longrightarrow \Lambda(V^*)$, xác định bởi:

$$ad_P(\Omega)(\Omega^{'}) = \{\Omega, \Omega^{'}\}, \quad \forall \Omega \in \Lambda(V^*).$$

Khi đó ta chứng minh được $\forall \Omega^{'} \in \Lambda^{k^{'}}(V^*), \Omega^{''} \in \Lambda(V^*)$ thì

$$ad_P(\Omega)(\{\Omega^{'}, \Omega^{''}\}) = \{ad_P(\Omega)(\Omega^{'})\Omega^{''}\} + (-1)^{kk^{'}}\{\Omega, ad_P(\Omega)(\Omega^{'})\},$$

có nghĩa $ad_P(\Omega)$ là một siêu đạo hàm có bậc $k-2$ của đại số $\Lambda(V^*)$.

Điều này chứng tỏ $\Lambda(V^*)$ là một đại số phân bậc với tích super - Poisson.

2.1.2. Định nghĩa. (xem [7]). Cho $(\mathbf{g}, \varphi)$ là một đại số Lie toàn phương. $3-$ *dạng liên kết với* **g** là $3-$ dạng tuyến tính

$$\mathcal{I} : \quad \mathbf{g} \times \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y, z) \longmapsto \mathcal{I}(x, y, z) = B([x, y], z),$$

thỏa mãn các điều kiện:

+) $\mathcal{I}$ là $3-$ dạng phản xứng trên **g**.

+) Nếu ký hiệu $\{., .\}$ là tích super - Poisson trên $\Lambda(\mathbf{g}^*)$ đại số Grassmann chứa các dạng đa tuyến tính phản xứng trên $\mathbf{g}^*$ với tích ngoài $\wedge$, thì $\{\mathcal{I}, \mathcal{I}\} = 0$.

Từ định nghĩa trên, ta thấy nếu **g** là không gian vectơ toàn phương hữu hạn chiều được trang bị dạng song tuyến tính đối xứng không suy biến φ và $\mathcal{I}$ là một $3-$ dạng phản xứng trên **g** thỏa mãn điều kiện $\{\mathcal{I}, \mathcal{I}\} = 0$. Khi đó $(\mathbf{g}, \varphi)$ là một đại số Lie toàn phương với $3-$ dạng liên kết $\mathcal{I}$, trong đó tích Lie được xác định bởi:

$$[x, y] = \phi^{-1}(l_{x\wedge y}(I)), \quad \forall x, y \in \mathbf{g}.$$

Do đó thay cho việc nghiên cứu đại số Lie toàn phương **g** trên một không gian vectơ V hữu hạn chiều ta nghiên cứu các tính chất của $3-$ dạng liên kết với **g**.

2.1.3. Định lý. (xem [7]) *Đẳng cấu*

$$\Phi : Der_a(\boldsymbol{g}, \varphi) \longrightarrow Z^2(\boldsymbol{g}, \mathbb{C}) = \{\Omega \mid \{I, \Omega\} = 0\}$$

cảm sinh đẳng cấu

$$\overline{\Phi} : ad(\boldsymbol{g}) \longrightarrow l_{\boldsymbol{g}}(I) = \{l_X(I) \mid X \in \boldsymbol{g}\}.$$

2.1.4. Hệ quả. *Với những ký hiệu ở trên, ta có:*

+) $\{l_x(I), l_y(I)\} = l_{[x,y]}(I)$.

+) $H^2(\boldsymbol{g}, \mathbb{C}) \cong Der_a(\boldsymbol{g}, B)/ad(\boldsymbol{g})$.

Từ Hệ quả 2.1.4, ta thấy khi mô tả $H^2(\mathbf{g}, \mathbb{C})$ nhóm đối đồng điều của đại số Lie toàn phương **g**, ta có thể mô tả qua các đạo hàm phản xứng của **g**. Mặt khác, nếu $\omega : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ là cấu trúc symplectic trên đại số Lie **g**, thì

$$\omega([x, y], z) + \omega([y, z], x) + \omega([z, x], y) = 0, \quad x, y, z \in \mathbf{g}.$$

Do đó cấu trúc symplectic ω trên đại số Lie toàn phương $(\mathbf{g}, \varphi)$ tương đương với đạo hàm Φ bất biến, đối xứng định nghĩa bởi $\omega(x, y) = \varphi(\Phi(x), y), x, y \in \mathbf{g}$. Vậy nếu ω là symplectic thì ω chính xác là một $2-$ dạng ω thỏa mãn điều kiên $\{I, \omega\} = 0$. Nếu **g** có cấu trúc ω như vậy, thì chúng ta gọi $(\mathbf{g}, \varphi, \omega)$ là *đại số Lie toàn phương symplectic*.

2.1.5. Định lý. *Cho* $(\mathbf{g}, \varphi, \omega)$ *là đại số Lie toàn phương symplectic và ánh xạ* $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^*, \phi(x) \longmapsto B(x, .)$. *Khi đó ánh xạ*

$$\Phi : ad(\mathbf{g}) \longrightarrow ad(\mathbf{g}), \Phi(ad(x)) \mapsto ad(\phi^{-1}(l_x(\omega)))$$

là đạo hàm khả nghịch của $ad(\mathbf{g})$.

2.1.6. Mệnh đề. *Giả sử* $\mathbf{g} = \mathbf{g}_4$ *là đại số Lie kim cương* $4-$ *chiều sinh bởi hệ vectơ cơ sở là* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *(ký hiệu là* $\mathbf{g}_4 = span\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$*), với tích Lie được xác định bởi:* $\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 \\ [e_4, e_1] = -e_1 \\ [e_4, e_2] = e_2 \\ [e_3, e_1] = [e_3, e_2] = [e_4, e_3] = 0 \end{cases}$

và dạng song tuyến tính đối xứng φ *được cho bởi* $\varphi(e_4, e_1) = \varphi(e_2, e_3) = 1$, *các trường hợp khác bằng* 0. *Khi đó* $H^2(\mathbf{g}_4) = 0$.

Chứng minh. Gọi Φ là một đạo hàm phản xứng của $\mathbf{g}_4$. Ký hiệu $Z(\mathbf{g}_4)$ là tâm của $\mathbf{g}_4$. Khi đó theo định nghĩa của tâm và định nghĩa tích Lie ở trên $\mathbf{g}_4$, ta tính được $Z(\mathbf{g}_4) = \mathbb{C}e_4$ là không gian ổn định đối với Φ, tức là $\Phi(Z(\mathbf{g}_4)) \subset Z(\mathbf{g}_4)$. Do đó ta có thể giả sử $\Phi(e_4) = xe_4, \forall x \in \mathbb{C}$. Vì Φ phản xứng, nên ta có:

$$\varphi(\Phi(e_1), e_4) = -\varphi(e_1, \Phi(e_4)) = -\varphi(e_1, xe_4) = -x.$$

Vì $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là cơ sở của $\mathbf{g}_4$. Do đó $\exists x, y, z, w \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\Phi(e_4) = -xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4.$$

Mặt khác $[\mathbf{g}_4, \mathbf{g}_4]$ cũng là một không gian ổn định đối với Φ, nên ta có thể viết

$$\Phi(e_2) = ae_2 + be_3 + ce_4 \text{ và } \Phi(e_3) = a_1e_2 + b_1e_3 + c_1e_4, \forall a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{C}.$$

Mà

$$\Phi(e_2) = \Phi([e_1, e_2]) = [\Phi(e_1), e_2] + [e_1, \Phi(e_2)].$$

Vậy so sánh với sự phân tích trên, suy ra $x = b = 0$ và $c = -z$.

Làm tương tự đối với $\Phi(e_3)$, ta thu được $c_1 = -y$ và $a_1 = 0$.

Vì Φ có tính chất phản xứng, nên từ đẳng thức $\varphi(\Phi(e_1), e_1) = 0 \Rightarrow w = 0$. Tương tự $\varphi(\Phi(e_2), e_3) = -\varphi(e_2, \Phi(e_3))$, suy ra $a = -b_1$. Do đó ta có ma trận của Φ đối với cơ sở $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là $A_\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & a & 0 & 0 \\ z & 0 & -a & 0 \\ 0 & -z & -y & 0 \end{bmatrix}$, với $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Mặt khác, nếu chúng ta tính toán trực tiếp trên cơ sở E đã chọn, thì

$$\Phi = ad(ae_1 - be_2 + ce_3).$$

Do đó Φ là một đạo hàm trong của $\mathbf{g}_4$. Vậy, trong đại số Lie $\mathbf{g}_4$ mọi đạo hàm phản xứng đều là đạo hàm trong. Suy ra $H^2(\mathbf{g}_4, \mathbb{C}) = \{0\}$. $\square$

2.1.7. Mệnh đề. *Giả sử $\mathbf{g} = \mathbf{g}_5$ là đại số Lie kim cương $5-$ chiều sinh bởi hệ vectơ cơ sở là $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ (ký hiệu là $\mathbf{g}_5 = span\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$), với tích Lie được xác định bởi*

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_5, \quad [e_2, e_3] = e_4$$

và dạng song tuyến tính φ được xác định: $\varphi(e_1, e_4) = \varphi(e_2, e_5) = \varphi(e_3, e_3) = 1$, các trường hợp còn lại bằng 0. Khi đó

$$H^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) = span\{[e_1^* \wedge e_2^*], [e_5^* \wedge e_1^*], [e_4^* \wedge e_1^* - e_5^* \wedge e_2^*]\}.$$

Chứng minh. Giả sử I là $3-$ dạng liên kết của $\mathbf{g}_5$, khi đó từ sự xác định dạng song tuyến tính φ ở trên ta tính được $I = x_1^* \wedge x_2^* \wedge t^*$. Mặt khác từ công thức xác định $B^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C})$, ta có:

$$B^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) = \{\omega \in \Lambda^2(\mathbf{g}^*) \mid \omega((x, y) = f(x, y), f \in \mathbf{g}^*\} = \{l_x(I) \mid x \in \mathbf{g}\},$$

$\Rightarrow B^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) = span\{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*\}$ là không gian vectơ sinh bơi hệ vectơ cơ sở $\{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*\}$.

Mặt khác,theo định nghĩa ta có: $Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) = \{\omega \in \Lambda^2((\mathbf{g}_5^*) \mid \{I, \omega\} = 0\}$.

Bây giờ ta sự dụng công thức tính tích super - Poisson được xây dựng ở trong ([7]), ta có:

$$\begin{aligned}\{I, e_1^* \wedge e_2^*\} &= \{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*, e_1^* \wedge e_2^*\} = \varphi(e_4, e_4)e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_2^* \\ &- \varphi(e_4, e_5)e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* - \varphi(e_5, e_4)e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_2^* \\ &+ \varphi(e_5, e_4)e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* + \varphi(e_3, e_4)e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_2^* \\ &- \varphi(e_3, e_5)e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_1^* = 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow e_1^* \wedge e_2^* \in Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C})$.

Tính hoàn toàn tương tự như trên ta thu được:

$$\begin{cases}\{I, e_1^* \wedge e_3^*\} = 0 \Rightarrow e_1^* \wedge e_3^* \in Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) \\ \{I, e_2^* \wedge e_3^*\} = 0 \Rightarrow e_2^* \wedge e_3^* \in Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) \\ \{I, e_4^* \wedge e_2^*\} = 0 \Rightarrow e_4^* \wedge e_2^* * \in Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) \\ \{I, e_5^* \wedge e_1^*\} = 0 \Rightarrow e_5^* \wedge e_1^* \in Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) \\ \{I, e_4^* \wedge e_1^* - e_5^* \wedge e_2^*\} = 0 \Rightarrow e_4^* \wedge e_1^* - e_5^* \wedge e_2^* \in Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}).\end{cases}$$

Vậy

$Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) = span\{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*, e_4^* \wedge e_2^*, e_5^* \wedge e_1^*, e_4^* \wedge e_1^* - e_5^* \wedge e_2^*\}$

là không gian sinh bởi hệ vectơ cơ sở

$$\{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*, e_4^* \wedge e_2^*, e_5^* \wedge e_1^*, e_4^* \wedge e_1^* - e_5^* \wedge e_2^*\}.$$

Tóm lại, từ việc mô tả $B^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C})$ và $Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C})$ ở trên ta có:

$$H^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) = Z^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C})/B^2(\mathbf{g}_5, \mathbb{C}) = span\{[e_1^* \wedge e_2^*], [e_5^* \wedge e_1^*], [e_4^* \wedge e_1^* - e_5^* \wedge e_2^*]\}$$

là không gian sinh bởi hệ vectơ cơ sở $\{[e_1^* \wedge e_2^*], [e_5^* \wedge e_1^*], [e_4^* \wedge e_1^* - e_5^* \wedge e_2^*]\}$. □

2.1.8. Mệnh đề. *Giả sử $\mathbf{g} = \mathbf{g}_6$ là đại số Lie kim cương $6-$ chiều sinh bởi hệ vectơ cơ sở là $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ với tích Lie được xác định bởi:*

$$[u_1, u_2] = u_6, [u_2, u_3] = u_4 \text{ và } [u_3, u_1] = u_5$$

và dạng song tuyến tính φ được xác định: $\varphi(u_1, u_4) = \varphi(u_2, u_5) = \varphi(u_3, u_6) = 1$, các trường hợp khác bằng 0. Khi đó

$$\begin{aligned}H^2(\mathbf{g}, \mathbb{C}) = span\{&[u_1^* \wedge u_5^*], [u_1^* \wedge u_6^*], [u_2^* \wedge u_4^*], [u_2^* \wedge u_6^*], [u_3^* \wedge u_4^*], [u_3^* \wedge u_5^*], \\ &[u_4^* \wedge u_1^* - u_5^* \wedge u_2^*], [u_4^* \wedge u_1^* - u_6^* \wedge u_3^*]\}.\end{aligned}$$

Chứng minh. Lập luận tương tự như trong phép chứng minh của Mệnh đề 2.1.7, đối với đại số kim cương $\mathbf{g}_6$ ta tính được:

$B^2(\mathbf{g}_6, \mathbb{C}) = \{l_x(I) \mid x \in \mathbf{g}\} = span\{u_1^* \wedge u_2^*, u_2^* \wedge u_3^*, u_3^* \wedge u_1^*\}$

và

$$Z^2(\mathbf{g}_6, \mathbb{C}) = span\{u_1^* \wedge u_2^*, u_2^* \wedge u_3^*, u_3^* \wedge u_1^*, u_1^* \wedge u_5^*, u_1^* \wedge u_6^*, u_2^* \wedge u_4^*, u_2^* \wedge u_6^*, u_3^* \wedge u_4^*, u_3^* \wedge u_5^*, u_4^* \wedge u_1^* - u_5^* \wedge u_2^*, u_4^* \wedge u_1^* - u_6^* \wedge u_3^*\}.$$

Vậy

$$H^2(\mathbf{g}, \mathbb{C}) = Z^2(\mathbf{g}, \mathbb{C})/B^2(\mathbf{g}, \mathbb{C}) = span\{[u_1^* \wedge u_5^*], [u_1^* \wedge u_6^*], [u_2^* \wedge u_4^*], [u_2^* \wedge u_6^*], [u_3^* \wedge u_4^*], [u_3^* \wedge u_5^*], [u_4^* \wedge u_1^* - u_5^* \wedge u_2^*], [u_4^* \wedge u_1^* - u_6^* \wedge u_3^*]\}.$$

□

Trong các mệnh đề trên chúng ta đã mô tả được nhóm đối đồng điều thứ 2 cho một số đại số Lie kim cương toàn phương với số chiều bằng $4, 5, 6$. Bây giờ chúng ta giải bài toán đó cho đại số Lie kim cương toàn phương tổng quát.

2.1.9. Định lý . *Đặt $\mathbb{C}_*^n = (\mathbb{C}\backslash\{0\})^n (n \in \mathbb{N}^*)$ và $\Gamma := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}_*^n$. Giả sử $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{2n+2}$ là đại số Lie kim cương phức $(2n+2)-$ chiều sinh bởi hệ vectơ cơ sở là $\{e_0, e_1, \dots, e_n, u_0, u_1, \dots, u_n\}$ với tích Lie không tầm thường được xác định như sau:*

$$[u_0, e_1] = \lambda_i e_i, [u_0, u_i] = -\lambda_i u_i, [e_i, u_i] = \lambda_i e_0; \quad 1 \le i \le n.$$

và dạng song tuyến tính φ xác định bởi:

$$\begin{cases} \varphi(e_i, u_i) = 1; & 0 \le i \le n \\ \varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_i, u_j) = \varphi(u_i, u_j) = 0, & 0 \le i \ne j \le n. \end{cases}$$

Khi đó $H^2(\mathbf{g}_{2n+2}, \mathbb{C})$ là nhóm đối đồng điều thứ 2 của $\mathbf{g}_{2n+2}$ là một trong các trường hợp sau:

$$\{[e_i^* \wedge e_j^*] \mid \lambda_i + \lambda_j = 0, 1 \le i < j \le n\},$$
$$\{[u_i^* \wedge u_j^*] \mid \lambda_i + \lambda_j = 0, 1 \le i < j \le n\},$$
$$\{[e_i^* \wedge u_j^*] \mid \lambda_i - \lambda_j = 0, 1 \le i < j \le n\}.$$

Chứng minh. Trước hết ta chú ý rằng, $\lambda_i \in \Gamma := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}_*^n$ thì $\lambda_i \ne 0, \forall i = \overline{1, n}$ và các số phức $\lambda_i \in \Gamma, \forall i = \overline{1, n}$ không nhất thiết phải khác nhau.

Bây giờ chúng ta xây dựng tập con $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ gồm k số phức khác không thỏa mãn các điều kiện sau đây:

+) $\forall i = \overline{1, n}$, tồn tại duy nhất $j = \overline{1, k}$, sao cho $a_j = \lambda_i$ hoặc $a_j = -\lambda_i$.

++) $\forall j = \overline{1, k}$, tồn tại duy nhất $i = \overline{1, n}$, sao cho $a_j = \lambda_i$ hoặc $a_j = -\lambda_i$.

Với $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, chúng ta ký hiệu p_i (tương ứng q_i) là số lượng nhận giá trị a_i (tương ứng là $-a_i$) được lặp đi lặp lại trong $\Gamma := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Đặt $n_i = p_i + q_i, \forall i = \overline{1, n}$. Suy ra $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$. Từ đó ta thấy nếu cho trước bộ n số phức $\Gamma := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}_*^n$ thì các số $n_1, n_2, \ldots, n_k$ hoàn toàn được xác định và không khó để tìm ra nó.

Ký hiệu $\{e_0^*, e_1^*, \ldots, e_n^*, u_0^*, u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ là cơ sở đối ngẫu trong $\mathbf{g}_{2n+2}^*$ tương ứng với cơ sở $\{e_0, e_1, \ldots, e_n, u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ trong $\mathbf{g}_{2n+2}$. Đặt $P = span\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ và $Q = span\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ tương ứng là các không gian sinh bởi hệ vectơ cơ sở $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ và $\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$. Giả sử I là $3-$ dạng liên kết với $\mathbf{g}_{2n+2}$, khi đó I được xác định bởi

$$I = u_0^* \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* \wedge u_i^*.$$

Ký hiệu $\Omega_n := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* \wedge u_i^*$. Khi đó theo [4] ta có

$$B^2(\mathbf{g}_{2n+2}) = span\{u_0^* \wedge e_i^*, u_0^* \wedge u_i^*, \Omega_n : 1 \leq i \leq n\}.$$

• Ta thấy với giá trị $n = 1$ thì cho ta đại số Lie kim cương $4-$ chiều $\mathbf{g}_4$. Đối đồng điều thứ 2 của nó đã được tính trong Mệnh đề 2.1.6.

• Bây giờ ta xét trường hợp $n > 1$. Theo trên $3-$ dạng liên kết I được xác định bởi $I = u_0^* \wedge \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* \wedge u_i^*$. Khi đó ta dễ dàng tính được các tích super - Poisson sau:

1. $\{I, e_0^* \wedge e_i^*\} = e_i^* \wedge \Omega_i - \lambda_i e_0^* \wedge u_0^* \wedge e_i^*,$
2. $\{I, e_0^* \wedge u_i^*\} = u_i^* \wedge \Omega_i + \lambda_i e_0^* \wedge u_0^* \wedge u_i^*,$
3. $\{I, e_0^* \wedge u_0^*\} = I,$
4. $\{I, e_i^* \wedge e_j^*\} = (\lambda_i + \lambda_j) u_0^* \wedge e_i^* \wedge e_j^*,$
5. $\{I, u_i^* \wedge u_j^*\} = -(\lambda_i + \lambda_j) u_0^* \wedge u_i^* \wedge u_j^*,$
6. $\{I, e_i^* \wedge u_j^*\} = (\lambda_i - \lambda_j) u_0^* \wedge e_i^* \wedge u_j^*.$

Do đó $Z^2(\mathbf{g}_{2n+2})$ là tập hợp các $2-$ chu trình của được $\mathbf{g}_{2n+2}$ trên $\mathbb{C}$ xác bởi các tập hợp sau:

$$\{u_0^* \wedge e_i^*, u_0^* \wedge u_i^*, \Omega_n \mid 1 \leq i < j \leq n\},$$
$$\{e_i^* \wedge e_j^* \mid \lambda_i + \lambda_j = 0, 1 \leq i < j \leq n\},$$
$$\{u_i^* \wedge u_j^* \mid \lambda_i + \lambda_j = 0, 1 \leq i < j \leq n\},$$
$$\{e_i^* \wedge u_j^* \mid \lambda_i - \lambda_j = 0, 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Vậy chúng ta đã xác định được $B^2(\mathbf{g}_{2n+2})$ và $Z^2(\mathbf{g}_{2n+2})$. Do đó nhóm đối đồng điều $H^2(\mathbf{g}_{2n+2}) = Z^2(\mathbf{g}_{2n+2})/B^2(\mathbf{g}_{2n+2})$ là tập các lớp tương đương trong $Z^2(\mathbf{g}_{2n+2})$ theo modulo $B^2(\mathbf{g}_{2n+2})$ được môt tả như sau:

$$\{[e_i^* \wedge e_j^*] \mid \lambda_i + \lambda_j = 0, 1 \leq i < j \leq n\},$$
$$\{[u_i^* \wedge u_j^*] \mid \lambda_i + \lambda_j = 0, 1 \leq i < j \leq n\},$$
$$\{[e_i^* \wedge u_j^*] \mid \lambda_i - \lambda_j = 0, 1 \leq i < j \leq n\}.$$

□

2.2 Đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie kiểu Jordan

Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Xét khối Jordan lũy linh $J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ và quy ước $J_1 = [0]$.

2.2.1. Mệnh đề. (xem [3]) *Giả sử $E = \{e_1, e_2 \dots, e_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{C}-$ không gian vectơ $\mathbb{C}^{2n}$. Khi đó ánh xạ*

$$\begin{aligned} \varphi :&\mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C} \\ &(x_i, y_j) \quad \longmapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{nếu } i = j = \overline{0, n} \\ 0 & \textit{nếu } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

là dạng song tuyến tính bất biến, không suy biến.

2.2.2. Mệnh đề. *Cho ánh xạ tuyến tính $\Phi : \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}$. Giả sử $A_\Phi = \begin{bmatrix} J_n & 0 \\ 0 & -J_n^T \end{bmatrix}$ là ma trận của Φ đối với cơ sở chính tắc $E = \{e_1, e_2 \dots, e_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ của $\mathbb{C}^{2n}$. Đặt $\mathbf{j}_{2n} = \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}u_0$ là một mở rộng của $\mathbb{C}^{2n}$ bởi Φ. Khi đó $\mathbf{j}_{2n}$ là một đại số Lie, với tích Lie được xác định bởi:*

$$\begin{cases} [x, y] = \varphi(\Phi(x), y)e_0, \forall x, y \in \mathbb{C}^{2n} \\ [e_0, \mathbf{j}_{2n}] = 0 \\ [u_0, x] = \Phi(x). \end{cases}$$

Từ kết quả của Mệnh đề 2.2.1 và Mệnh đề 2.2.2 ta có: $(\mathbf{j}_{2n}, \varphi)$ trở thành một đại số Lie toàn phương trên trường số phức $\mathbb{C}$ và được gọi là *đại số Lie toàn phương kiểu Jordan* $\mathbf{j}_{2n}$.

Theo Mệnh đề 2.2.2 thì tích Lie ở trên $\mathbf{j}_{2n}$ là:

$$\begin{cases} [x, y] = \varphi(\Phi(x), y)x_0, \forall x, y \in \mathbb{C}^{2n} \\ [x_0, \mathbf{j}_{2n}] = 0 \\ [y_0, x] = \Phi(x). \end{cases}$$

Do đó các tích Lie khác không trên $\mathbf{j}_{2n}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} [u_0, e_2] = e_1, [u_0, e_3] = e_2, \dots, [u_0, e_n] = e_{n-1}, \\ [u_0, u_1] = -u_2, [u_0, u_2] = -u_3, \dots, [u_0, u_{n-1}] = -u_n, \\ [e_2, u_1] = [e_3, u_2] = \dots = [e_{n-1}, u_{n-2}] = [e_n, u_{n-1}] = e_0. \end{cases}$$

Giả sử $\{e_0^*, e_1^*, \ldots, e_n^*, u_0^*, u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ là cơ sở đối ngẫu của $\{e_0, e_1, \ldots, e_n, u_0, u_1, \ldots, u_n\}$. Khi đó theo [3] nếu I là $3-$ dạng liên kết với $\mathbf{j}_{2n}$ thì I được xác định bởi

$$I = u_0^* \wedge \left(\sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^* \right)$$

2.2.3. Mệnh đề. (xem [3]) *Giả sử $B^2(\boldsymbol{j}_{2n})$ là tập hợp các $2-$ đối bờ của đại số Lie toàn phương $\boldsymbol{j}_{2n}$ trên $\mathbb{C}$. Thì*

$$\begin{aligned} B^2(\boldsymbol{j}_{2n}) &= span\{l_x(I) \mid x \in \boldsymbol{j}_{2n}\} \\ &= span\Big\{\sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^*, u_0^* \wedge e_{i+1}^*, u_0^* \wedge u_i^* \mid i = \overline{1, n-1}\Big\}. \end{aligned}$$

Giả sử $C^2(\mathbf{j}_{2n}, \mathbb{C})$ là không gian các ánh xạ $2-$ tuyến tính từ

$$\mathbf{j}_{2n} \times \mathbf{j}_{2n} \longrightarrow \mathbb{C},$$

tức là $C^2(\mathbf{j}_{2n}, \mathbb{C}) = \Lambda^2(C^2(\mathbf{j}_{2n}^*)$. Theo [3] nếu $P = span\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ và $Q = span\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ tương ứng là các không gian sinh bởi hệ vectơ cơ sở $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ và $\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ thì

$$C^2(\mathbf{j}_{2n}, \mathbb{C}) = (e_0^* \wedge (P \oplus Q)) \oplus (u_0^* \wedge (P \oplus Q)) \oplus \Lambda^2(P) \oplus \Lambda^2(Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus < e_0^* \wedge u_0^* >,$$

nghĩa là $C^2(\mathbf{j}_{2n}, \mathbb{C})$ được phân tích thành tổng trực tiếp các không gian các $2-$ dạng

$$e_0^* \wedge (P \oplus Q), u_0^* \wedge (P \oplus Q), \Lambda^2(P), \Lambda^2(Q), P \wedge Q, < e_0^* \wedge u_0^* > .$$

2.2.4. Mệnh đề. *Với những ký hiệu như trên, nếu đặt $Z^2(\boldsymbol{j}_{2n})$ là tập hợp $2-$ đối chu trình của $\boldsymbol{j}_{2n}$ thì*

$$\begin{aligned} Z^2(\boldsymbol{j}_{2n}) &= u_0^* \wedge (P \oplus Q) \oplus ker\{I, \Lambda^2(P)\} \oplus ker\{I, \Lambda^2(Q)\} \oplus ker\{I, P \wedge Q\} \\ &\oplus \Big\langle e_0^* \wedge u_0^* - \sum_{i=1}^{n} (n-1-i) e_i^* \wedge u_i^* \Big\rangle. \end{aligned}$$

Chứng minh. Vì $C^2(\mathbf{j}_{2n}, \mathbb{C})$ được phân tích thành tổng trực tiếp các không gian các $2-$ dạng

$$e_0^* \wedge (P \oplus Q), u_0^* \wedge (P \oplus Q), \Lambda^2(P), \Lambda^2(Q), P \wedge Q, < e_0^* \wedge u_0^* >$$

và theo định nghĩa $Z^2(\mathbf{j}_{2n})$, do đó để mô tả được $Z^2(\mathbf{j}_{2n})$ chúng ta tính toán tử $\{I, .\}$ lần lượt cho các hạng tử trực tiếp

$$e_0^* \wedge (P \oplus Q), u_0^* \wedge (P \oplus Q), \Lambda^2(P), \Lambda^2(Q), P \wedge Q, < e_0^* \wedge u_0^* > .$$

• Đối với hạng tử $\Lambda^2(P)$: Theo trên với $\forall e_i^* \in P$ thì $e_i^* \wedge e_j^* \in \Lambda^2(P)$. ta có:
+) Nếu $1 \leq i < n-1$ thì
$\{I, e_i^* \wedge e_n^*\} = \{u_0^* \wedge \Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^*\Big), e_i^* \wedge e_n^*\} = u_0^* \wedge e_{i+1}^* \wedge e_n^*$
và $\{I, e_i^* \wedge e_{i+1}^*\} = \{u_0^* \wedge \Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^*\Big), e_i^* \wedge e_{i+1}^*\} = u_0^* \wedge e_i^* \wedge e_{i+2}^* \wedge e_n^*$.
+) Nếu $1 \leq i < j-1, j < n-1$ thì
$\{I, e_i^* \wedge e_j^*\} = \{u_0^* \wedge \Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^*\Big), e_i^* \wedge e_j^*\} = u_0^* \wedge e_{i+1}^* \wedge e_j^* + u_0^* \wedge e_i^* \wedge e_{j+1}^*$.
+) $\{I, e_{n-1}^* \wedge e_n^*\} = \{u_0^* \wedge \Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^*\Big), e_{n-1}^* \wedge e_n^*\} = 0$.
Vì $\{I, e_{n-1}^* \wedge e_n^*\} = 0 \Rightarrow e_{n-1}^* \wedge e_n^* \in ker(\{I, \Lambda^2(P)\}$.
Mặt khác $\forall \omega \in ker(\{I, \Lambda^2(P)\}$ thì ω có dạng

$$\omega = \sum_{2 \leq i+1 \leq j \leq n-1}^{n-1} a_{ij} e_i^* \wedge e_j^* + \sum_{i=1}^{n-2} b_i e_i^* \wedge e_{i+1}^* + \sum_{j=1}^{n-2} c_j e_i^* \wedge e_n^* + d e_{n-1}^* \wedge e_n^*.$$

++) Giả sử

$$\omega = \sum_{2 \leq i+1 \leq j \leq n-1}^{n-1} a_{ij} e_i^* \wedge e_j^* + \sum_{i=1}^{n-2} b_i e_i^* \wedge e_{i+1}^* + \sum_{j=1}^{n-2} c_j e_i^* \wedge e_n^* + d e_{n-1}^* \wedge e_n^* \in ker(\{I, \Lambda^2(P)\}$$

sao cho các a_{ij} đồng thời bằng không, còn các b_i không đồng thời bằng không. Khi đó

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-2} b_i e_i^* \wedge e_{i+1}^* + \sum_{j=1}^{n-2} c_j e_i^* \wedge e_n^* + d e_{n-1}^* \wedge e_n^*.$$

Bằng cách tính toán trực tiếp, ta có:

$$\{I, \omega\} = \sum_{i=1}^{n-2} b_i u_0^* e_i^* \wedge e_{i+2}^* + \sum_{j=1}^{n-2} c_j e_{j+1}^* \wedge e_n^* = 0.$$

Vì các b_i không đồn thời bằng không, do đó không mất tính tổng quát, giả sử tồn tại chỉ số i_0 để sao cho $b_{i_0} = 1$. Để $\{I, e^*_{i_0} \wedge e^*_{i_0+1}\} = u^*_0 \wedge e^*_{i_0} \wedge e^*_{i_0+2} = 0$ thì $i_0 + 2 = n$ và $c_{i_0-1} = -b_{i_0}$. Khi đó thay trực tiếp vào trên, ta có $\omega = e^*_{n-2} \wedge e^*_{n-1} - e^*_{n-3} \wedge e^*_n$ hoặc $\omega = e^*_{n-3} \wedge e^*_n - e^*_{n-2} \wedge e^*_{n-1}$ thuộc vào $\in ker(\{I, \Lambda^2(P)\}$.

++) Giả sử

$$\omega = \sum_{2 \le i+1 \le j \le n-1}^{n-1} a_{ij} e^*_i \wedge e^*_j + \sum_{i=1}^{n-2} b_i e^*_i \wedge e^*_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-2} c_j e^*_i \wedge e^*_n + d e^*_{n-1} \wedge e^*_n \in ker(\{I, \Lambda^2(P)\}$$

sao cho các a_{ij} không đồng thời bằng không. Ta có:

$$\begin{aligned}\{I, \omega\} &= \sum_{2 \le i+1 \le j \le n-1}^{n-1} a_{ij}(u^*_0 \wedge e^*_{i+1} \wedge e^*_j + u^*_0 \wedge e^*_j \wedge e^*_{i+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-2} b_i u^*_0 e^*_i \wedge e^*_{i+2} + \sum_{j=1}^{n-2} c_j u^*_0 \wedge e^*_{j+1} \wedge e^*_n = 0.\end{aligned}$$

Vì các a_{ij} không đồng thời bằng không, do đó không mất tính tổng quát, giả sử i_0 là chỉ số nhỏ nhất sao cho tồn tại chỉ số $j_0 > i_0 + 1$ để $a_{i_0 j_0} = 1$. Nếu $j_0 < n - 1$, do đó để $a_{i_0 j_0} u^*_0 \wedge e^*_{i_0} \wedge e^*_{j_0+1} = 0$ thì $a_{i_0-1 j_0+1} = -a_{i_0 j_0} = -1$, điều này mâu thuận với tính nhỏ nhất của i_0. Do đó $j_0 = n - 1$. Nếu $i_0 = 1$ thì $\{I, e^*_{i_0} \wedge e^*_{j_0}\} = \{I, e^*_1 \wedge e^*_{n-1}\} = u^*_0 \wedge e^*_2 \wedge e^*_{n-1} + u^*_0 \wedge e^*_1 \wedge e^*_n$. So sánh với công thức xác định tích super - Poisson $\{I, \omega\}$ ở trên thì $u^*_0 \wedge e^*_1 \wedge e^*_n \neq 0$, điều này vô lý, do đó giả thiết $i_0 = 1$ là sai. Vậy $i_0 > 1$. Theo lập luận ở trên

$$\{I, e^*_{i_0} \wedge e^*_{j_0}\} = u^*_0 \wedge e^*_{i_0+1} \wedge e^*_{j_0} + u^*_0 \wedge e^*_{i_0} \wedge e^*_n,$$

nên $c_{i_0-1} = -a_{i_0 j_0}$ và $a_{i_1 j_1} = -a_{i_0 j_0}$, với $i_1 = i_0 + 1$ và $j_1 = j_0 - 1$. Mặt khác ta lại có

$$\{I, e^*_{i_1} \wedge e^*_{j_1}\} = u^*_0 \wedge e^*_{i_1+1} \wedge e^*_{j_1} + u^*_0 \wedge e^*_{i_1} \wedge e^*_{j_1+1},$$

nên $a_{i_2j_2} = -a_{i_1j_1}$ với $i_2 = i_1+1$ và $j_2 = j_1-1$. Lập luận tương tự sau hữu hạn bước ta thu được $a_{i_sj_s} = -a_{i_{s-1}j_{s-1}}$, với $i_s = i_{s-1}+1 = i_0+s$ và $j_s = j_{s-1}-1 = n-s-1$ sao cho $j_s = i_s + 2$ hoặc $j_s = i_s + 3$.

Nếu $j_s = i_s + 2$ thì $\{I, e^*_{i_s} \wedge e^*_{j_s}\} = u^*_0 \wedge e^*_{i_s+1} \wedge e^*_{j_s+2} + u^*_0 \wedge e^*_{i_s} \wedge e^*_{j_s+3}$. Từ việc tính $\{I, \omega\}$ ở trên cho thấy đối với trường hợp này thì $u^*_0 \wedge e^*_{i_s+1} \wedge e^*_{j_s+2} \neq 0$, do đó trường hợp này không xảy ra.

Nếu $j_s = i_s + 3$ thì $\{I, e^*_{i_s} \wedge e^*_{j_s}\} = u^*_0 \wedge e^*_{i_s+1} \wedge e^*_{j_s+3} + u^*_0 \wedge e^*_{i_s} \wedge e^*_{j_s+4}$. Do đó để $u^*_0 \wedge e^*_{i_s+1} \wedge e^*_{j_s+3} = 0$ thì ta cần chọn $b_{i_s+1} = -a_{i_sj_s}$ và $i_0 > 1, s \geq 0$ sao cho $i_0 + s + 3 = n - s - 1$ hay $i_0 = n - 2j$, trong đó $2 \leq l \leq q - 1$ (q là phần nguyên của $\frac{n}{2}$).

Từ những tính toán và lập luận ở trên, ta có

$$ker\{I, \Lambda^2(P)\} = span\Big\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^i e^*_{n-2k+i} \wedge e^*_{n-i+1}\Big\} \quad \text{với } k = \overline{1,q}$$

là không gian con sinh bởi hệ vectơ cơ sở $\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^i e^*_{n-2k+i} \wedge e^*_{n-i+1}$.

Tính toán hoàn toàn tương tự như hạng tử $\Lambda^2(P)$, ta có:

- Đối với hạng tử $\Lambda^2(Q)$:

$$ker\{I, \Lambda^2(Q)\} = span\Big\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^i u^*_i \wedge u^*_{2k-i+1}\Big\} \quad \text{với } k = \overline{1,q}$$

là không gian con sinh bởi hệ vectơ cơ sở $\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^i u^*_i \wedge u^*_{2k-i+1}$.

- Đối với hạng tử $P \wedge Q$:

$$ker\{I, P \wedge Q\} = span\Big\{\sum_{i=1}^{n} e^*_i \wedge u^*_i, \sum_{i-1}^{n-1} e^*_{i+1} \wedge u^*_i, \sum_{i=1}^{n-2} e^*_{i+2} \wedge u^*_i, \ldots, e^*_n \wedge u^*_1\Big\}$$

là không gian con sinh bởi hệ vectơ cơ sở

$$\sum_{i=1}^{n} e^*_i \wedge u^*_i, \sum_{i-1}^{n-1} e^*_{i+1} \wedge u^*_i, \sum_{i=1}^{n-2} e^*_{i+2} \wedge u^*_i, \ldots, e^*_n \wedge u^*_1.$$

- Đối với hạng tử $< e^*_0 \wedge u^*_0 >$: Ta có $\{I, e^*_0 \wedge u^*_0\} = u^*_0 \wedge \big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} e^*_{i+1} \wedge u^*_i\big)$ đây là một phần tử của tích super - Poisson $\{I, P \wedge Q\}$. Mặt khác, tương tự như trên ta tính được tích super - Poisson

$$\{I, e_0^* \wedge u_0^* - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)e_i^* \wedge u_i^*\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e_0^* \wedge u_0^* - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)e_i^* \wedge u_i^* \in ker(\{I, .\}).$$

• Đối với hạng tử $e_0^* \wedge (P \oplus Q)$: Đối với $e_0^* \wedge (P \oplus Q)$ theo [3] ta dễ dàng tính được $ker\{I, e_0^* \wedge (P \oplus Q)\} = \{0\}$.

• Đối với hạng tử $u_0^* \wedge (P \oplus Q)$: Đối với $u_0^* \wedge (P \oplus Q)$ theo [3] tính trực tiếp ta thu được $\dim(ker\{I, e_0^* \wedge (P \oplus Q)\}) = 2n$.

Tóm lại: Từ việc tính toán trên các hạng tử trực tiếp $e_0^* \wedge (P \oplus Q)$, $u_0^* \wedge (P \oplus Q), \Lambda^2(P), \Lambda^2(Q), P \wedge Q, < e_0^* \wedge u_0^* >$ ở trên, ta thu được

$$\begin{aligned} Z^2(\mathbf{j}_{2n}) &= u_0^* \wedge (P \oplus Q) \oplus ker\{I, \Lambda^2(P)\} \oplus ker\{I, \Lambda^2(Q)\} \oplus ker\{I, P \wedge Q\} \\ &\oplus \Big\langle e_0^* \wedge u_0^* - \sum_{i=1}^{n}(n-1-i)e_i^* \wedge u_i^* \Big\rangle. \end{aligned}$$

□

Từ kết quả của Mệnh đề 2.2.3 và Mệnh đề 2.2.4 ta sẽ mô tả được nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie toàn phương $\mathbf{j}_{2n}$ trên trường số phức $\mathbb{C}$ thông qua định lý sau.

2.2.5. Định lý. *Với những ký hiệu như trên, ta có $H^2(\boldsymbol{j}_{2n}, \mathbb{C})$ nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie toàn phương $\boldsymbol{j}_{2n}$:*

$$\begin{aligned} H^2(\boldsymbol{j}_{2n}, \mathbb{C}) &= Z^2(\boldsymbol{j}_{2n}, \mathbb{C})/B^2(\boldsymbol{j}_{2n}, \mathbb{C}) \\ &= span\{[u_0^* \wedge (P \oplus Q)], [ker\{I, \Lambda^2(P)\}], \\ &\quad [ker\{I, \Lambda^2(Q)\}], [ker\{I, P \wedge Q]\} \end{aligned}$$

là không gian con sinh bởi hệ vectơ cơ sở

$$[u_0^* \wedge (P \oplus Q)], [ker\{I, \Lambda^2(P)\}], [ker\{I, \Lambda^2(Q)\}], [ker\{I, P \wedge Q].$$

2.2.6. Mệnh đề. (xem [3]) *Giả sử $U = \{e_1, e_2 \ldots, e_n, t, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{C}-$ không gian vectơ $\mathbb{C}^{2n+1}$. Khi đó ánh xạ $\varphi : \mathbb{C}^{2n+1} \times \mathbb{C}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ được xác định bởi:*

$$\varphi(x_i, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j = \overline{0, n} \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \quad \text{và } \varphi(t, t) = 1.$$

là dạng song tuyến tính bất biến, không suy biến.

2.2.7. Mệnh đề. (xem [3]) *Cho ánh xạ tuyến tính* $\Phi : \mathbb{C}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$. *Giả sử* $A_\Phi = \begin{bmatrix} J_{n+1} & M \\ 0 & -J_n^T \end{bmatrix}$ *là ma trận của* Φ *đối với cơ sở chính tắc* U *của* $\mathbb{C}^{2n}$, *trong đó* $M = [m_{ij}]_{(n+1)\times n}$ *là ma trận cỡ* $(n+1) \times n$ *có tất cả các số hạng bằng không ngoại trừ phần tử* $m_{(n+1)n} = -1$. *Đặt* $\boldsymbol{j}_{2n+1} = \mathbb{C}^{2n+1} \oplus \mathbb{C}x_0 \oplus \mathbb{C}y_0$ *là một mở rộng của* $\mathbb{C}^{2n+1}$ *bởi* Φ. *Khi đó* $\boldsymbol{j}_{2n+1}$ *là một đại số Lie, với tích Lie được xác định bởi:*

$$\begin{cases} [x,y] = \varphi(\Phi(x), y)x_0, \forall x, y \in \mathbb{C}^{2n+1} \\ [x_0, \boldsymbol{j}_{2n+1}] = 0 \\ [y_0, x] = \Phi(x). \end{cases}$$

Từ kết quả của Mệnh đề 2.2.6 và Mệnh đề 2.2.7 ta có: $(\mathbf{j}_{2n+1}, \varphi)$ trở thành một đại số Lie toàn phương trên trường số phức $\mathbb{C}$ và được gọi là *đại số Lie toàn phương kiểu Jordan* $\boldsymbol{j}_{2n+1}$.

Theo Mệnh đề 2.2.7 thì tích Lie ở trên $\mathbf{j}_{2n+1}$ là:

$$\begin{cases} [x,y] = \varphi(\Phi(x), y)x_0, \forall x, y \in \mathbb{C}^{2n+1} \\ [x_0, \mathbf{j}_{2n+1}] = 0 \\ [y_0, x] = \Phi(x). \end{cases}$$

Do đó các tích Lie khác không trên $\mathbf{j}_{2n+1}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} [u_0, e_2] = e_1, \ldots, [u_0, e_n] = e_{n-1} \\ [u_0, u_1] = -u_2, \ldots, [u_0, u_{n-1}] = -u_n, [u_0, u_n] = -t \\ [e_2, u_1] = [e_3, u_2] = [e_3, u_2] = \cdots = [e_{n-1}, u_{n-2}] = [e_n, u_{n-1}] = 0. \end{cases}$$

Giả sử $\{e_0^*, e_1^*, \ldots, e_n^*, t^*, u_0^*, u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ là cơ sở đối ngẫu của $\{e_0, e_1, \ldots, e_n, t, u_0, u_1, \ldots, u_n\}$. Khi đó theo [3] nếu I là $3-$ dạng liên kết với $\mathbf{j}_{2n+1}$ thì I được xác định bởi $I = u_0^* \wedge \Omega$, trong đó $\Omega \in \Lambda^2(\mathbf{j}_{2n+1}^*) = C^2(\mathbf{j}_{2n+1}, \mathbb{C})$.

2.2.8. Mệnh đề. (xem [3]) *Giả sử* $B^2(\boldsymbol{j}_{2n+1})$ *là tập hợp các* $2-$ *đối bờ của đại số Lie toàn phương* $\boldsymbol{j}_{2n+1}$ *trên* $\mathbb{C}$. *Thì*

$$\begin{aligned} B^2(\boldsymbol{j}_{2n}) &= span\{l_x(I) \mid x \in \boldsymbol{j}_{2n+1}\} \\ &= span\Big\{\Omega, u_0^* \wedge e_{i+1}^*, u_0^* \wedge u_j^*, u_0^* \wedge t^* \mid i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1,n}\Big\}. \end{aligned}$$

Giả sử $C^2(\mathbf{j}_{2n+2}, \mathbb{C})$ là không gian các ánh xạ $2-$ tuyến tính từ

$$\mathbf{j}_{2n+1} \times \mathbf{j}_{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C},$$

tức là $C^2(\mathbf{j}_{2n+1}, \mathbb{C}) = \Lambda^2(C^2(\mathbf{j}^*_{2n+1})$. Theo [3] nếu $P = span\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ và $Q = span\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ tương ứng là các không gian sinh bởi hệ vectơ cơ sở $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ và $\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ thì

$$\begin{aligned} C^2(\mathbf{j}_{2n+1}, \mathbb{C}) &= (e_0^* \wedge (P \oplus Q)) \oplus (u_0^* \wedge (P \oplus Q)) \oplus \Lambda^2(P) \oplus \Lambda^2(Q) \\ &\oplus < e_0^* \wedge t^* > \oplus < e_0^* \wedge u_0^* > \oplus < u_0^* \wedge t^* > \\ &\oplus < t^* \wedge P > \oplus \Big(((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash \Lambda^2(Q) \Big). \end{aligned}$$

nghĩa là $C^2(\mathbf{j}_{2n+1}, \mathbb{C})$ được phân tích thành tổng trực tiếp các không gian các $2-$ dạng: $e_0^* \wedge (P \oplus Q), u_0^* \wedge (P \oplus Q), \Lambda^2(P), \Lambda^2(Q), < e_0^* \wedge t^* >, < e_0^* \wedge u_0^* >$, $< u_0^* \wedge t^* >, < t^* \wedge P >, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash \Lambda^2(Q)$.

2.2.9. Mệnh đề. *Với những ký hiệu như trên, nếu đặt $Z^2(\mathbf{j}_{2n+1})$ là tập hợp $2-$ đối chu trình của $\mathbf{j}_{2n+1}$ thì*

$$\begin{aligned} Z^2(\mathbf{j}_{2n}) &= u_0^* \wedge (P \oplus Q) \oplus < u_0^*, t^* > \oplus ker\{I, \Lambda^2(Q)\} \\ &\oplus ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash (\Lambda^2(Q) \\ &\oplus \Big\langle e_0^* \wedge u_0^* - \sum_{i=1}^{n} (n-1-i) e_i^* \wedge u_i^* \Big\rangle. \end{aligned}$$

Chứng minh. Vì $C^2(\mathbf{j}_{2n+1}, \mathbb{C})$ được phân tích thành tổng trực tiếp các không gian các $2-$ dạng:
$e_0^* \wedge (P \oplus Q), u_0^* \wedge (P \oplus Q), \Lambda^2(P), \Lambda^2(Q), < e_0^* \wedge t^* >, < e_0^* \wedge u_0^* >$,
$< u_0^* \wedge t^* >, < t^* \wedge P >, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash \Lambda^2(Q)$
và theo định nghĩa $Z^2(\mathbf{j}_{2n+1})$, do đó để mô tả được $Z^2(\mathbf{j}_{2n+1})$ chúng ta tính toán toán tử $\{I, .\}$ lần lượt cho các hạng tử trực tiếp
$e_0^* \wedge (P \oplus Q), u_0^* \wedge (P \oplus Q), \Lambda^2(P), \Lambda^2(Q), < e_0^* \wedge t^* >, < e_0^* \wedge u_0^* >$,
$< u_0^* \wedge t^* >, < t^* \wedge P >, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash \Lambda^2(Q)$.

● Đối với hạng tử $\Lambda^2(Q)$: Làm tương tự như trong Mệnh đề 2.2.4 ta có

$$ker\{I, \Lambda^2(Q)\} = span\Big\{ \sum_{i=1}^{k} (-1)^i u_{n-2k+i}^* \wedge u_{n-i+1}^* \Big\}, \forall k = \overline{1, q}$$

(trong đó q là phần nguyên của $\frac{n}{2}$) là không gian con sinh bởi hệ vectơ cơ sở $\left\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^i u^*_{n-2k+i} \wedge u^*_{n-i+1}\right\}$.

● Đối với hạng tử $\Lambda^2(P)$: Theo Mệnh đề 2.2.4, ta có:

$$ker\{I, \Lambda^2(P)\} = ker\{u_0^* \wedge \Omega, \Lambda^2(P)\} = span\left\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^i e^*_{n-2k+i} \wedge e^*_{n-i+1}\right\} = \{0\},$$

(với $k = \overline{1, q}$).

● Đối với hạng tử $< e_0^* \wedge u_0^* >$: Ta có

$$\{I, e_0^* \wedge u_0^*\} = \{u_0^* \wedge \Omega, e_0^* \wedge u_0^*\} = u_0^* \wedge \left(\sum_{i=1}^{n-1} e^*_{i+1} \wedge u_i^*\right)$$

đây là một phần tử của tích super - Poisson $\{I, P \wedge Q\}$. Mặt khác, tính tương tự như trong Mệnh đề 2.2.4 ta tính được tích super - Poisson

$$\{I, e_0^* \wedge u_0^* - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)e_i^* \wedge u_i^*\} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad e_0^* \wedge u_0^* - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)e_i^* \wedge u_i^* \in ker(\{I, .\}).$$

● Đối với hạng tử $e_0^* \wedge (P \oplus Q)$: Theo Mệnh đề 2.2.4, ta dễ dàng tính được

$$ker\{I, e_0^* \wedge (P \oplus Q)\} = ker\{u_0^* \wedge \Omega, e_0^* \wedge (P \oplus Q)\} = \{0\}.$$

● Đối với hạng tử $u_0^* \wedge (P \oplus Q)$: Theo Mệnh đề 2.2.4, tính trực tiếp ta thu được

$$\dim(ker\{I, e_0^* \wedge (P \oplus Q)\}) = \dim(ker\{u_0^* \wedge \Omega, u_0^* \wedge (P \oplus Q)\}) = 2n.$$

● Đối với hạng tử $t^* \wedge P$: Sử dụng cách tính ở trong Mệnh đề 2.2.4, ta có.

$\{I, t^* \wedge e_i^*\} = \{u_0^* \wedge \Omega, t^* \wedge e_i^*\} = -u_0^* \wedge u_n^* \wedge e_i^* + u_0^* \wedge t^* \wedge e^*_{i+1}$, với $i = \overline{1, n-1}$

và $\{I, t^* \wedge e_n^*\} = \{u_0^* \wedge \Omega, t^* \wedge e_n^*\} = -u_0^* \wedge u_n^* \wedge e_n^*$.

Từ kết quả tính ở trên, suy ra $\{I, t^* \wedge P\} \subset (u_0^* \wedge u_n^* \wedge P) \oplus (u_0^* \wedge t^* \wedge P)$.

Giả sử $\omega = \sum_{i=1}^{n-1} a_i t^* \wedge e_i^* + bt^* \wedge e_n^* \in ker(\{I, t^* \wedge P\})$.

$\Rightarrow \{I, \omega\} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(u_0^* \wedge u_n \wedge e_i^* + u_0^* \wedge t^* \wedge e^*_{i+1}) - bu_0^* \wedge u_n^* \wedge e_n^* = 0.$

Từ đó suy ra $b = 0 \Rightarrow a_i = 0$. Vậy $ker(\{I, t^* \wedge P\} = \{0\}$

● Đối với hạng tử $((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash \Lambda^2(Q)$. Tính toán tương tự như trong Mệnh đề 2.2.4, ta chia làm hai trương hợp dựa vào tính chẵn lẻ của n.

+) Nếu n chẵn, không mất tính tổng quát giả sử $n = 2l$, với $l \in \mathbb{N}^*$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
& ker\{I, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q)\backslash\Lambda^2(Q)\} \\
= \; & ker\{u_0^* \wedge \Omega, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q)\backslash\Lambda^2(Q)\} \\
= \; & span\Big\{t^* \wedge u_n^* + -\sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^* t^* \wedge u_{n-2}^* + \sum_{i=1}^{n-3} e_{i+3}^* \wedge u_i^* - u_{n-1}^* \wedge u_n^*, \\
\ldots \; & t^* \wedge u_2^* + e_{2l}^* \wedge u_1^* - u_3^* \wedge u_{2l}^* + u_4^* \wedge u_{2l-1}^* + \cdots + (-1)^{(l-2)} u_{l-2}^* \wedge u_{l-1}^* \Big\}
\end{aligned}$$

là không gian con sinh bởi hệ l vectơ cơ sở
$\{t^* \wedge u_n^* + -\sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^* t^* \wedge u_{n-2}^* + \sum_{i=1}^{n-3} e_{i+3}^* \wedge u_i^* - u_{n-1}^* \wedge u_n^*,$
$t^* \wedge u_2^* + e_{2l}^* \wedge u_1^* - u_3^* \wedge u_{2l}^* + u_4^* \wedge u_{2l-1}^* + \cdots + (-1)^{(l-2)} u_{l-2}^* \wedge u_{l-1}^*\}$.
Do đó $\dim(ker\{I, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q)\backslash\Lambda^2(Q)\}) = l$.

++) Nếu n lẻ, không mất tính tổng quát giả sử $n = 2l + 1$, với $l \in \mathbb{N}^*$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
& ker\{I, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q)\backslash\Lambda^2(Q)\} \\
= \; & ker\{u_0^* \wedge \Omega, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q)\backslash\Lambda^2(Q)\} \\
= \; & span\Big\{t^* \wedge u_n^* + \sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^*, t^* \wedge u_{n-2}^* + \sum_{i=1}^{n-3} e_{i+3}^* \wedge u_i^* + u_n^* \wedge u_{n-1}^*, \\
\ldots \; & t^* \wedge u_3^* + e_{2l}^* \wedge u_1^* + e_{21+1}^* \wedge u_2^* - u_4^* \wedge u_{2l+1}^* - \cdots + (-1)^{(l+3)} u_{l+2}^* \wedge u_{l+3}^*, \\
& t^* \wedge u_1^* - u_2^* \wedge u_{2l+1}^* + u_3^* \wedge u_{2l}^* - u_4^* \wedge u_{2l-1}^* + \cdots + (-1)^{l-1} u_{l-2}^* \wedge u_{l-1}^* \Big\}
\end{aligned}$$

là không gian con sinh bởi hệ $l + 1$ vectơ cơ sở
$\{t^* \wedge u_n^* + \sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^* t^* \wedge u_{n-2}^* + \sum_{i=1}^{n-3} e_{i+3}^* \wedge u_i^* + u_n^* \wedge u_{n-1}^*, t^* \wedge u_3^* + e_{2l}^* \wedge u_1^*$
$+ e_{21+1}^* \wedge u_2^* - u_4^* \wedge u_{2l+1}^* - \cdots + (-1)^{(l+3)} u_{l+2}^* \wedge u_{l+3}^*, t^* \wedge u_1^* - u_2^* \wedge u_{2l+1}^*$
$+ u_3^* \wedge u_{2l}^* - u_4^* \wedge u_{2l-1}^* + \cdots + (-1)^{l-1} u_{l-2}^* \wedge u_{l-1}^*\}$
Do đó $\dim(ker\{I, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q)\backslash\Lambda^2(Q)\}) = l + 1$.

Tóm lại, từ kết quả trong hai trường hợp của n đã xét ở trên, ta đi đến kết luận về số chiều của $ker\{I, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q)\backslash\Lambda^2(Q)\}$ là

$$\dim(ker\{I, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q)\backslash\Lambda^2(Q)\}) = d,$$

trong đó d là phần nguyên của $\frac{n+1}{2}$.

● Đối với hạng tử $e_0^* \wedge t^*$. Tính tương tự như trong Mệnh đề 2.2.4, ta có:
$\{I, e_0^* \wedge t^*\} = \{u_0^* \wedge \Omega, e_0^* \wedge t^*\} = t^* \wedge \sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1}^* \wedge u_i^* - e_0^* \wedge u_0^* \wedge u_n^*.$

● Đối với hạng tử $u_0^* \wedge t^*$. Tương tự ta có
$\{I, u_0^* \wedge t^*\} = \{u_0^* \wedge \Omega, u_0^* \wedge t^*\} = t^* \wedge \sum_{i=1}^{n-1} u_{i+1}^* \wedge u_0^* - u_0^* \wedge u_0^* \wedge u_n^* = 0.$

Tóm lại: Từ việc tính toán trên các hạng tử trực tiếp
$e_0^* \wedge (P \oplus Q), u_0^* \wedge (P \oplus Q), \Lambda^2(P), \Lambda^2(Q), < e_0^* \wedge t^* >, < e_0^* \wedge u_0^* >,$
$< u_0^* \wedge t^* >, < t^* \wedge P >, ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash \Lambda^2(Q)$
ở trên, ta thu được

$$\begin{aligned} Z^2(\mathbf{j}_{2n+1}) &= u_0^* \wedge (P \oplus Q) \oplus < u_0^* \wedge t^* > \oplus ker\{I, \Lambda^2(Q)\} \\ &\oplus ((P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash \Lambda^2(Q) \\ &\oplus \left\langle e_0^* \wedge u_0^* - \sum_{i=1}^{n} (n-1-i) e_i^* \wedge u_i^* \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Từ kết quả của Mệnh đề 2.2.8 và Mệnh đề 2.2.9 ta sẽ mô tả được nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie toàn phương $\mathbf{j}_{2n+1}$ trên trường số phức $\mathbb{C}$ thông qua định lý sau.

2.2.10. Định lý. *Với những ký hiệu như trên, ta có $H^2(\mathbf{j}_{2n+1}, \mathbb{C})$ nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie toàn phương $\mathbf{j}_{2n+1}$:*

$$\begin{aligned} H^2(\mathbf{j}_{2n+1}, \mathbb{C}) &= Z^2(\mathbf{j}_{2n+1}, \mathbb{C}) / B^2(\mathbf{j}_{2n+1}, \mathbb{C}) \\ &= span\{[u_0^* \wedge (P \oplus Q)], [ker\{I, \Lambda^2(Q)\}], \\ &\quad [P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash \Lambda^2(Q)], [u_0^*, e_n^*]\} \end{aligned}$$

là không gian con sinh bởi hệ vectơ cơ sở

$$\{[u_0^* \wedge (P \oplus Q)], [ker\{I, \Lambda^2(Q)\}], [P \oplus t^* \oplus Q) \wedge Q) \backslash \Lambda^2(Q)], [u_0^*, e_n^*]\}.$$

Kết luận

Luận văn có mục đích tìm tòi, nghiên cứu một số tính chất của đại số Lie toàn phương, nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie toàn phương. Trình bày các phương pháp mô tả nhóm đồng điều thứ 2 của đại số Lie toàn phương. Tiếp đó dựa vào các kết quả của Dương Minh Thành và các cộng sự vào năm 2018(xem [4]) và năm 2019 (xem [3]) để trình bày cách tính nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie kim cương và dại số Lie kiểu Jordan. Cụ thể luận văn đã nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Trình bày lại một số khái niệm và kết quả về đại số Lie, đại số Lie toàn phương giải được, lũy linh, một số tính chất cơ bản và tiêu chuẩn giải được, tiêu chuẩn lũy linh và xét một số ví dụ minh họa cho các khái niệm trên.

2. Trình bày định nghĩa nhóm đối đồng điều của đại số Lie và đại số Lie toàn phương.

3. Trình bày cách tính nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie của đại số Lie kim cương với số chiều cụ thể và đại số Lie kim cương tổng quát.

4. Trình bày cách tính nhóm đối đồng điều thứ 2 của đại số Lie kiểu Jordan $\mathbf{j}_{2n}$ và $\mathbf{j}_{2n+1}$.

Tài liệu tham khảo

1. Tiếng Việt

[1]. Dương Minh Thành (2013), *Nhóm đối đồng điều* $H^2(\mathrm{g}, \mathbb{C})$ *của các đại số Lie toàn phương cơ bản*, Tạp chí khoa học ĐHSP TPHCM, Số 47, tr25 - tr36.

[2]. Cao Trần Tứ Hải, Dương Minh Thành (2015), "Số Betti và không gian các đạo hàm phản xứng của các đại số Lie toàn phương giải được có số chiều ≤ 7". *Tạp chí khoa học Trường đại học sư phạm TP Hồ Chí Minh*, Số **5(70)**, 86 - 96.

[3]. Cao Trần Tứ Hải và Dương Minh Thành (2019), "Số Betti thứ hai của các đại số Lie lũy linh kiểu Jordan," *Tạp chí khoa học Trường đại học sư phạm TP Hồ Chí Minh*, Số **16(12)**, 877 - 890.

2. Tiếng Anh

[4]. Cao Tran Tu Hai, Duong Minh Thanh, Le Anh Vu (2018), "Cohomology of some families of Lie algebras and quadratic Lie algebras". *East-West J. of Mathematics*. **Vol 20, No 2**, 188-201.

[5]. I. Bajo, S. Benayadi (2007), "Lie algebras with quadratic dimention equal to 2", *Journal of Pure and Applied Algebra*. **209**, 725 - 737.

[6] M. T. Duong (2014), "The Betti numbers for a family of solvable Lie algebras". *Bull. Mala. Math. Sci. Soc.* **40**(2), 735-746.

[7]. M. T. Duong, G. Pinczon and R. Ushirobira (2012), "A new invariant of quadratic Lie algebras". *Alg. Rep. Theory* **15**, 1163-1203.

[8]. G. Pinczon and R. Ushirobira (2007), "New Application of Graded Lie Algebras to Lie Algebras, Generalized Lie Algebras and Cohomology". *J. Lie Theory*, **17**, pp 633 - 667