

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐINH VIỆT HÙNG

MỘT SỐ TÍNH CHẤT
CỦA MÔĐUN VÀ VÀNH NCS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐINH VIỆT HÙNG

MỘT SỐ TÍNH CHẤT
CỦA MÔĐUN VÀ VÀNH NCS

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 8.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. ĐINH ĐỨC TÀI

Nghệ An - 2022

MỤC LỤC

Mục lục	2
Mở đầu	3
Bảng ký hiệu	6
1 Kiến thức chuẩn bị	7
1.1. Một số khái niệm và kí hiệu cơ bản	7
1.2. Một số mở rộng của môđun nội xạ và môđun xạ ảnh	10
2 Môđun NCS và vành NCS	13
2.1. Môđun NCS và đặc trưng vành bởi tổng trực tiếp hữu hạn các môđun NCS	14
2.2. Một số lớp vành NCS và QF-vành	25
2.3. Vành bất biến đẳng cấu	29
Kết luận	33
Tài liệu tham khảo	34

MỞ ĐẦU

Xuyên suốt luận văn này, nếu không nói gì thêm, chúng ta hiểu tất cả các vành đều là vành kết hợp, có đơn vị và tất cả các môđun là unital phải. Chúng ta kí hiệu $J(R)$ là căn Jacobson của một vành R và $|X|$ được hiểu là lực lượng của một tập hợp X . Cho một môđun con N của môđun M , chúng ta sử dụng ký hiệu $N \leq M$ ($N < M$) nghĩa là N là một môđun con của M (theo thứ tự, một môđun con thực sự). Đồng thời, ký hiệu $N \leq_e M$ để chỉ rằng N là môđun con cốt yếu của M . Lần lượt các ký hiệu $J(M)$, $Soc(M)$ để chỉ căn và đế của môđun M , $E(M)$ ký hiệu của bao nội xạ M . Với bất kỳ khái niệm hay thuật ngữ nào không được đề cập ở đây, chúng ta có thể tìm hiểu kỹ hơn trong các tài liệu [3] hoặc [14].

Một môđun M được gọi là *môđun NCS* nếu mọi môđun con đóng không tầm thường của M không là một môđun con bé của M . Vành R được gọi là *vành NCS phải* nếu R_R là môđun NCS. Khái niệm này lần đầu tiên được đưa ra bởi Đinh Văn Huỳnh trong [10] và được nghiên cứu bởi Shen-Li ([23]), Quynh-Ko [19], Thuyet ([21]) và nhiều tác giả khác.

Như chúng ta đã biết, môđun con C được gọi là *môđun con đóng* trong M nếu nó không có mở rộng cốt yếu thực sự trong M . Môđun M được gọi là *môđun CS*, nếu mọi môđun con đóng C của M là một hạng tử trực tiếp của M . Như vậy, hiển nhiên chúng ta có mọi môđun CS đều là môđun NCS. Tuy nhiên điều ngược lại không hoàn toàn chính xác. Chẳng hạn như: $\mathbb{Z}$ -môđun $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$ là môđun NCS nhưng không là môđun CS. Hoặc, xét K là vành chia được, V là K -không gian vectơ trái có chiều vô hạn. Đặt $S = End_K(V)$ và $R = \begin{bmatrix} S & S \\ S & S \end{bmatrix}$. Khi đó, R là vành NCS phải nhưng không là vành CS phải. Rõ ràng, khái niệm

NCS là một mở rộng khác của khái niệm CS và do đó lớp môđun NCS và lớp vành NCS là một mở rộng của lớp môđun CS và vành CS.

Trên cơ sở tài liệu tham khảo chính [18] và một số tài liệu tham khảo khác liên quan, chúng tôi lựa chọn đề tài: *Một số tính chất của môđun vành NCS* với mục đích:

1. Tìm hiểu khái niệm và một số tính chất của lớp môđun và vành NCS;
2. Với $M = M_1 \oplus M_2$ là R -môđun phải, là tổng trực tiếp của các môđun con M_1 và M_2 . Nhiều nhà đại số đã quan tâm đến các điều kiện về M_1 và M_2 (hoặc một họ vô hạn các môđun con) sao cho M là CS-môđun. Trong luận văn này, chúng ta cũng sẽ tìm hiểu điều tương tự cho tổng trực tiếp của lớp các môđun NCS.

Nội dung chính của luận văn được trình bày trong 2 chương, ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

1.1. Kiến thức cơ sở

Nội dung phần này dành để trình bày một số kiến thức cơ sở của lý thuyết vành có liên quan trong luận văn.

1.2. Một số mở rộng của môđun nội xạ và môđun xạ ảnh

Khái niệm và tính chất của một số mở rộng của môđun nội xạ và môđun xạ ảnh sẽ được giới thiệu trong phần này để làm cơ sở cho việc nghiên cứu các nội dung tiếp theo.

Chương 2. Môđun NCS và vành NCS

Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Trên cơ sở sử dụng [18] làm tài liệu tham khảo chính và một số tài liệu tham khảo khác, nội dung chương này ngoài việc tập trung giới thiệu định nghĩa, ví dụ, một số tính chất cơ bản của lớp môđun và vành NCS chúng tôi giới thiệu một số kết quả đặc trưng vành thông qua lớp môđun NCS.

Bố cục Chương 2 gồm 3 phần:

2.1. Môđun NCS và đặc trưng vành bởi tổng trực tiếp hữu hạn các môđun NCS

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số kết quả về lớp môđun NCS và một số kết quả về đặc trưng một số lớp vành thông qua tổng trực tiếp hữu hạn các môđun NCS.

2.2. Một số lớp vành NCS và QF - vành

Trong phần này chúng tôi tìm hiểu và giới thiệu một số kết quả liên quan lớp vành NCS và lớp QF - vành, đồng thời trả lời cho câu hỏi: *Khi nào điều kiện NCS có tính chất di truyền?*

2.3. Vành bất biến đẳng cấu

Một R -môđun phải M được gọi là bất biến đẳng cấu nếu nó bất biến qua mọi tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó. Một vành R được gọi là bất biến đẳng cấu phải nếu R_R là bất biến đẳng cấu. Nội dung chính của phần này chúng tôi dành để giới thiệu một số kết quả liên quan lớp vành này.

Luận văn được thực hiện tại Trường Đại học Vinh dưới sự hướng dẫn của TS. Đinh Đức Tài. Tác giả xin trân trọng gửi lời cảm ơn tới: các Thầy giáo, Cô giáo trong Bộ môn Đại số và Hình học (Khoa Toán, Trường Sư phạm - Trường Đại học Vinh); Trường Đại học Vinh; Phòng Đào tạo Sau đại học; gia đình, bạn bè và đồng nghiệp về mọi sự động viên, giúp đỡ cả về tinh thần lẫn vật chất, tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành khóa học này.

Mặc dù tác giả đã có nhiều cố gắng nhưng không tránh khỏi những thiếu sót nhất định, tác giả mong nhận được các ý kiến góp ý, bổ sung của các Thầy giáo, Cô giáo và độc giả để tác giả hoàn thiện luận văn của mình.

Nghệ An, tháng 06 năm 2022

Tác giả

BẢNG KÝ HIỆU

- $\mathbb{Z}$: Vành các số nguyên
 $\mathbb{Q}$: Trường các số hữu tỷ
 $\mathbb{R}$: Trường các số thực
 $\mathbb{C}$: Trường các số phức
 $A \subseteq^{\oplus} B$: A là hạng tử trực tiếp của B
 $A \leq_e B$: A là môđun con cốt yếu của B
 $A \ll B$: A là môđun con bé của B
 $A \cong B$: A đẳng cấu với B
 $A \oplus B$: Tổng trực tiếp của môđun A và môđun B
 ACC (DCC) : Điều kiện xích tăng (giảm)
 $E(M)$: Bao nội xạ của môđun M
 $Soc(M)$: Đế của môđun M
 $End(M)$: Vành các tự đồng cấu của môđun M
 $u\text{-dim}(M)$: Chiều Goldie của môđun M
 $Ker(f), Im(f)$: Hạt nhân (ảnh) của đồng cấu f
 $M^{(I)}$: $\oplus_{i \in I} M$ (Tổng trực tiếp của I bản sao M)
 $M_R(RM)$: M là một R -môđun phải (trái)
 $M_n(S)$: Vành các ma trận vuông cấp n với các hệ số trên S
 $Mod\text{-}R$: Phạm trù các R -môđun phải
 $Rad(M)$: Căn của môđun M
 $J(R)$: Căn Jacobson của vành R
 $Z(M)$: Môđun con suy biến của môđun M

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Như đã đề cập ở phần mở đầu, trong toàn bộ luận văn này, nếu không chú thích gì thêm, vành R đã cho luôn được hiểu là vành kết hợp, có phần tử đơn vị khác phần tử không và mọi R -môđun được xét là môđun unita phải hoặc trái.

1.1 Một số khái niệm và kí hiệu cơ bản

Trong mục này chúng tôi giới thiệu lại những ký hiệu, khái niệm cơ bản sẽ được sử dụng trong suốt luận văn. Các khái niệm, kết quả này chúng tôi tham khảo chủ yếu trong các tài liệu của Anderson-Fuller ([3]), Dung-Huynh-Smith-Wisbauer ([8]), Nicholson-Yousif ([16]) và một số tài liệu khác.

Với vành R đã cho, để chỉ M là một R -môđun phải (trái) ta viết M_R (${}_R M$, tương ứng). Trong một ngữ cảnh cụ thể của đề tài, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để ngắn gọn chúng tôi sẽ viết môđun M thay vì M_R . Chúng tôi dùng các ký hiệu $A \leq M$ ($A < M$) để chỉ A là môđun con (tương ứng, môđun con thực sự) của M . Nếu A là một hạng tử trực tiếp của M thì ta ký hiệu là $A \leq^\oplus M$ hoặc $A \leq_d M$. Chúng tôi dùng kí hiệu $\mathbb{M}_n(R)$ để chỉ vành ma trận vuông cấp n lấy các hệ tử trên vành R . Cho I là một tập hợp với bản số $\text{card}(I) = \alpha$ và M là môđun nào đó, chúng tôi kí hiệu tổng trực tiếp α bản sao của M là $M^{(I)}$ hoặc $M^{(\alpha)}$, tích trực tiếp α bản sao của M là M^I hoặc M^α . Cho M và N là các R -môđun phải bất kỳ, một đồng cấu từ M vào N được hiểu là đồng cấu từ R -môđun phải M vào R -môđun phải N . Ta dùng ký hiệu $\text{Hom}_R(M, N)$ để chỉ tập các R -đồng cấu môđun từ M vào N , và $\text{End}_R(M)$ để chỉ tập các tự đồng cấu của R -môđun phải M .

Cho M là một R -môđun phải và tập $\emptyset \neq X \subset M$. *Linh hóa tử phải của X trong R* được ký hiệu là $r_R(X)$ và được xác định bằng biểu thức

$$r_R(X) = \{r \in R \mid xr = 0 \text{ với mọi } x \in X\}.$$

Khi không sợ nhầm lẫn về vành R ta viết gọn là $r(X)$ thay vì $r_R(X)$. Ta có $r_R(X)$ là một idêan phải của vành R , và nếu X là một môđun con của M thì $r(X)$ là một idêan (phải và trái) của R . *Linh hóa tử trái của X trong R* được định nghĩa hoàn toàn tương tự và được ký hiệu là $l_R(X)$.

Cho M là một R -môđun phải và một phần tử $m_0 \in M$, khi đó $m_0R = \{m_0r \mid r \in R\}$ là một môđun con của M và được gọi là *môđun con xiclic sinh bởi phần tử m_0* . Nếu I là một idêan phải của vành R thì m_0I cũng là một môđun con của M . Một môđun M được gọi là *đơn* nếu $M \neq 0$ và chỉ có đúng hai môđun con là 0 và M . Môđun M là *nửa đơn* nếu M phân tích được thành tổng trực tiếp của các môđun con đơn. Ta quy ước môđun 0 là một môđun nửa đơn. Khi M là môđun đơn thì ta luôn viết được $M = mR$ với mọi $0 \neq m \in M$.

Môđun con A của môđun M được gọi là *cốt yếu* (hay *lớn*) trong M nếu với mỗi môđun con khác không B của M ta đều có $A \cap B \neq 0$. Khi đó ta còn gọi M là một *mở rộng cốt yếu* của A và ký hiệu là $A \leq_e M$ hoặc $A \leq^e M$. Một đơn cấu $f : M \rightarrow N$ được gọi là *đơn cấu cốt yếu* (hay *nhúng cốt yếu*) nếu ảnh của f cốt yếu trong môđun N . Đối ngẫu với khái niệm cốt yếu, môđun con A của môđun M được gọi là *đối cốt yếu* (hay *bé*) trong M nếu với mỗi môđun con $B \neq M$ của M ta đều có $A + B \neq M$, được ký hiệu là $A \ll M$. Một toàn cấu $f : M \rightarrow N$ được gọi là *toàn cấu đối cốt yếu* (hay *toàn cấu bé*) nếu $\ker(f) \ll M$. Một môđun $M \neq 0$ được gọi là *môđun đều* nếu mọi môđun con khác không của M là cốt yếu trong M .

Môđun con K của M được gọi là *đóng trong M* nếu K không có mở rộng cốt yếu thực sự, nghĩa là, nếu L là một môđun con của M sao cho $K \leq^e L$ thì $K = L$. Cho N là một môđun con của môđun M , một môđun con K của M được gọi là *phần bù của N trong M* nếu K là môđun con cực đại của M thỏa mãn $L \cap N = 0$, môđun con K của M được gọi là *phần bù trong M* nếu tồn tại

một môđun con N của M sao cho K là phần bù của N trong M .

Đế phải của một R -môđun phải M được ký hiệu là $Soc(M_R)$, là tổng của các môđun con đơn của M , hay tương đương, là giao của tất cả các môđun con cốt yếu của M . Nếu môđun M không chứa một môđun con đơn nào thì $Soc(M_R) = 0$. Căn Jacobson của một R -môđun phải M được ký hiệu là $Rad(M_R)$, là giao của tất cả các môđun con tối đại của M , hay tương đương, là tổng tất cả các môđun con bé của môđun M . Nếu M không chứa môđun con tối đại nào thì $Rad(M_R) = M_R$. Đặc biệt, chúng ta có kết quả $Rad(R_R) = Rad(_R R) = J(R)$, nên có thể ký hiệu $J(R)$ để chỉ căn Jacobson của vành R và cũng là căn của R_R mà không sợ nhầm lẫn, trong đó $J(R)$ là giao của các idêan phải cực đại của R .

Cho M là một R -môđun phải. Môđun con suy biến của M được ký hiệu là $Z(M)$ và xác định như sau:

$$Z(M) = \{x \in M \mid xI = 0\}$$

với I là ideal phải cốt yếu nào đó trong R_R . Môđun con suy biến thứ hai của M ký hiệu là $Z_2(M)$ được xác định bởi $Z_2(M)/Z(M) = Z(M/Z(M))$.

Nếu $Z(M) = M$ thì M được gọi là *môđun suy biến*, còn nếu $Z(M) = 0$ thì M là *môđun không suy biến*. Rõ ràng $Z(M)$ là môđun con suy biến lớn nhất của M . Vành R được gọi là *vành không suy biến phải* nếu $Z(R_R) = 0$.

Cho một R -môđun phải M và gọi $\mathfrak{L}$ là dãy các môđun con nào đó của M . Ta nói $\mathfrak{L}$ thỏa mãn *điều kiện dây chuyền tăng*, viết tắt là ACC, nếu mọi dãy tăng

$$A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq \dots$$

các môđun thuộc $\mathfrak{L}$ đều dừng, nghĩa là tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $A_n = A_{n+i}$ với mọi $i \in \mathbb{N}$. Tương tự, $\mathfrak{L}$ được nói là thỏa mãn *điều kiện dây chuyền giảm*, viết tắt là DCC, nếu mọi dãy giảm

$$B_1 \geq B_2 \geq \dots \geq B_n \geq \dots$$

các môđun thuộc $\mathfrak{L}$ đều dừng, nghĩa là tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $B_n = B_{n+i}$ với mọi $i \in \mathbb{N}$.

Một môđun M được gọi là *Noether* nếu nó thỏa mãn ACC trên tập tất cả các môđun con của nó, hay tương đương, nếu mọi môđun con của M là hữu hạn sinh. Một môđun M là *Artin* nếu nó thỏa mãn DCC trên tập tất cả các môđun con của nó, hay tương đương, nếu mọi môđun thương của M là hữu hạn đối sinh.

1.2 Một số mở rộng của môđun nội xạ và môđun xạ ảnh

Cho M, N là các R -môđun phải, A là một môđun con của N và các đồng cấu $h : A \rightarrow M, \bar{h} : N \rightarrow M$. Khi đó ta nói đồng cấu h *mở rộng được đến đồng cấu $\bar{h}$* (hoặc nói đồng cấu $\bar{h}$ là *một mở rộng của đồng cấu h*) nếu $\bar{h}(x) = h(x)$ với mọi $x \in A$.

Chúng tôi sẽ trình bày trong mục này các kiến thức về lớp các môđun đóng vai trò quan trọng quan trọng và có nhiều ứng dụng trong lý thuyết vành kết hợp, đó là lớp các môđun nội xạ và môđun xạ ảnh.

Cho M và N là các R -môđun phải. Môđun M được gọi là *N -nội xạ* nếu mọi đồng cấu $f : A \rightarrow M$, với A là một môđun con của N , đều mở rộng được đến một đồng cấu $g : N \rightarrow M$. Nếu môđun M là M -nội xạ thì ta gọi M là môđun *tự nội xạ* hoặc *tự nội xạ*, và nếu môđun M là N -nội xạ với mọi R -môđun phải N thì M được gọi là môđun *nội xạ*. Theo định nghĩa này, muốn chứng minh một môđun M là nội xạ ta sẽ phải kiểm tra xem nó có là N -nội xạ với mọi môđun N hay không? Việc làm này là quá phức tạp! Thật may mắn là Baer đã đưa ra một cách khác để kiểm tra tính nội xạ, thường gọi là "Tiêu chuẩn Baer" và được phát biểu như sau.

1.2.1 Định lý ([3, 18.3]). *Các khẳng định sau là tương đương đối với một môđun M :*

- (1) M là môđun nội xạ.

(2) M là môđun R_R -nội xạ.

(3) Với mọi idêan phải I của vành R , mọi đồng cấu $f : I \rightarrow M$ đều tồn tại $a \in M$ sao cho $f(a) = ar$ với mọi $r \in I$.

Một họ các môđun $\{M_i | i \in I\}$ được gọi là *nội xạ tương hỗ* hay *nội xạ lẫn nhau* nếu M_i là M_j -nội xạ với mọi $i \neq j$ và $i, j \in I$.

1.2.1 Bổ đề ([8, Bổ đề 7.5]). Cho $M = M_1 \oplus M_2$. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

(1) M_1 là M_2 -nội xạ.

(2) Cho môđun con N bất kỳ của M mà $M_1 \cap N = 0$, thì tồn tại môđun con M' của M sao cho $N \leq M'$ và $M_1 \oplus M' = M$.

Cho M là một R -môđun phải, đơn cấu $\alpha : M \rightarrow N$ được gọi là *bao nội xạ* của M nếu α là đơn cấu cốt yếu và N là môđun nội xạ. Khi $\alpha : M \rightarrow N$ là bao nội xạ thì ta thường gọi môđun N là *bao nội xạ* của M và ký hiệu là $N = E(M)$. Hơn nữa, vì mọi môđun nhúng cốt yếu được vào một môđun nội xạ nên mọi môđun đều có bao nội xạ.

Đối ngẫu với khái niệm môđun nội xạ, ta có khái niệm môđun xạ ảnh. Cho M và N là các R -môđun phải, M được gọi là *N -xạ ảnh* nếu mọi đồng cấu $f : M \rightarrow A$ và mỗi toàn cấu $g : N \rightarrow A$ đều tồn tại một đồng cấu $h : M \rightarrow N$ sao cho $f = gh$. Nếu môđun M là M -xạ ảnh thì ta gọi M là môđun *tự xạ ảnh* hoặc *tự xạ ảnh*, và nếu môđun M là N -nội xạ với mọi R -môđun phải N thì M được gọi là môđun *xạ ảnh*.

Cho môđun M , toàn cấu $p : P \rightarrow M$ được gọi là *phủ xạ ảnh* của môđun M nếu p là toàn cấu bé và P là môđun xạ ảnh. Khi $p : P \rightarrow M$ là phủ xạ ảnh thì ta thường gọi môđun P là *phủ xạ ảnh* của M . Mặc dù mọi môđun đều là ảnh toàn cấu của một môđun xạ ảnh nào đó nhưng không phải môđun nào cũng có phủ xạ ảnh. Vành R mà mọi R -môđun có phủ xạ ảnh là vành hoàn chỉnh.

Một R -môđun phải được gọi là *P -nội xạ* nếu với mọi $a \in R$, mọi đồng cấu từ aR tới M đều có thể mở rộng thành đồng cấu $R \rightarrow M$.

Vành R được gọi là *P-nội xạ phải* nếu R_R là *P-nội xạ*. Môđun M được gọi là *môđun nội xạ chính tổng quát* (ký hiệu: GP-nội xạ), nếu với mọi $0 \neq x \in R$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $x^n \neq 0$ và với mọi R -đồng cấu từ $x^n R$ vào M có thể mở rộng được thành đồng cấu từ R_R tới M . Vành R được gọi là *vành GP-nội xạ phải* nếu R_R là môđun GP-nội xạ [13].

Vành R được gọi là *hầu nội xạ chính tổng quát*, ký hiệu AGP-nội xạ, nếu với mọi $0 \neq a \in R$, tồn tại $n > 0$ sao cho $0 \neq a^n$ và Ra^n là một hạng tử trực tiếp của $lr(a^n)$ ([26]).

1.2.2 Định nghĩa ([8, 10]). Cho M là một R -môđun phải.

(1) Một môđun M được gọi là CS hoặc mở rộng, nếu mọi môđun con đóng C của M là một hạng tử trực tiếp của M .

(2) Một môđun M được gọi là NCS nếu mọi môđun con đóng không tầm thường của M không phải là một môđun con bé của M .

(3) Một vành R được gọi là CS phải (t.ư, NCS phải) nếu R_R là CS (t.ư, NCS).

1.2.3 Mệnh đề ([23, Mệnh đề 1]). Cho M là một R -môđun NCS. Khi đó, mọi môđun con đóng của M cũng là NCS.

1.2.4 Định lý ([23, Định lý 2]). Cho $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ là tổng trực tiếp hữu hạn các môđun nội xạ lẫn nhau M_i . Khi đó, M là NCS nếu và chỉ nếu mọi môđun M_i là NCS

CHƯƠNG 2

MÔĐUN NCS VÀ VÀNH NCS

Khái niệm *môđun NCS* lần đầu tiên được đưa ra bởi Đinh Văn Huỳnh trong [10], theo đó: Một môđun M được gọi là *môđun NCS* nếu mọi môđun con đóng không tầm thường của M không là một môđun con bé của M . Vành R được gọi là *vành NCS phải* nếu R_R là môđun NCS. Môđun và vành NCS được tiếp nối nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học khác, chẳng hạn như Shen-Li ([23]), Quynh-Ko [19], Thuyet ([21]) và nhiều tác giả khác.

Như tất cả chúng ta đã biết, môđun con C được gọi là đóng trong M nếu nó không có mở rộng cốt yếu thực sự trong M . Môđun M được gọi là *CS-môđun*, nếu mọi môđun con đóng C của M là một hạng tử trực tiếp của M . Như vậy, hiển nhiên chúng ta có mọi môđun CS đều là môđun NCS. Tuy nhiên điều ngược lại không hoàn toàn chính xác. Chẳng hạn như: $\mathbb{Z}$ -môđun $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$ là môđun NCS nhưng không là môđun CS. Hoặc, xét K là vành chia được, V là K -không gian vectơ trái có chiều vô hạn. Đặt $S = \text{End}_K(V)$ và $R = \begin{bmatrix} S & S \\ S & S \end{bmatrix}$. Khi đó, R là vành NCS phải nhưng không là vành CS phải.

Chương 2 là kết quả chính của luận văn. Trên cơ sở các kết quả của tài liệu tham khảo chính [18] và một số tài liệu khác liên quan, trong chương này chúng tôi trình bày một số tính chất của lớp môđun NCS và lớp vành NCS. Đồng thời, chúng tôi giới thiệu một số kết quả về lớp vành bất biến đẳng cấu và NCS. Đặc biệt, với $M = M_1 \oplus M_2$ là R -môđun phải, là tổng trực tiếp của các môđun con M_1 và M_2 . Nhiều nhà đại số đã quan tâm đến các điều kiện về M_1 và M_2 (hoặc một họ vô hạn các môđun con) sao cho M là CS-môđun. Trong chương này, chúng ta cũng sẽ xem xét câu hỏi tương tự về (vô hạn) tổng trực tiếp của lớp

các môđun NCS, lớp môđun tổng quát hóa của lớp các môđun nội xạ.

2.1 Môđun NCS và đặc trưng vành bởi tổng trực tiếp hữu hạn các môđun NCS

Trong mục này chúng tôi trình bày các kết quả nghiên cứu lớp các môđun được đặc trưng bởi tổng trực tiếp (hữu hạn) của các môđun NCS.

Giả sử R là một vành và đặt $M = M_1 \oplus M_2$ là một R -môđun phải là tổng trực tiếp của các môđun con M_1 và M_2 . Trước hết chúng ta quan tâm đến các điều kiện của M_1 và M_2 sao cho M trở thành môđun NCS.

2.1.1 Mệnh đề. *Cho M là một R -môđun. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

1. M là môđun NCS;
2. Mọi môđun con khác không của M đều cốt yếu trong một môđun con bù không là môđun con bé của M ;
3. Với mọi môđun con N và L của M sao cho $N \cap L = 0$, tồn tại môđun con bù K của M sao cho $L \leq K$, $N \cap K = 0$ và $K \not\leq M$.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Gọi $N \neq 0$ là một môđun con của M . Khi đó, tồn tại môđun con bù K của M sao cho $N \leq_e K$. Do M là môđun NCS, chúng ta có $K \not\leq M$, điều cần chứng minh.

(2) $\Rightarrow$ (1) Gọi $A \neq 0$ là một môđun con bù của M . Theo giả thuyết, tồn tại một môđun con bù B của M sao cho $A \leq_e B$ và $B \not\leq M$. Do A là môđun con bù của M , chúng ta có $A = B$. Do đó, M là môđun NCS.

(1) $\Rightarrow$ (3) Giả sử M là môđun NCS. Gọi N và L là các môđun con của M thỏa mãn $N \cap L = 0$. Khi đó, tồn tại phần bù K của N trong M sao cho $L \leq K$. Theo giả thiết chúng ta suy ra $K \not\leq M$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Gọi $L \neq 0$ là một môđun con bù của M . Khi đó, tồn tại một môđun con N của M sao cho L là phần bù của N trong M . Theo giả thiết, tồn tại

một môđun con bù K của M sao cho $L \leq K$, $N \cap K = 0$ và $K \not\leq M$. Suy ra, $L = K$ và do đó M là môđun NCS. $\square$

Nếu $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ là tổng trực tiếp hữu hạn các môđun nội xạ lẫn nhau M_i , từ kết quả của Định lý 1.2.4 chúng ta đã biết rằng: M là môđun NCS nếu và chỉ nếu mọi môđun M_i là môđun NCS.

2.1.2 Định lý. *Giả sử $M = Z_2(M) \oplus M'$ là một R -môđun, với M' là một môđun con nào đó của M sao cho M' và $Z_2(M)$ là các môđun NCS và $Z_2(M)$ là môđun M' -nội xạ. Khi đó, M là môđun NCS.*

Chứng minh. Giả sử rằng M' và $Z_2(M)$ là các môđun NCS, $Z_2(M)$ là môđun M' -nội xạ và môđun M có sự phân tích $M = Z_2(M) \oplus M'$. Hiển nhiên chúng ta có, $M' \cong M/Z_2(M)$ và $Z(M') = Z(M/Z_2(M)) = 0$. Do đó, M' là môđun không suy biến. Điều này có nghĩa là $\text{Hom}(A, M') = 0$ với mỗi môđun con A của $Z_2(M)$, do đó M' là môđun $Z_2(M)$ -nội xạ. Theo kết quả của Định lý 1.2.4 chúng ta có M là môđun NCS. $\square$

Môđun M được gọi là *môđun UC* nếu mọi môđun con của M có duy nhất một bao đóng ([24]).

2.1.3 Định lý. *Nếu M là R -môđun phải và có sự phân tích $M = M_1 \oplus M_2$ sao cho M_1 là môđun nội xạ và M_2 là môđun UC đồng thời là môđun NCS. Khi đó, M là môđun NCS.*

Chứng minh. Giả sử K là một môđun con bù khác không của M . Nếu $K \cap M_1 = 0$ thì khi đó, theo Bổ đề 1.2.1 tồn tại $M' \leq M$ sao cho $M = M_1 \oplus M'$ và $K \leq M'$. Do $M' \cong M_2$, chúng ta có M' là môđun NCS, điều này có nghĩa là K không là môđun con bé trong M' và do đó K không là môđun con bé trong M . Bây giờ chúng ta đặt $K \cap M_1 \neq 0$. Do M_1 là môđun nội xạ nên tồn tại $L \leq M_1$ sao cho $K \cap M_1 \leq_e L \leq_d M_1$. Sử dụng kết quả của [24] ta có $K + (K \cap M_1) \leq_e K + L$, vì M là một môđun UC. Chúng ta dễ dàng thấy rằng: $K = K + L$, vì K

phần bù khác không trong M . Do đó $L \leq K$. Khi đó, tồn tại $L' \leq M_1$ sao cho $M_1 = L \oplus L'$ và $M = L \oplus L' \oplus M_2$. Theo luật Modula, $K = L \oplus [K \cap (L' \oplus M_2)]$. Đặt $K' = K \cap (L' \oplus M_2)$. Khi đó, chúng ta có $K' \leq_c L' \oplus M_2$ và $K' \cap L = 0$. Theo kết quả phần đầu của chứng minh, K' không là môđun bé trong $L' \oplus M_2$ và do đó K' không là môđun bé trong M . Do đó M là môđun NCS. $\square$

Môđun M được gọi là môđun có tính chất *ADS* (*Absolute Direct Summand*), nếu mọi sự phân tích $M = A \oplus B$ của M và với mọi phần bù lẫn nhau C của A trong M chúng ta có $M = A \oplus C$ (xem [19], [12] và [20]).

Hiển nhiên chúng ta có: các môđun đều, môđun nửa đơn và CS-môđun là các môđun NCS. Tuy nhiên, tồn tại $\mathbb{Z}$ -môđun là môđun NCS nhưng không là CS-môđun.

2.1.4 Ví dụ. Xét $M = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^3}$ là một $\mathbb{Z}$ -môđun. Khi đó, M là môđun NCS nhưng nó không là môđun CS.

Hai ví dụ sau đây cho chúng ta thấy rằng, lớp các môđun ADS và lớp các môđun NCS là khác nhau:

2.1.5 Ví dụ. Xét $\mathbb{Z}$ -môđun $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Do $\mathbb{Z}$ không là $\mathbb{Z}$ -nội xạ, chúng ta có M không là một ADS môđun. Nhưng, rõ ràng M là môđun NCS.

2.1.6 Ví dụ. Giả sử F là một trường bất kỳ và V là một F -không gian vectơ với $\dim V_F = 2$. Đặt $V = v_1F \oplus v_2F$ và

$$R = \left[\begin{smallmatrix} F & V \\ & F \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} f & v \\ 0 & f \end{smallmatrix} \right] : f \in F, v \in V \right\}$$

là mở rộng tầm thường của F bởi V . Do R không phân tích được như một R -môđun, R_R là môđun ADS (theo [19]). Chúng ta xét các idêan $I_1 = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 0 & v_1F \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] : f \in F \right\}$ và $I_2 = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 0 & v_2F \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] : f \in F \right\}$. Hiển nhiên, I_1 là phần bù của I_2 trong R_R nhưng I_1 là môđun bé trong R_R . Do đó R_R là môđun NCS.

2.1.7 Nhận xét. Ví dụ 2.1.6 cũng cho chúng ta thấy rằng, tồn tại các môđun không phân tích được nhưng không là môđun NCS.

Giả sử R là một vành và $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ là một R -môđun phải, tổng trực tiếp của các R -môđun M_i ($i \in I$) với I là một tập chỉ số nào đó. Phần còn lại của phần này chúng tôi quan tâm đến các điều kiện về M_i , ($i \in I$) sao cho M là môđun NCS.

2.1.8 Định lý. *Giả sử $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ là một tổng trực tiếp của các R -môđun M_i ($i \in I$), với I là tập chỉ số nào đó sao cho $|I| \geq 2$. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

1. M là môđun NCS;
2. *Tồn tại $i, j \in I$, $i \neq j$ sao cho với mọi môđun con đóng khác không K của M , với $K \cap M_i \leq_e K$ hoặc $K \cap M_j \leq_e K$ hoặc $K \cap M_i = 0 = K \cap M_j$ là môđun con bé trong M ;*
3. *Tồn tại $i, j \in I$, $i \neq j$ sao cho với mọi môđun con đóng khác không K của M với $K \cap M_i = 0$ hoặc $K \cap M_j = 0$ là môđun con bé trong M .*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Điều này hiển nhiên được suy ra từ định nghĩa và các tính chất của môđun NCS.

(2) $\Rightarrow$ (3) Giả sử K là một môđun con đóng khác không của M với $K \cap M_i = 0$ hoặc $K \cap M_j = 0$.

Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $K \cap M_i = 0$. Khi đó, nếu $K \cap M_j = 0$, thì theo điều kiện (2) chúng ta có K không bé trong M . Bây giờ, chúng ta giả sử $K \cap M_j \neq 0$. Gọi H là một môđun con đóng của K sao cho $K \cap M_j \leq_e H$. Khi đó, H là một môđun con đóng khác không của M . Hiển nhiên ta có, $H \cap M_j = K \cap M_j \leq_e H$. Từ điều kiện (2), chúng ta suy ra trực tiếp được H không là môđun con bé trong M . Từ đó chúng ta suy ra K không bé trong M .

(3) $\Rightarrow$ (1) Chúng ta giả sử tồn tại $i, j \in I$, $i \neq j$ sao cho với mọi môđun con đóng khác không L của M với $L \cap M_i = 0$ hoặc $L \cap M_j = 0$ không là môđun con bé trong M . Đặt K là một môđun con đóng khác không của M .

- Nếu $K \cap M_i = 0$, ta có điều cần chứng minh.

- Giả sử $K \cap M_i \neq 0$. Lấy L là một môđun con đóng của K với $K \cap M_i \leq_e L$.

Chúng ta có thể kiểm tra được $L \cap M_j = 0$ và L cũng là các môđun con đóng khác không của M . Theo giả thiết, L không là môđun con bé của M . Do đó, K không là môđun con bé của M . Điều này chứng tỏ rằng M là môđun NCS. $\square$

Từ kết quả Định lý 2.1.8 chúng ta có hệ quả trực tiếp sau:

2.1.9 Hệ quả. *Giả sử $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ là một tổng trực tiếp của các R -môđun M_i ($i \in I$), với I là tập các chỉ số và $|I| \geq 2$. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

1. M là môđun NCS;
2. Tồn tại một tập con $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ của I với $n \geq 2$ sao cho môđun con đóng khác không K của M , với $K \cap M_{j_1} \leq_e K$, hoặc $K \cap M_{j_2} \leq_e K, \dots$, hoặc $K \cap M_{j_n} \leq_e K$, hoặc $K \cap M_{j_1} = K \cap M_{j_2} = \dots = K \cap M_{j_n} = 0$ không là môđun con bé trong M .

Theo Mệnh đề 1.2.3, mọi môđun con đóng của môđun NCS là môđun NCS.

2.1.10 Định lý. *Giả sử M là môđun UC có sự phân tích $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, là tổng trực tiếp các R -môđun M_i ($i \in I$), với I là tập chỉ số khác rỗng nào đó. Khi đó, các điều kiện sau tương đương:*

1. M là môđun NCS;
2. Tồn tại $i \in I$ sao cho với mọi môđun con đóng khác không K của M với $K \cap M_i = 0$ không là môđun con bé trong M ;
3. Tồn tại $i \in I$ sao cho với mọi phần bù M_i trong M là môđun NCS nhưng không là môđun con bé trong M .

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Điều này được suy ra trực tiếp từ định nghĩa, tính chất của môđun NCS và kết quả Mệnh đề 1.2.3.

(2) $\Rightarrow$ (3) Gọi L là phần bù của M_i trong M . Theo điều kiện (2), $L \not\ll M$. Gọi N là một môđun con đóng của L . Khi đó, N là môđun con đóng của M . Theo (2) ta có $N \not\ll M$. Rõ ràng chúng ta kiểm tra được $N \not\ll L$. Do đó L là môđun NCS.

(3) $\Rightarrow$ (1) Gọi $0 \neq H$ là môđun con đóng trong M . Theo [24, Bổ đề 6], $H \cap M_i$ là môđun con đóng của M_i .

- Nếu $H \cap M_i \neq 0$ thì $H \cap M_i$ là môđun con không bé trong M (theo điều kiện (3)). Bây giờ chúng ta giả sử H là môđun con bé trong M . Khi đó, chúng ta có $H \cap M_i$ là môđun con bé trong M , điều này là mâu thuẫn. Do đó $H \not\ll M$.

- Nếu $H \cap M_i = 0$, hiển nhiên ta có $H \cap M_i$ là môđun con bé trong M , sử dụng giả thiết của (3) ta có: mọi phần bù của M_i trong M là môđun NCS. Do đó, M là môđun NCS. $\square$

2.1.11 Nhận xét. Giả sử R là một vành và M là một môđun UC sao cho $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ là tổng trực tiếp của các R -môđun M_i ($i \in I$), với I là tập chỉ số khác rỗng nào đó. Khi đó, chúng ta có nếu M là môđun NCS thì M_i là môđun NCS với mỗi $i \in I$ và với mọi môđun con đóng L của M thỏa mãn $L \cap M_i = 0$ ($i \in I$) không là môđun con bé trong M . Tuy nhiên, chúng ta không thể khẳng định được có hay không chiều ngược lại.

Chúng ta sẽ kết thúc phần này với các đặc trưng sau của lớp các R -môđun phải đều $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ (với I là tập chỉ số nào đó) sao cho M là môđun NCS.

Giả sử M là một R -môđun phải có sự phân tích $M = M_1 \oplus M_2$, xét tập hợp

$$\{x + \psi(x) \mid x \in \psi^{-1}(M_2)\},$$

trong đó đồng cấu $\psi : M_1 \rightarrow E(M_2)$. Trong [25, Bổ đề 3.8] đã chứng minh được rằng: môđun con K là phần bù của M_2 trong M nếu và chỉ nếu $K = \{x + \psi(x) \mid x \in \psi^{-1}(M_2)\}$.

Với mỗi $i \in I$, chúng ta ký hiệu $M_{-i} = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} M_j$.

2.1.12 Định lý. Giả sử rằng M là môđun UC có sự phân tích $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ là tổng trực tiếp của các R -môđun M_i ($i \in I$), với I là tập chỉ số khác rỗng nào đó. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

1. M là môđun NCS;
2. Tồn tại $i \in I$ sao cho với mỗi M_i là môđun NCS và với mỗi đồng cấu $\psi : M_{-i} \rightarrow E(M_i)$, môđun con $\{x + \psi(x) \mid x \in \psi^{-1}(M_i)\}$ là môđun NCS nhưng không là môđun con bé trong M ;

Chứng minh. Chứng minh định lý này chúng ta sử dụng trực tiếp các kết quả của [25, Bổ đề 3.8] và Định lý 2.1.10. $\square$

Tiếp theo chúng ta sẽ nghiên cứu *khi nào điều kiện NCS có tính chất di truyền?*

Chúng ta bắt đầu với hai ví dụ sau đây minh họa cho sự tồn tại các môđun NCS cũng như các môđun không là NCS chứa tổng trực tiếp các môđun nửa đơn.

2.1.13 Ví dụ. Xét $M = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ như một $\mathbb{Z}$ -môđun. Do M là một CS môđun nên M là môđun NCS.

2.1.14 Ví dụ. Giả sử F là một trường, $F \rightarrow \bar{F} \subsetneq F$ là một đẳng cấu với $a \mapsto \bar{a}$, trong đó $\bar{F}$ là một trường con của F và F là $\bar{F}$ -không gian vectơ có chiều vô hạn có cơ sở $\{e_1, e_2, \dots\}$. Chúng ta lấy $F = \mathbb{Z}_3(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Đặt $R = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix} \mid a, b \in F \}$, $S = \mathbb{Z}_2 \times R$, $M_1 = \mathbb{Z}_2 \times 0$ và $M_2 = 0 \times R$. Xét $M = M_1 \oplus M_2$ như là một S -môđun trái. Hiển nhiên chúng ta có, ${}_R R$ không là môđun NCS. Lấy đồng cấu $0 \neq f : M_2 \rightarrow M_1$ xác định bởi $f(x) = \bar{1}$. Chúng ta lưu ý rằng, $3f(x) = 3\bar{1} = \bar{1} \neq 0$. Thế nhưng, $3f(x) = f(3x) = f(0)$. Do đó, $\text{Hom}(M_2, M_1) = 0$. Ngoài ra, bằng cách lập luận tương tự, chúng ta có thể chỉ ra rằng $\text{Hom}(M_1, M_2) = 0$. Khi đó M_1 và M_2 là các môđun nội xạ lẫn nhau. Theo Định lý 1.2.4, M không là môđun NCS.

Một câu hỏi rất tự nhiên được đặt ra đó là: Với môđun M_1 và môđun nửa đơn M_2 như thế nào thì $M_1 \oplus M_2$ là môđun NCS?

2.1.15 Mệnh đề. Giả sử M là môđun UC có sự phân tích $M = M_1 \oplus M_2$ trong đó M_2 là R -môđun nửa đơn. Khi đó, M là môđun NCS nếu và chỉ nếu M_1 là môđun NCS.

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên.

Điều kiện đủ: Chúng ta giả sử rằng M_1 là môđun NCS. Gọi K là phần bù khác không của M_1 trong M . Khi đó, $M_1 \oplus K$ là môđun con cốt yếu trong M . Khi đó $M_2 \leq \text{Soc}(M) \leq M_1 \oplus K$, suy ra $M = M_1 \oplus K$. Vậy ta có $K \cong M/M_1 \cong M_2$ và do đó K là môđun NCS. Theo kết quả Định lý 2.1.10 ta có M là môđun NCS. $\square$

Chúng ta đã biết, R -môđun khác không M được gọi là *môđun hổng* (hollow) nếu mọi môđun con thực sự của nó đều là môđun con bé của M . Hay nói cách khác, môđun M là môđun hổng nếu nó có sự phân tích thành các *môđun nâng* (lifting module). Trong đó, một môđun M được gọi là *môđun nâng* nếu với mọi môđun con A của M , tồn tại sự phân tích $M = M_1 \oplus M_2$ sao cho $M_1 \leq A$ và $M_2 \cap A \ll M_2$.

2.1.16 Định lý ([23, Định lý 3]). Nếu M là môđun nâng NCS thì M là môđun CS.

2.1.17 Định lý. Cho M là một môđun hổng. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

1. M là môđun đều;
2. M là môđun CS;
3. M là môđun NCS.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) Chiều suy luận này là hiển nhiên đúng vì mọi môđun đều là môđun CS và mọi môđun CS là môđun NCS.

(3) $\Rightarrow$ (1) Giả sử A là một môđun con khác không của M . Do M là môđun NCS, tồn tại một môđun con bù C của M sao cho $A \leq_e C$ và $C \not\leq M$ (theo Mệnh đề 2.1.1(2)). Do M là môđun hồng nên $C = M$. Suy ra, $A \leq_e M$ và M là các môđun đều. $\square$

Bây giờ, chúng tôi đưa ra một số điều kiện để *môđun con của một môđun NCS là môđun NCS*.

2.1.18 Định lý. *Cho M là một R -môđun:*

1. *Giả sử N là môđun NCS, con của môđun M và K là một hạng tử trực tiếp của M . Nếu $K + N$ là môđun không suy biến thì $K \cap N$ không là môđun con bé trong N .*
2. *Giả sử M là một môđun không suy biến. Nếu C là một môđun con bù nào đó của M và N là môđun NCS con của môđun M , thì $C \cap N$ không là môđun con bé trong N .*

Chứng minh. (1) Giả sử K là một hạng tử trực tiếp của M và $A = K \cap N$. Do N là một môđun NCS nên tồn tại một môđun con bù C của N sao cho A là môđun con cốt yếu trong C và $C \not\leq N$. Đặt $A \neq C$. Khi đó $K \neq K + C$. Đặt $k + c \in K + C$ sao cho $k + c \notin K$, với $k \in K$ và $c \in C$. Rõ ràng $c \neq 0$. Khi đó, theo [25, Exercise 2.3], tồn tại một idêan trái cốt yếu L của R sao cho $0 \neq Lc \subseteq A$. Từ K là môđun không suy biến nên $0 \neq L(k + c) \subseteq K$. Do đó, K cốt yếu trong $K + C$, điều này mâu thuẫn. Vậy $A = C$.

(2) Chứng minh tương tự cách chứng minh của (1). $\square$

2.1.19 Định lý. *Giả sử rằng, với mỗi môđun con bù C của M , môđun con $C \cap N$ là môđun con bù trong N và $C \cap N$ không là môđun con bé khác không trong N . Khi đó, N là môđun NCS.*

Chứng minh. Giả sử M là môđun NCS và K là một môđun con của N . Theo Bổ đề 2.1.1(2), tồn tại môđun con bù C của M sao cho K cốt yếu trong C và $C \not\leq M$. Khi đó, K là môđun con cốt yếu trong $C \cap N$. Theo giả thiết ta có

$C \cap N$ là một môđun con bù của N và $C \cap N$ không là môđun con bé trong N . Theo Bổ đề 2.1.1(2) ta suy ra N là môđun NCS. $\square$

Môđun con K của môđun M được gọi là *môđun bất biến đầy đủ* (*fully invariant*) nếu $f(K) \subseteq K$ với mọi $f \in \text{End}(M)$. Chúng ta lưu ý rằng, căn Jacobson và môđun con suy biến là các ví dụ về lớp môđun con bất biến đầy đủ. Một R -môđun M được gọi là *môđun duo* nếu mọi môđun con của M là bất biến đầy đủ.

2.1.20 Mệnh đề. *Nếu $M = M_1 \oplus M_2$ là một môđun duo, trong đó tất cả M_i là các môđun NCS, thì M là môđun NCS.*

Chứng minh. Giả sử N là một môđun con đóng khác không của M và $N \ll M$. Khi đó $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$. Điều này suy ra, $N \cap M_i \ll E(N \cap M_i)$ và $N \cap M_i$ là một môđun con đóng của M và là môđun con bé trong M_i với mọi $i = 1, 2$. Do đó, $N \cap M_i$ là một môđun con đóng của M_i với mọi $i = 1, 2$. Theo giả thiết, $N \cap M_1 = N \cap M_2 = 0$ và do đó $N = 0$, điều này là mâu thuẫn. Vậy N là môđun NCS. $\square$

2.1.21 Nhận xét. Chúng ta lưu ý rằng, nếu R là một vành NCS phải với $ReR = R$, khi đó theo [23, Định lý 4] ta có eRe cũng là một vành NCS phải và một câu hỏi hiển nhiên đặt ra đó là: có thể loại bỏ điều kiện “ $ReR = R$ ” được hay không?

2.1.22 Nhận xét. Chúng ta đã biết rằng, mọi môđun đều nhúng được trong một môđun NCS (chính là bao nội xạ của nó). Vì vậy, một câu hỏi hiển nhiên được đặt ra đó là: *làm thế nào để đặc trưng tính chất NCS của các môđun thông qua bao nội xạ của chính nó?* Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một số kết quả để trả lời cho câu hỏi này.

2.1.23 Hệ quả. *Giả sử N là một môđun sao cho $N \cap D$ là một hạng tử trực tiếp của N , với D là môđun con nội xạ của $E(N)$. Khi đó, N là môđun NCS.*

Chứng minh. Nếu chúng ta xét N như là một môđun con của môđun nội xạ $E(N)$ (do đó nó là môđun NCS). Khi đó, theo Định lý 2.1.19 ta có N là môđun NCS. □

2.1.24 Hệ quả. *Giả sử N là một môđun không suy biến. Khi đó, N là môđun NCS nếu và chỉ nếu $N \cap D$ là một hạng tử trực tiếp của N , với mọi D là môđun con nội xạ của $E(N)$.*

Chứng minh. Kết quả của hệ quả này chúng ta suy ra từ Hệ quả 2.1.23 và Định lý 2.1.18(1). □

2.2 Một số lớp vành NCS và QF-vành

Trước hết chúng ta xét 2 điều kiện sau:

(C2) : Nếu môđun con N của M đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của M thì N là một hạng tử trực tiếp của M .

(C3) : Với mọi $X, Y \leq_d M$ thỏa mãn $X \cap Y = 0$, ta có $X \oplus Y \leq_d M$.

Môđun M được gọi là *môđun tựa liên tục* (quasi-continuous) nếu nó là môđun CS và thỏa mãn tính chất (C3).

Môđun M được gọi là *môđun liên tục* (continuous module) nếu nó là môđun CS và thỏa mãn điều kiện (C2).

2.2.1 Mệnh đề. *Giả sử R là một vành có chiều Goldie hữu hạn. Các điều kiện sau tương đương:*

1. R là vành QF.
2. R là vành liên tục phải, $(R \oplus R)_R$ là môđun NCS và với mọi môđun con đều của $R^{(\mathbb{N})}$ được chứa trong một môđun con hữu hạn sinh của $R^{(\mathbb{N})}$.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Điều này hiển nhiên được suy ra từ tính chất của vành QF.

(2) $\Rightarrow$ (1) Giả sử R là vành liên tục phải. Khi đó $R/J(R)$ là một vành chính quy và mọi lũy đẳng của $R/J(R)$ đều có thể nâng được tới module $J(R)$. Do R có chiều Goldie hữu hạn, $R/J(R)$ không có họ vô hạn các lũy đẳng trực giao và do đó $R/J(R)$ là môđun Artin nửa đơn. Chúng ta suy ra R là vành nửa hoàn chỉnh. Ta có $(R \oplus R)_R$ là môđun NCS và R^2 là môđun CS theo Định lý 2.1.16.

Chúng ta cũng đã biết, vành liên tục nửa hoàn chỉnh phải R là vành tựa nội xạ phải nếu và chỉ nếu $(R \oplus R)_R$ là môđun CS. Do đó, R là vành tựa nội xạ phải. Theo giả thiết, mọi môđun con đều của $R^{(\mathbb{N})}$ đều cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của R . Do đó, R là vành QF (Theo [11, Hệ quả 2]). $\square$

Kết quả định lý sau là sự mở rộng kết quả của [6, Định lý 2.21].

2.2.2 Định lý. *Giả sử R là một vành, các mệnh đề sau là tương đương:*

1. R là vành QF.

2. R là vành Noether trái, P -nội xạ phải và NCS phải.

3. R là vành GP-nội xạ phải, NCS phải và thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải.

Chứng minh. Từ tính chất của vành QF, hiển nhiên chúng ta có $(1) \Rightarrow (2)$ và $(1) \Rightarrow (3)$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Sử dụng kết quả của [22, Bổ đề 2.4], R là vành Artin trái và do đó, theo Định lý 2.1.16 ta có R là vành CS phải. Theo [6, Định lý 2.21] ta có R là vành QF.

$(3) \Rightarrow (1)$ Sử dụng kết quả của [5, Định lý 3.7] ta có R là vành Artin trái, do đó R là vành QF. $\square$

Vành R được gọi là *vành CPA phải* nếu với mọi R -môđun xiclic phải là một tổng trực tiếp của một môđun xạ ảnh và một môđun Artin ([8, Page 186]).

2.2.3 Định lý. *Nếu R là vành AGP-nội xạ phải, vành CPA phải, khi đó R là vành Artin phải.*

Chứng minh. Theo giả thiết, R có sự phân tích

$$R_R = A \oplus U^{(1)} \oplus \dots \oplus U^{(n)}$$

trong đó A là một idêan của R sao cho A_R là môđun Artin và với mỗi $U^{(i)}$ là một R -môđun phải đều, trong đó $\text{Soc}(U_R^{(i)}) = 0$. Trước hết, chúng ta chứng minh rằng $U^{(i)} = 0$ với mọi i . Giả sử $U^{(i)} \neq 0$ với mọi i . Giả sử $x \in U^{(i)}$ với $x \neq 0$. Do R là vành AGP-nội xạ phải, do đó tồn tại $n \in \mathbb{N}$ và $X \leq_R R$ sao cho $lr(x^n) = Rx^n \oplus X$. Mặt khác, R là vành CPA phải, $x^n R = P_R \oplus B_R$, trong đó P_R là môđun xạ ảnh và B_R là môđun Artin. Tuy nhiên, $\text{Soc}(x^n R) = 0$ do đó suy ra $B = 0$, nghĩa là $x^n R$ là môđun xạ ảnh. Suy ra, $r(x^n)$ là một hạng tử trực tiếp của R_R , đặt $r(x^n) = eR$ với $e^2 = e \in R$. Do đó

$$R(1 - e) = lr(x^n) = Rx^n \oplus X,$$

trong đó $1 = rx^n + s + e$ với $r \in R$, $s \in X$ nào đó. Điều này suy ra

$$x^n - x^xrx^n - x^ns = x^ne \in R(1 - e) \cap Re = 0.$$

Khi đó $x^n - x^xrx^n = x^ns \in Rx^n \cap X = 0$, and so $x^n = x^xrx^n$, điều này suy ra x^nr là một lũy đẳng của R và $x^nR = (x^nr)R$. Do đó, x^nR là một hạng tử trực tiếp của R_R . Do đó

$$R = x^nR \oplus I,$$

trong đó $I \leq R_R$. Vì vậy

$$U^{(i)} = (x^nR \oplus I) \cap U^{(i)} = x^nR \oplus (I \cap U^{(i)}).$$

Từ $x^nR \neq 0$ và $U^{(i)}$ là môđun đều, chúng ta có $I \cap U^{(i)} = 0$. Do đó $U^{(i)} = x^nR$ với mỗi $0 \neq x \in U^{(i)}$, điều này có nghĩa là $U^{(i)}$ là môđun đơn. Điều này là mâu thuẫn vì $Soc(U^{(i)}) = 0$.

Vậy $U^{(i)} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, và do đó $R = A$. Vậy ta có R là vành Artin phải. $\square$

Vành R được gọi là F -nội xạ phải nếu mọi R -đồng cấu phải từ một idêan phải hữu hạn sinh của R đến R đều có thể mở rộng được thành một tự đồng cấu của R .

2.2.4 Hệ quả. *Nếu R là vành F -nội xạ phải và là vành CPA phải, khi đó R là vành QF.*

Chúng ta lưu ý rằng, vành GP-nội xạ phải là vành AGP-nội xạ phải.

2.2.5 Định lý. *Các điều kiện sau là tương đương trên vành R :*

1. R là vành QF;
2. R là GP-nội xạ phải, NCS phải và là vành CPA phải.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Dễ dàng suy ra từ tính chất của vành QF.

(2) $\Rightarrow$ (1) Giả sử R là vành GP-nội xạ phải, vành NCS phải và là vành CPA phải. Khi đó, R là vành Artin phải, và do đó R là vành CS phải theo Định lý 2.1.16. Sử dụng [26, Định lý 2.9] chúng ta suy ra R là vành QF. $\square$

2.2.6 Nhận xét. Một câu hỏi hết sức tự nhiên được đặt ra: Liệu Định lý 2.2.5 vẫn thỏa mãn không nếu điều kiện “GP-nội xạ phải” được thay thế bởi điều kiện “AGP-nội xạ phải”?

Câu trả lời phủ định câu hỏi trên được chúng tôi đưa ra thông qua ví dụ sau.

2.2.7 Ví dụ. Đặt $F = \mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots)$ và $\bar{F} = \mathbb{Q}(x_2, x_3, \dots)$ là một trường con của F ($F \neq \bar{F}$). Giả sử rằng $\varphi : F \rightarrow \bar{F}$ là một đẳng cấu thông qua $\varphi(a) = a, \forall a \in \mathbb{Q}$ và $\varphi(x_i) = x_{i+1}$, với mọi $i = 1, 2, \dots$. Đặt $R := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in F \right\}$ và xác định

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' & \varphi(x)y' + yx' \\ 0 & xx' \end{pmatrix}.$$

Khi đó R là vành chỉ có 3 idêan phải: 0 , R và $\text{Soc}({}_R R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid y \in F \right\}$.

Chúng ta dễ dàng thấy rằng R là vành CS phải và Artin phải.

Nếu R là vành AGP-nội xạ phải: Giả sử $t = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in R$, $t \neq 0$. Nếu $x \neq 0$ thì

t là phần tử đơn vị của R và do đó $lr(t) = Rt$. Nếu $x = 0$ thì $t = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Do đó $r(t) = \text{Soc}({}_R R)$ và $lr(t) = l(\text{Soc}({}_R R)) = \text{Soc}({}_R R)$. Điều này chứng tỏ rằng Rt là một hạng tử trực tiếp của $lr(t)$. Vậy R là vành AGP-nội xạ phải.

Nếu R không là vành min-nội xạ phải: Đặt $x_1 \in F \setminus \bar{F}$. Định nghĩa $f : \text{Soc}({}_R R) \rightarrow R_R$ xác định như sau $f\left(\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ với mọi $\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Soc}({}_R R)$. Chúng ta dễ dàng thấy rằng, f là một R -đồng cấu. Nếu f mở rộng được tới R_R , khi đó tồn tại $c = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R$ sao cho $f = c \cdot$. Do đó

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi(a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $x_1 = \varphi(a) \in \bar{F}$, điều này là mâu thuẫn. Chúng ta lưu ý rằng, $\text{Soc}({}_R R)$ là R -môđun phải đơn. Do đó R không là vành min-nội xạ phải. Do đó R là vành NCS phải, AGP-nội xạ phải và là vành Artin phải. Tuy nhiên, R không là vành QF.

2.3 Vành bất biến đẳng cấu

Một R -môđun phải M được gọi là bất biến đẳng cấu nếu nó bất biến qua mọi tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó. Một vành R được gọi là bất biến đẳng cấu phải nếu R_R là bất biến đẳng cấu.

Rõ ràng mọi vành CS phải là vành NCS phải. Tuy nhiên chiều ngược lại không đúng. Chúng ta có thể xét ví dụ sau:

2.3.1 Ví dụ. Gọi K là một thể và V là K -không gian vectơ trái với số chiều vô hạn. Đặt $S = \text{End}_K(V)$ và $R = \begin{pmatrix} S & S \\ S & S \end{pmatrix}$. Khi đó, R là một vành NCS phải nhưng không là CS phải.

Cho M là một môđun hữu hạn, khi đó chúng ta có thể kiểm tra được M là NCS nếu và chỉ nếu M là môđun đều.

Tác giả Đinh Văn Huỳnh đã chứng minh được.

2.3.2 Mệnh đề. *Cho R là vành nửa hoàn chỉnh. Khi đó, nếu R là vành NCS phải thì R là vành CS phải.*

Một phần tử lũy đẳng e của R được gọi là lũy đẳng địa phương nếu $\text{End}(eR)$ là một vành địa phương.

2.3.3 Bổ đề. *Giả sử R là vành bất biến đẳng cấu phải. Nếu $r_R(x) = r_R(y)$ với $x, y \in R$ thì suy ra $Rx = Ry$.*

Chứng minh. Điều này suy ra từ kết quả nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải thì mỗi đơn cấu từ mỗi ideal phải của R đến R đều mở rộng được đến R . $\square$

2.3.4 Định lý. *Nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải và thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải thì R là vành nửa nguyên sơ.*

Chứng minh. Chúng ta xét dãy

$$Rx_1 \geq Rx_2 \geq \cdots$$

của các idêan trái xyclic của R . Khi đó, chúng ta có $r(x_1) \leq r(x_2) \leq \dots$. Theo giả thiết, thì tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $r(x_n) = r(x_{n+k})$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Theo Bổ đề 2.3.3, $Rx_n = Rx_{n+k}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Điều này suy ra R là vành hoàn chỉnh phải.

Bây giờ chúng ta xét dãy tăng

$$r(J(R)) \leq r(J(R)^2) \leq \dots$$

Lại theo giả thiết, thì tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $r(J(R)^n) = r(J(R)^{n+k})$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Đặt $B = J(R)^n$. Khi đó, $r(B) = r(B^2)$ và $B^2 \neq 0$. Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh $J(R)$ là idêan lũy linh. Thật vậy, giả sử $J(R)$ là idêan không lũy linh. Đặt

$$\mathcal{S} = \{r(b) \mid b \in B \text{ and } Bb \neq 0\}.$$

Khi đó, chúng ta có thể kiểm tra được $\mathcal{S}$ là một tập khác rỗng. Khi đó, $\mathcal{S}$ có một phần tử cực đại, và ta gọi đó là $r(b_0)$ với $b_0 \in B$. bây giờ chúng ta có $BBb_0 = 0$ và suy ra $b_0R \leq r(B^2) = r(B)$, và vì vậy $Bb_0 = 0$, điều này mâu thuẫn. Khi đó, tồn tại một phần tử x của B sao cho $Bxb_0 \neq 0$. Tuy nhiên, vì $r(b_0) \leq r(xb_0)$ nên theo tính cực đại của $r(b_0)$ chúng ta được $r(b_0) = r(xb_0)$. Từ Bổ đề 2.3.3 chúng ta thấy $Rb_0 = Rxb_0$, điều này có nghĩa là $b_0 = sxb_0$ với $s \in R$ nào đó hay $b_0(1 - sx) = 0$. Vì $sx \in B \leq J(R)$ nên ta có $b_0 = 0$, điều này mâu thuẫn. $\square$

2.3.5 Định lý. *Cho vành R thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

1. R là vành QF .
2. R là vành bất biến đẳng cấu phải và mỗi idêan phải đóng của R là một linh hóa tử.
3. R là vành bất biến đẳng cấu phải và NCS phải.
4. R là vành bất biến đẳng cấu phải và mỗi idêan phải đơn cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của R_R .

5. R là vành bất biến đẳng cấu phải với eR là đều cho mỗi lũy đẳng địa phương $e \in R$.

Chứng minh. Theo Định lý 2.3.4 thì vành R là nửa nguyên sơ.

(1) $\Rightarrow$ (2) và (1) $\Rightarrow$ (5) là rõ ràng.

(2) $\Rightarrow$ (3) Chúng ta có R là vành bất biến đẳng cấu phải nên mỗi đồng cấu từ mỗi idêan phải đơn đến R đều có thể mở rộng đến R (vành R có tính chất này được gọi là vành nội xạ cực tiểu phải), và vì vậy $\text{Soc}(R_R) \leq \text{Soc}({}_R R)$. Điều này suy ra mỗi R -môđun phải đơn đều nhúng vào R_R theo [16, Bổ đề 1.48]. Vậy, R là một vành liên tục phải. (3) $\Rightarrow$ (4) Vì mỗi vành nửa nguyên sơ là vành hoàn chỉnh hai phía. Từ đó, suy ra vành R là vành CS phải theo Định lý 2.3.2. Điều này có nghĩa là mỗi idêan phải đơn cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của R_R .

(4) $\Rightarrow$ (1) Giả sử $\text{Soc}(R_R) = \bigoplus_{i \in I} S_i$ với mỗi S_i là đơn cho mỗi $i \in I$. Vì mỗi idêan phải đơn cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của R_R nên tồn tại các phần tử lũy đẳng e_i của R sao cho S_i cốt yếu trong $e_i R$. Chú ý $\{e_i R\}_{i \in I}$ là một họ độc lập vì $\{S_i\}_{i \in I}$ là một họ độc lập. Từ đó suy ra $\bigoplus_{i \in I} e_i R$ cốt yếu trong R_R . Mặt khác, mỗi vành bất biến đẳng cấu phải thỏa mãn điều kiện C2 nên $\bigoplus_{i \in I} e_i R$ là một hạng tử trực tiếp địa phương của R_R . Vì R là vành R thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải nên chúng ta có $\bigoplus_{i \in I} e_i R$ là một idêan phải đóng của R_R theo [8, Bổ đề 8.1(1)]. Từ đây chúng ta suy ra $R_R = \bigoplus_{i \in I} e_i R$ và mỗi $e_i R$ là đều. Vậy R là vành tự nội xạ phải. Tóm lại, R là vành QF.

(5) $\Rightarrow$ (1) Chúng ta chú ý điểm chứng minh của (2) $\Rightarrow$ (3), thì R là vành nửa hoàn chỉnh và vì vậy $R = \bigoplus_{i=1}^n e_i R$ với e_i là các phần tử lũy đẳng địa phương. Theo giả thiết $e_i R$ là đều với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Từ đó chúng ta có R là vành tự nội xạ phải. $\square$

Như chúng ta được biết một vành CS phải và thỏa mãn điều kiện ACC trên các idêan phải cốt yếu là một vành Nôte phải. Từ đó, chúng ta có kết quả sau:

2.3.6 Hệ quả. *Các điều kiện sau là tương đương với vành R đã cho:*

- 1. R là vành QF .*
- 2. R là vành bất biến đẳng cấu CS phải và thỏa mãn điều kiện ACC trên các $idêan$ phải cốt yếu.*

KẾT LUẬN

Trên cơ sở tài liệu tham khảo chính [18] và các tài liệu tham khảo khác, nội dung chính của luận văn đã đạt được bao gồm:

1. Trình bày các kết quả về đặc trưng của lớp môđun và vành NCS (Định lý 2.1.2, Định lý 2.1.3).
2. Trình bày được một số kết quả trả lời cho câu hỏi: Khi nào thì tổng trực tiếp của các môđun là NCS, tiêu biểu là Định lý 2.1.8, Định lý 2.1.10.
3. Trình bày câu trả lời cho câu hỏi: Khi nào thì tính NCS đóng dưới các môđun con (Định lý 2.1.19).
4. Trình bày một số kết quả ứng dụng đặc trưng vành QF thông qua lớp vành NCS và các vành mở rộng của vành nội xạ. Từ các kết quả về vành NCS và các mở rộng của vành nội xạ chính Mệnh đề 2.2.1, Định lý 2.2.2, Định lý 2.2.5, chúng ta có được một số kết quả của vành QF thông qua vành bất biến đẳng cấu (Định lý 2.3.5).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

A Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Tiên Quang - Nguyễn Duy Thuận (2001), *Cơ sở lý thuyết môđun và vành*, NXB Giáo dục.

B Tiếng Anh

- [2] Alahmadi, A., Jain S. K., Leroy, A. (2012). ADS modules. *J. Algebra* 352:215-222.
- [3] Anderson, F. W., Fuller, K. R. (1974). *Rings and Categories of Modules*. New York: Springer-Verlag.
- [4] Björk, J. E. (1970). Rings satisfying certain chain conditions. *J. Reine Angew Math.* 245:63-73.
- [5] Chen, J., Ding, N. (1999). On general principally injective rings. *Commun. Algebra* 25(5):2097-2116.
- [6] Chen, J., Li, W. (2004). On artiness of right CF rings. *Commun. Algebra* 32:4485-4494.
- [7] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules*. Supplements and Projectivity in Module Theory Frontiers in Math. Boston, Birkhäuser.
- [8] Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., Wisbauer, R. (1994). *Extending Modules*. Pitman RN Mathematics, Vol. 313. Harlow: Longman.

- [9] Hai, P. T., Koşan, M. T., Quynh, T. C. (2020). Weakly $\oplus$ -supplemented modules and weakly $D2$ modules. *Bull. Korean Math. Soc.* 57(3): 691-707
- [10] Huynh. D. V., *Rings in which no nonzero complement is small*, Preprint.
- [11] Huynh, D. V., Tung, N. S. (1996). A note on quasi-Frobenius rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* 124:371-375.
- [12] Koşan, M. T., Quynh, T. C., Zemlicka, J. (2019). Essentially ADS modules and rings. Rings, modules and codes. *Contemp. Math.*, 727, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 223-236.
- [13] Ming, C. R. Y. (1985). On regular rings and artinian rings II, *Riv. Mat. Univ. Parma* 11(4):101-109.
- [14] Mohamed, S. H., Müller, B. J. (1990). *Continuous and Discrete Modules*. London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 147. Cambridge: Cambridge University Press.
- [15] Nicholson, W. K., Yousif, M. F. (1998). Annihilators and the CS-condition. *Glasgow Math. J.* 40(2):213-222.
- [16] Nicholson, W. K., Yousif, M. F. (2003). *Quasi-Frobenius Rings*. Cambridge Univ. Press.
- [17] Nicholson, W. K., Yousif, M. F. (1995). Principally injective rings. *J. Algebra* 174:77-93.
- [18] Fatih Karabacak, M. Tamer Koşan, T. Cong Quynh, D. Duc Tai, Özgür Taşdemir, On NCS modules and rings *Commu. Algebra* **48** (2020) 5236-5246.
- [19] Quynh, T. C., Koşan, M. T. (2014). On ADS modules and rings. *Commun. Algebra* 42(8):3541-3551.

- [20] Quynh, T. C., Serap, S. (2019). On dual automorphism-invariant and superfluous ADS-modules. Rings, modules and codes, *Contemp. Math.*, 727, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 337-347.
- [21] Quynh, T. C., Koşan, M. T., Thuyet, L. V. (2020). On Automorphism-Invariant Rings with Chain Conditions, *Vietnam J. Math.*, 48(1): 23-29.
- [22] Shen, L. (2007). An approach to the Faith-Menal conjecture, *Int. Electron. J. Algebra* 5:46-50.
- [23] Shen, L., Li, W. (2017). Generalization of CS condition, *Front. Math. China* 12(1):199-208.
- [24] Smith, P. F. (1992). Modules for which every submodule has unique closure. *Proceedings of the Biennial Ohio-Denison Conference* 302-313.
- [25] Tercan, A., Yucel, C. C. (2015). *Module Theory, Extending Modules and Generalizations*. Birkhauser, Basel, Frontiers in Mathematics, Monograph Series.
- [26] Thuyet, L. V., Quynh, T. C. (2005). On general injective rings with chain conditions. *Algebra Colloq.* 16(2):243-252.