

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG: XÁC SUẤT
THỐNG KÊ VÀ TOÁN KINH TẾ

Let your light so shine before men, that they may see your good works, and glorify your Father which is in heaven (Matthew 5:16).

Mục lục

1	Xác suất của biến cố và phân phối xác suất	3
2	Thông kê và các suy luận thống kê	5
3	Một số mô hình toán kinh tế	7
3.1	Bài toán quy hoạch tuyến tính	8
3.1.1	Mở đầu	8
3.1.2	Bài toán quy hoạch tuyến tính	10
3.1.3	Các dạng đặc biệt	15
3.1.4	Tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính	16
3.1.5	Phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch	19
3.2	Phương pháp đơn hình đối ngẫu	27
3.2.1	Cặp bài toán đối ngẫu	27
3.2.2	Phương pháp đơn hình đối ngẫu	27
3.3	Bài tập chương 2	27
4	Một số mô hình tuyến tính đặc biệt	33
4.1	Bài toán vận tải	33
4.1.1	Bài toán vận tải cổ điển	33
4.1.2	Tính chất của bài toán vận tải	34
4.2	Bài toán sản xuất đồng bộ	34
4.2.1	Bài toán	34
4.2.2	Tính chất của bài toán sản xuất đồng bộ	37
4.3	Bài toán quyết định tối ưu	37
4.3.1	Bài toán trò chơi ma trận tổng bằng không	40
4.3.2	Điểm yên ngựa và chiến lược tối ưu	42
4.3.3	Mô tả bài toán trò chơi bởi bài toán quy hoạch	45
4.3.4	Thuật toán tìm chiến lược tối ưu của trò chơi	48
5	Mô hình cân đối liên ngành	51

6	Mô hình phục vụ công cộng	53
7	Mô hình lưu trữ	55

Thông tin về học phần

Tên học phần:	Xác suất thống kê và toán kinh tế (Probability, Statistics and Mathematical Economics)
Mã số học phần:	MAT20007
Thuộc khối kiến thức/kỹ năng:	Kiến thức cơ sở ngành
Số tín chỉ:	04
Số tiết lý thuyết:	48
Số tiết thảo luận/bài tập:	12
Số tiết thực hành:	0
Số tiết hoạt động nhóm:	0
Số tiết tự học:	120
Môn học tiên quyết:	Toán cao cấp cho các nhà kinh tế
Môn học song hành:	Không

1

Xác suất của biến cố và phân phối xác suất

“Better than a thousand days of diligent study is one day with a great teacher.”

– Japanese Proverb, <http://quotationsbook.com>

Giới thiệu

Cho đến nửa đầu thế kỷ hai mươi, lý thuyết xác suất mới trở nên một khoa học được xây dựng chặt chẽ bằng hệ tiên đề Kolmogorov. Cho đến nay, lý thuyết xác suất được ứng dụng vào rất nhiều ngành khoa học khác nhau, trong đó có các ví dụ điển hình như sau:

- Lý thuyết xác suất được sử dụng trong di truyền học như là một mô hình cho sự đột biến và đóng một vai trò quan trọng trong ngành tin-sinh.
- Nhiều ngành lý thuyết phát triển cao xem các loại nhiễu trong các thiết bị điện tử và hệ thống giao tiếp như là các quá trình ngẫu nhiên.
- Rất nhiều các mô hình trong nghiên cứu biến đổi khí quyển sử dụng các khái niệm của lý thuyết xác suất.
- Xác suất đóng vai trò nền tảng của ngành lý thuyết tài chính.
- Xác suất được sử dụng để nghiên cứu các hệ thống phức hợp và cải tiến độ tin cậy của các hệ thống đó, ví dụ như các hệ thống trong thương mại hiện đại hoặc không quân.

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu các khái niệm cơ bản của lý thuyết xác suất như không gian mẫu, biến cố ngẫu nhiên, độ đo xác suất, xác suất có điều kiện, và tính độc lập. Qua đó, chúng ta sẽ từng bước xây dựng nên mô hình toán học cho các hiện tượng ngẫu nhiên và tính xác suất của các biến cố, xác suất có điều kiện thông qua các công thức tính xác suất như công thức cộng xác suất, công thức nhân xác suất, công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes. Bên cạnh đó, chương này cũng giới thiệu những kiến thức cơ bản về biến ngẫu nhiên, vector ngẫu nhiên, hàm phân phối, các phân phối xác suất quan trọng và các đặc trưng của biến ngẫu nhiên như kỳ vọng, phương sai và độ lệch tiêu chuẩn.

2

Thống kê và các suy luận thống kê

Giới thiệu

Trong Chương 1, chúng ta đã nghiên cứu về các bài toán mang yếu tố ngẫu nhiên. Dựa vào các kiến thức của Chương 1, chúng ta sẽ nghiên cứu các bài toán của thống kê toán học và xử lý số liệu.

Thống kê toán học là khoa học nghiên cứu các phương pháp thu thập, phân tích, xử lý các số liệu để đưa ra các suy luận có cơ sở khoa học phục vụ cho việc quản lý tự nhiên, xã hội.

Nội dung chính của chương này bao gồm:

- Mẫu ngẫu nhiên
- Bài toán ước lượng tham số
- Bài toán kiểm định giả thuyết
- Bài toán phân tích tương quan và hồi quy.

3

Một số mô hình toán kinh tế

Giới thiệu

Trong Chương này, chúng ta sẽ vận dụng các kiến thức của lý thuyết xác suất, thống kê, đại số tuyến tính và quy hoạch tuyến tính để nghiên cứu một số mô hình toán kinh tế. Nội dung của chương bao gồm:

- Một số mô hình toán kinh tế điển hình như mô hình lập kế hoạch sản xuất, mô hình bài toán vận tải, mô hình bài toán khẩu phần thức ăn, mô hình bài toán lập kế hoạch kinh doanh, mô hình bài toán sản xuất đồng bộ, mô hình bài toán cân đối liên ngành, mô hình bài toán đầu tư thị trường chứng khoán.

- Bài toán quy hoạch tuyến tính.
- Phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính.
- Mô hình bài toán vận tải.

Chuẩn đầu ra của chương

Mục tiêu	Mô tả CDR	Mức độ giảng dạy
G1.3	Nắm vững nội dung và phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính, các mô hình toán kinh tế điển hình.	T,U
G2.7	Vận dụng các kiến thức về xác suất, thống kê, quy hoạch tuyến tính vào giải quyết một số mô hình toán kinh tế như bài toán lập kế hoạch sản xuất, bài toán vận tải, bài toán khẩu phần thức ăn, bài toán quyết định tối ưu và các mô hình khác nảy sinh trong thực tế ngành kinh tế.	U
G3.1	Có thái độ tích cực hợp tác với giáo viên và các sinh viên khác trong quá trình học và làm bài tập.	T
G3.2	Phân công công việc trong một nhóm bài tập một cách hiệu quả.	U
G3.3	Có khả năng thuyết trình các vấn đề tự học ở nhà và báo cáo kết quả làm việc của bản thân và của nhóm.	U

Nội dung của chương

3.1 Bài toán quy hoạch tuyến tính

3.1.1 Mở đầu

Trong thực tế, khi tiến hành kế hoạch hóa sản xuất, điều khiển hệ thống và thiết kế kỹ thuật chúng ta luôn hướng đến một mục đích tiết kiệm được vốn, sức lao động, thời gian và tăng hiệu quả giải quyết các vấn đề được đặt ra. Vấn đề đặt ra là: "*Làm thế nào để con người chúng ta tối đa hóa được hiệu quả giải quyết của các vấn đề được đặt ra trong điều kiện hiện có các yếu tố về vật chất, khoa học kỹ thuật và nhân sự...*".

Vào những năm 40 của thế kỷ XX những vấn đề lý luận để giải quyết các bài toán tối ưu hóa được đặt ra mới được quan tâm nghiên cứu một cách có khoa học. Năm 1939, nhà toán học người Nga, Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912 – 1986) đã công bố kết quả nghiên cứu về các phương

pháp toán học trong tổ chức và quy hoạch sản xuất. Kantorovich đã chỉ ra rằng, có rất nhiều các mô hình trong thực tế đều có thể mô hình hóa bởi một dạng mô hình toán học. Tuy vậy, các kết quả của Kantorovich đã không được công nhận ở thời đó. Năm 1941 Frank Hitchcock [3] đã ứng dụng ý tưởng này trong nghiên cứu các bài toán về giao thông vận tải. Năm 1945, George Stigler đã vận dụng lý thuyết này để xác lập khẩu phần ăn cho mỗi cá nhân với chi phí tối thiểu. Thông qua những kết quả nghiên cứu này, đặc biệt là trong các bài toán điều binh trong chiến tranh thế giới thứ hai, đã cho người ta thấy rõ ý nghĩa của lý thuyết quy hoạch toán học trong việc giải quyết các bài toán tối ưu hóa trong thực tiễn. Sau đó, năm 1951, George Dantzig đã đưa ra phương pháp đơn hình để giải bài toán quy hoạch tuyến tính được đề xuất bởi Kantorovich. Với ý nghĩa to lớn của lý thuyết quy hoạch tuyến tính trong việc tối ưu hóa các mô hình trong thực tế Kantorovich đã được nhận giải thưởng Nobel về kinh tế năm 1975.

Bài toán toán tối ưu hóa tổng quát được phát biểu như sau:

Tìm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ làm cực đại hóa (cực tiểu hóa) hàm $f(x)$:

$$f(x) \rightarrow \max(\min) \quad (3.1)$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} g_i(x) (\leq, =, \geq) b_i & i = \overline{1, m} \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.2)$$

Bài toán (3.2) (3.2) được gọi là một quy hoạch. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm mục tiêu, các hàm $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ được gọi là các hàm ràng buộc, mỗi đẳng thức hoặc bất đẳng thức trong hệ (3.2) được gọi là một ràng buộc. Tập hợp

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n | \text{thỏa mãn điều kiện (3.2)}\} \quad (3.3)$$

được gọi là tập các phương án. Mỗi điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ được gọi là một phương án (hay một lời giải chấp nhận được). Một phương án $x^* \in M$ là cực đại (hay cực tiểu) hàm mục tiêu, cụ thể là

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \forall x \in M \text{ đối với bài toán max}$$

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in M \text{ đối với bài toán min}$$

được gọi là phương án tối ưu (hay lời giải của bài toán). Khi đó, $f(x^*)$ được gọi là giá trị tối ưu của bài toán.

Phân loại các bài toán

- Nếu cả hàm mục tiêu $f(x)$ và hàm ràng buộc $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ đều là những hàm tuyến tính ta có *bài toán quy hoạch tuyến tính*.

- Nếu hàm mục tiêu $f(x)$ hoặc hàm ràng buộc $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ phụ thuộc tham số ta có *bài toán quy hoạch tham số*.

- Nếu quá trình ta xét là quá trình nhiều giai đoạn nói chung, hay quá trình phát triển theo thời gian nói riêng thì ta có *bài toán quy hoạch động*.

- Nếu hàm mục tiêu $f(x)$ hoặc hàm ràng buộc $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ là hàm phi tuyến ta có *bài toán quy hoạch phi tuyến*.

- Nếu tập phương án là tập rời rạc ta có *bài toán quy hoạch rời rạc*. Nếu tập phương án chỉ nhận các giá trị nguyên ta có *bài toán quy hoạch nguyên*.

- Nếu trên cùng một tập phương án ta xét các hàm mục tiêu khác nhau ta có *bài toán quy hoạch đa mục tiêu*.

3.1.2 Bài toán quy hoạch tuyến tính

Ví dụ 3.1 (Bài toán về kế hoạch sản xuất). Một xí nghiệp dự định sản xuất n loại sản phẩm từ m loại nguyên liệu khác nhau. Để sản xuất 1 đơn vị sản phẩm loại j cần dùng a_{ij} ($i = \overline{1, m}$) đơn vị nguyên liệu loại i và tiền lãi thu được là c_j đơn vị tiền. Biết rằng nguyên liệu loại i được cung cấp tối đa là b_i , ($i = \overline{1, m}$) và lượng sản phẩm được sản xuất ra đều được tiêu thụ hết. Hãy cho biết xí nghiệp nên có kế hoạch sản xuất như thế nào để thu được tiền lãi lớn nhất với điều kiện cung cấp nguyên liệu thực tế.

Thiết lập mô hình:

Gọi x_j là lượng sản phẩm loại j ($j = \overline{1, n}$) mà xí nghiệp sản xuất ($x_j \geq 0$). Khi đó,

- Tiền lãi thu được là $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$.
- Lượng nguyên liệu loại i phải sử dụng là $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ $i = \overline{1, m}$.

Vậy ta có bài toán thể hiện kế hoạch sản xuất của xí nghiệp là

$$\max \{ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \} \quad (3.4)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.5)$$

• Nếu bổ sung vào bài toán các điều kiện: sản phẩm loại j được sản xuất ra chỉ bán được $\alpha_j\%$ và mỗi đơn vị sản phẩm loại j tồn kho xí nghiệp phải bỏ ra β_j đơn vị tiền để tiêu hủy. Khi đó, hàm mục tiêu sẽ bị thay đổi và ta có bài toán sau

$$\max \left\{ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j x_j - \frac{1}{100} \sum_{j=1}^n \beta_j (100 - \alpha_j) x_j \right\} \quad (3.6)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.7)$$

Ví dụ 3.2 (Bài toán vận tải). Có m nhà phân phối một loại hàng. Lượng hàng có thể cung cấp ở nhà phân phối i , $i = \overline{1, m}$ là a_i . Cần phân phối loại hàng này đến n cửa hàng tiêu thụ. Cửa hàng thứ j , $j = \overline{1, n}$ cần lượng hàng là b_j . Cước phí vận chuyển 1 đơn vị hàng từ nhà phân phối i đến cửa hàng j là c_{ij} , $\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$. Hãy lập kế hoạch phân phối hàng sao cho tổng cước phí vận chuyển bé nhất sao cho các nhà phân phối phát hết hàng và các cửa hàng nhận đủ hàng.

Thiết lập mô hình:

Gọi x_{ij} là lượng hàng được vận chuyển từ nhà phân phối i ($i = \overline{1, m}$) đến cửa hàng j ($j = \overline{1, n}$) ($x_{ij} \geq 0$). Khi đó,

- Tổng cước phí vận chuyển là $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$
- Lượng mà nhà phân phối i phát đi là $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ $i = \overline{1, m}$.
- Lượng mà cửa hàng j nhận được là $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ $j = \overline{1, n}$.

Vậy ta có bài toán thể hiện kế hoạch phân phối hàng là

$$\min\{f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}\} \quad (3.8)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, & \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.9)$$

Ví dụ 3.3 (Bài toán chiếc túi). Một người đi du lịch đem theo một chiếc túi. Người đó chỉ có thể mang chiếc túi nặng tối đa là b kilogram. Có n loại đồ vật mà anh ta dự định mang theo. Mỗi đồ vật loại j có khối lượng là a_j kilogram và có giá trị là c_j , người du lịch muốn chất vào túi các đồ vật sao cho tổng giá trị đồ vật đem theo là lớn nhất. Hỏi người du lịch nên chọn đồ vật như thế nào để đạt được mục đích đặt ra.

Thiết lập mô hình:

Gọi x_j là số đồ vật loại j ($j = \overline{1, n}$) du khách xếp vào túi ($x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$). Khi đó,

- Giá trị đồ vật đem theo là $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$.

- Tổng khối lượng đồ vật là $\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b$.

Vậy ta có bài toán thể hiện kế hoạch chọn đồ vật bỏ vào túi là là

$$\max\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j\} \quad (3.10)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \\ x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.11)$$

Đây là bài toán quy hoạch nguyên.

Bài toán chiếc túi được áp dụng nhiều trong phân phối hàng hóa, còn được gọi là bài toán "*người bán hàng*" chúng ta có thể phát biểu lại bài toán này trong tình huống của người bán hàng như sau:

Một người bán hàng cần vận chuyển các loại hàng đến các cửa hàng để phân phối. Trọng tải của chiếc xe, tối đa là b tấn. Trong kho hàng có n loại hàng cần được đưa đi phân phối. Mỗi đơn vị hàng loại j có khối lượng là a_j kilogam và có giá trị là c_j đơn vị tiền. Hỏi trong mỗi chuyến hàng nhà phân phối nên chuyên chở những loại hàng nào với số lượng là bao nhiêu để tổng giá trị mặt hàng phân phối là lớn nhất mà không vượt quá tải trọng của chiếc xe.

Ví dụ sau đây thường xuất hiện trong các ngành hóa thực phẩm, chăn nuôi. Bài toán sẽ được nêu ra là khác nhau trong từng tình huống ứng dụng khác nhau, chẳng hạn để lập kế hoạch dài hạn cho việc phát triển công nghiệp ăn uống hoặc kế hoạch hóa việc phân phối thức ăn cho trẻ em ở các nhà trẻ, các đơn vị bộ đội, các bệnh viện điều dưỡng ... các bài toán sẽ khác nhau nêu chúng ta hạn chế, thêm bớt, thay đổi tiêu chuẩn đánh giá khẩu phần sẽ cho chúng ta những bài toán khác nhau. Sau đây là một ví dụ cho các tiêu chí cơ bản xác định khẩu phần ăn

Ví dụ 3.4 (Bài toán về khẩu phần thức ăn). Một khẩu phần thức ăn có khối lượng P , có thể được cấu tạo từ n loại thức ăn. Giá mua một đơn vị thức ăn loại j là c_j . Để đảm bảo cơ thể phát triển bình thường thì khẩu phần cần m loại chất dinh dưỡng. Chất dinh dưỡng thứ i cần tối thiểu cho khẩu phần là b_i , có trong một đơn vị thức ăn loại j là a_{ij} . Hỏi nên cấu tạo khẩu phần thức ăn như thế nào để ăn đủ no, đủ chất dinh dưỡng mà giá thành rẻ nhất.

Thiết lập mô hình:

Gọi x_j là số đơn vị thức ăn loại j có trong khẩu phần ($x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$). Khi đó,

- Giá thành của khẩu phần là $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

- Lượng dinh dưỡng loại i có trong khẩu phần là $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad i = \overline{1, m}$.
- Khối lượng của khẩu phần ăn là $\sum_{j=1}^n x_j = P$

Vậy ta có bài toán thể hiện kế hoạch tạo khẩu phần ăn là

$$\min\{f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j\} \quad (3.12)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j = P \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.13)$$

Trong kế hoạch công nghiệp hóa và hiện đại hóa đất nước một trong những nhiệm vụ qua trọng là phát triển nguồn năng lượng sạch, trong đó có năng lượng điện. Chúng ta đang phải xây dựng những dự án, tiêu chuẩn về những nhà máy thủy điện và nhiệt điện sử dụng dạng chất đốt khác nhau. Khi giải quyết các vấn đề về điện khí hóa của một vùng người ta cần phân bổ các kiểu nhà máy có khả năng thỏa mãn yêu cầu của vùng với chi tiêu nhỏ nhất. Chúng ta có thể hình dung thông qua ví dụ sau.

Ví dụ 3.5 (Quy hoạch nhà máy điện). Với điều kiện tự nhiên ở một quốc gia qua việc khảo sát cho thấy có khả năng xây dựng một kiểu nhà máy điện trong n kiểu nhà máy điện. Việc bố trí hệ thống nhà máy phải đảm bảo công suất tiêu chuẩn là A , công suất đỉnh B định trước, và mức sản xuất năng lượng cả năm định trước C . Chi tiêu cho xây dựng các nhà máy không vượt quá tổng cố định D . Công suất tiêu chuẩn để đảm bảo cho một nhà máy kiểu j là a_j ; công suất đỉnh của nhà máy kiểu j là b_j ; năng lượng sản xuất được của 1 nhà máy kiểu j là c_j chi phí sử dụng cho việc vận hành 1 nhà máy kiểu j là f_j . Hãy cho biết nên bố trí mạng lưới nhà máy điện như thế nào để đảm bảo được nhu cầu năng lượng của quốc gia mà chi phí vận hành ít nhất.

Thiết lập mô hình:

Gọi x_j là số nhà máy điện loại j được xây dựng ($x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$). Khi đó,

- Tổng chi phí để vận hành là $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$.
- Công suất tiêu chuẩn đạt được hàng năm là $\sum_{j=1}^n a_j x_j \geq A$.
- Công suất đỉnh của hệ thống nhà máy là $\sum_{j=1}^n b_j x_j \geq B$.

- Năng lượng sản xuất được của mạng lưới là $\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq C$.
- Chi phí xây dựng cơ bản là $\sum_{j=1}^n d_j x_j \leq D$.

Vậy ta có bài toán thể hiện kế hoạch xây dựng mạng lưới nhà máy điện là

$$\min\{f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j\} \quad (3.14)$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq A \\ \sum_{j=1}^n b_j x_j \geq B \\ \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq C \\ \sum_{j=1}^n d_j x_j \leq D \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.15)$$

Các ví dụ trên cho ta một dạng bài toán giống nhau và đó chính là các bài toán quy hoạch tuyến tính. Dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính là

$$\min(\max)\{f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j\} \quad (3.16)$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \forall i \in I_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \forall i \in I_2 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \forall i \in I_3 \\ x_j \geq 0, \forall j \in J_1; x_j \leq 0, \forall j \in J_2; x_j \text{ tùy ý}, \forall j \in J_3 \end{cases} \quad (3.17)$$

trong đó $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, 3, \dots, m\}$; $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1, 2, \dots, n\}$.

Ví dụ 3.6. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\min\{5x_1 + 3x_2 - x_3\} \quad (3.18)$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 \geq 10 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ tùy ý.} \end{cases} \quad (3.19)$$

3.1.3 Các dạng đặc biệt

Dạng chính tắc

Dạng chính tắc của bài toán quy hoạch tuyến tính là

$$\min\{f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j\} \quad (3.20)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Một bài toán quy hoạch tuyến tính luôn đưa về được dạng chính tắc theo quy tắc sau

+) Ta có

$$\begin{cases} \max\{f(X)\} \\ X \in M. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min\{-f(X)\} \\ X \in M. \end{cases}$$

+) Nếu bài toán gốc có điều kiện $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ (hoặc $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$) ta đưa thêm ẩn phụ x_{n+i} với $c_{n+i} = 0$ để có

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (\text{tương ứng } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i).$$

+) Nếu $x_j \leq 0$ ta thay bởi ẩn $x'_j = -x_j$. Nếu ẩn số x_k chưa rõ về dấu ta thay thế nó bởi hai ẩn mới $x'_k, x''_k \geq 0$ với $x_k = x'_k - x''_k$.

Ví dụ 3.7. Đưa bài toán sau về dạng chính tắc

$$\max\{5x_1 + 3x_2 - x_3\} \quad (3.22)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 \geq 10 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 20 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \text{ tùy ý.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Thay $\max f(X)$ bởi $\min\{-f(X)\}$, đưa thêm ẩn phụ $x_4, x_5 \geq 0$ thay x_2 bởi $x'_2 = -x_2$ và thay $x_3 = x'_3 - x''_3$ với $x'_3, x''_3 \geq 0$. Ta có dạng chính tắc của bài toán là

$$\min\{-5x_1 + 3x'_2 + x'_3 - x''_3\} \quad (3.24)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 + 2x'_2 + 7x'_3 - 7x''_3 - x_4 = 10 \\ -x_1 - 3x'_2 + x'_3 - x''_3 + x_5 = 15 \\ x_1 - x'_2 + 10x'_3 - 10x''_3 = 20 \\ x_1, x'_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Chú ý 3.1.1. Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát đều có thể viết được dưới dạng một bài toán dạng chính tắc bằng cách thêm các ẩn phụ. Vì vậy, chúng ta chỉ nghiên cứu cách giải cho bài toán dạng chính tắc.

Dạng chuẩn tắc

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc là

$$\min\{f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j\} \quad (3.26)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Bài toán khẩu phần thức ăn trong ví dụ 3.4 cho ta bài toán dạng chuẩn tắc.

3.1.4 Tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày các tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính. Các tính chất này có sử dụng đến một số khái niệm và tính chất của tổ hợp lồi. Do đó, trước hết chúng ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của tổ hợp lồi trên không gian \mathbb{R}^n .

Tập hợp $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập hợp lồi* nếu với bất kỳ hai điểm $X_1, X_2 \in \mathcal{M}$ ta có

$$\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \in \mathcal{M}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Tập $\mathcal{M} = \{X = (x_j) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ là một tập lồi. Khi đó, ta gọi \mathcal{M} là *tập lồi đa diện*.

Giả sử $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ là một tập hợp lồi. Điểm $X \in \mathcal{M}$ được gọi là *điểm cực biên* của \mathcal{M} nếu không thể biểu diễn thành tổ hợp lồi thực sự của hai điểm bất kỳ thuộc \mathcal{M} . Tức là không tồn tại X_1 và X_2 thuộc \mathcal{M} và $\lambda \in (0, 1)$ sao cho

$$X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2.$$

* Tập lồi đa diện khác rỗng và bị chặn (tồn tại số thực $L > 0$ sao cho với mọi $X = (x_j) \in \mathcal{M}$ ta đều có $|x_j| \leq L, j = 1, 2, \dots, n$) được gọi là *đa diện lồi*.

Một đa diện lồi \mathcal{M} có hữu hạn điểm cực biên X_1, X_2, \dots, X_r và mọi điểm thuộc đa diện lồi đều là tổ hợp lồi của các điểm cực biên, nghĩa là mọi $X \in \mathcal{M}$ thì

$$X = \sum_{j=1}^r \lambda_j X_j, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1.$$

Tiếp theo ta sẽ xét một số tính chất của bài toán duy hoạch tuyến tính. Không mất tính tổng quát, xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc với các giả thiết

$$\min\{f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j\} \quad (3.28)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Ta có ma trận hệ số của hệ điều kiện (3.29) là

$$A = \begin{bmatrix} (A_1) & (A_2) & (A_3) & \dots & (A_n) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (3.30)$$

trong đó A_j ký hiệu véc tơ cột thứ j của ma trận A . Tức là

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

+) $m < n$ (trường hợp $m \geq n$ thì bài toán có không quá 1 phương án. Do đó, việc tìm phương án tối ưu là không có ý nghĩa).

+) Hạng của ma trận hệ số A có hạng bằng m .

+) $b_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$.

+) $M = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \text{thỏa mãn điều kiện buộc (3.29)}\}$ là tập phương án của bài toán.

Tập phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính là tập lồi. Điểm cực biên X của tập lồi các phương án M được gọi là *phương án cực biên* của bài toán.

Giả sử $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một phương án cực biên của bài toán. Khi đó $\{A_j \mid x_j > 0, j = \overline{1, n}\}$ được gọi là *hệ véc tơ cơ sơ* liên kết với phương án cực biên X .

Một phương án cực biên có đủ m tọa độ dương được gọi là *phương án cực biên không suy biến*. Bài toán có tất cả các phương án cực biên không suy biến thì được gọi là *bài toán không suy biến*.

Tính chất 3.1.2.

- 1) Tập phương án M của bài toán là tập lồi đa diện.
- 2) Nếu tập phương án M của bài toán khác rỗng và bị chặn thì tồn tại phương án cực biên tối ưu.
- 3) Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có hai phương án tối ưu khác nhau thì có vô số phương án tối ưu.
- 4) Phương án $X = (x_j)$ là phương án cực biên khi và chỉ khi hệ véc tơ cơ sở $\{A_j | x_j > 0, j = \overline{1, n}\}$ liên kết với X độc lập tuyến tính.
- 5) Nếu bài toán có phương án tối ưu thì có ít nhất một phương án cực biên tối ưu.
- 6) Số tọa độ dương của phương án cực biên tối đa là m .
- 7) Số phương án cực biên của bài toán là hữu hạn.
- 8) $X \in M$ là phương án cực biên khi và chỉ khi X thỏa mãn chặt n điều kiện buộc.

Chứng minh. Trong giáo trình này chúng tôi không trình bày chứng minh các tính chất này. Để biết chi tiết về các tính chất này người đọc có thể xem trong tài liệu tham khảo[1]. \square

Không mất tính tổng quát chúng ta giả thiết bài toán (3.28)(3.29) có dạng

$$\min\{f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j\} \quad (3.31)$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin I}}^n a_{ij} x_j = b_i, i \in I \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.32)$$

trong đó $I = \{1, 2, \dots, m\}$. Khi đó ma trận hệ số của hệ điều kiện là

$$A = \begin{matrix} (A_1) & (A_2) & \dots & (A_m) & (A_{m+1}) & \dots & (A_n) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2m+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{mm+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & , & \end{matrix} \quad (3.33)$$

và ta có phương án cực biên

$$X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0), \quad x_i^0 = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

với hệ véc tơ cơ sở là $(A_1 A_2 \dots A_m)$ tạo thành ma trận đơn vị

$$\mathcal{B} = (A_1 A_2 \dots A_m) = \begin{bmatrix} (A_1) & (A_2) & \dots & (A_m) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad (3.34)$$

Ký hiệu

$$X_{\mathcal{B}}^* = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0), C^* = (c_1, c_2, \dots, c_m).$$

Khi đó,

$$x_1^0 A_1 x_2^0 A_1 + \dots + x_m^0 A_m = B \text{ hay } \mathcal{B} X_{\mathcal{B}}^* = B; \quad (3.35)$$

$$f(X_0) = C^* X^* B = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + \dots + c_m x_m^0; \quad (3.36)$$

$$A_j = a_{1j} A_1 + a_{2j} A_2 + \dots + a_{mj} A_m. \quad (3.37)$$

Ký hiệu

$$\Delta_j = C^* A_j - c_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j. \quad (3.38)$$

Tính chất 3.1.3.

1) Nếu tại phương án cực biên X_0 có $\Delta_j \leq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n$ thì X_0 là phương án tối ưu.

2) Nếu tại phương án cực biên X_0 tồn tại $\Delta_k > 0$ và mọi $a_{ik} \leq 0, (i = 1, \dots, m)$ thì bài toán không có phương án tối ưu (hàm mục tiêu không bị chặn trên tập phương án).

3) Nếu tại phương án cực biên X_0 thỏa mãn với mỗi $\Delta_k > 0$ luôn tồn tại $a_{ik} > 0$ thì sẽ xây dựng được phương án cực biên X_1 tốt hơn phương án X_0 theo nghĩa $f(X_1) < f(X_0)$.

Chứng minh. Trong giáo trình này chúng tôi không trình bày chứng minh các tính chất này. Để biết chi tiết về các tính chất này người đọc có thể xem trong tài liệu tham khảo[1]. \square

3.1.5 Phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch

Ý tưởng chung

Theo Tính chất 3.1.3 chúng ta thấy rằng số phương án cực biên của bài toán là hữu hạn và nếu bài toán có phương án tối ưu thì có phương án cực biên tối ưu. Mặt khác, các bài toán trong thực tế thường chỉ yêu cầu chúng ta chỉ

ra một chiến lược tối ưu nào đó. Do vậy, ý tưởng của chúng ta là chỉ cần tìm phương án cực biên tối ưu bằng cách như sau.

- Xuất phát từ một phương án cực biên X_0 nào đó, tìm cách kiểm tra xem X_0 có phải là phương án cực biên không?

- Nếu X_0 là tối ưu thì dừng và kết luận.

- Nếu không, tìm cách xây dựng một phương án cực biên mới X_1 tốt hơn X_0 .

- Quá trình được lặp đi lặp lại sau hữu hạn bước lặp sẽ tìm được phương án tối ưu hoặc chỉ ra bài toán vô nghiệm.

Phương pháp tìm phương án cực biên tối ưu như trên được gọi là "**phương pháp đơn hình**". Cơ sở để giải bài toán chúng ta dựa vào Tính chất 3.1.3

Thuật toán

Bước 0 (*Lập bảng xuất phát*) Chọn hệ véc tơ cơ sở đơn vị và phương án cực biên xuất phát.

- Xác định x_i^0 , $i = \overline{0, m}$

- Xác định $c_j \forall i = \overline{1, n}$; $a_{ij} \forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$.

- Xác định $\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j$; $\forall j = \overline{1, n}$.

Bước 1 (*kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu*) $\Delta_j \leq 0?$, $\forall j = 1, \dots, n$.

- Nếu có, chuyển sang bước 6.

- Nếu không chuyển sang bước 2.

Bước 2 (*kiểm tra khả năng không có tối ưu*). Tồn tại $\Delta_k > 0$ mà $a_{ik} < 0$?

- Nếu có, chuyển sang bước 6.

- Nếu không chuyển sang bước 3.

Bước 3 (*chọn véc tơ vào cơ sở*). $\Delta_k = \max\{\Delta_j : \Delta_j > 0\}$, đưa A_k vào cơ sở.

Bước 4 (*chọn véc tơ ra khỏi cơ sở*). $\lambda_0 = \min\{\frac{x_j^0}{a_{ik}} : a_{ik} > 0\} = \frac{x_l^0}{a_{lk}}$, đưa A_l ra khỏi cơ sở.

Bước 5 (*Xây dựng phương án cực biên mới*). Xây dựng phương án cực biên mới X_1 theo **quy tắc T**. Gán $X_0 := X_1$ quay trở lại bước 1.

Bước 6 Kết luận.

Để biến đổi từ phương án X_0 sang phương án X_1 theo thuật toán trên, để thuận tiện người ta mô tả nó trên bảng đơn hình sau

Bảng	Cơ sở	Hệ số	Tọa độ	c_1	c_2	\dots	c_j	\dots	c_n
	A_i	c_i	x_i	A_1	A_2	\dots	A_j	\dots	A_n
I	A_1	c_1	x_1^0	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1j}	\dots	a_{1n}
	A_2	c_2	x_2^0	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2j}	\dots	a_{2n}
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	A_i	c_i	x_i^0	a_{i1}	a_{i2}	\dots	a_{ij}	\dots	a_{in}
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	A_m	c_m	x_m^0	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mj}	\dots	a_{mn}
			$f(X_1)$	Δ_1	Δ_2	\dots	Δ_j	\dots	Δ_n
II	A_1	c_1	x'_1	a'_{11}	a'_{12}	\dots	a'_{1j}	\dots	a'_{1n}
	A_2	c_2	x'_2	a'_{21}	a'_{22}	\dots	a'_{2j}	\dots	a'_{2n}
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	A_i	c_i	x'_i	a'_{i1}	a'_{i2}	\dots	a'_{ij}	\dots	a'_{in}
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	A_m	c_m	x'_m	a'_{m1}	a'_{m2}	\dots	a'_{mj}	\dots	a'_{mn}
			$f(X_1)$	Δ'_1	Δ'_2	\dots	Δ'_j	\dots	Δ'_n

Quy tắc T

- Tính toán trong bảng (I) ứng với X_0 gồm 2 bước:

- +) Nhập các số liệu từ bài toán.
- +) Tính $f(X)$, Δ_j theo quy tắc

$$f(X_0) = \sum_{i=1}^m c_i x_i; \quad \Delta_j = \sum_{j=1}^m c_i a_{ij} - c_j \quad \forall j = \overline{1, n}. \quad (3.39)$$

- Để biến đổi bảng (I) sang bảng (II) chúng ta cần chú ý

- +) Trong bảng (I) cột A_k ứng với k sao cho $\Delta_k = \max\{\Delta_j : \Delta_j > 0\}$.
được gọi là *cột xoay*.
- +) Trong bảng (I) hàng A_l ứng với l sao cho $\frac{x_l^0}{a_{lk}} = \min\{\frac{x_i^0}{a_{ik}} : a_{ik} > 0\}$.
được gọi là *hàng xoay*.
- +) Phần tử a_{lk} là giao của hàng xoay và cột xoay được gọi là *phần tử trục*.
- +) Trong bảng (II) hàng A_k vào thay cho hàng A_l nên được tính đầu tiên, bằng cách lấy hàng A_l ở bảng (I) chia cho phần tử trục a_{lk} .
- +) Các giá trị trong bảng (II) được tính từ bảng (I) như sau

$$x'_i = \begin{cases} \frac{x_l^0}{a_{lk}} & \text{nếu } i = k \\ x_i^0 - \frac{x_l^0}{a_{lk}} a_{ik} & \text{nếu } i \neq k, \end{cases} \quad (3.40)$$

$$a'_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{lj}}{a_{lk}} & \text{nếu } i = k \\ a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik} & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \Delta_k \quad (3.42)$$

và

$$f(X_1) = f(X_0) - \lambda_{0k} \Delta_k. \quad (3.43)$$

Ví dụ 3.8. Một xí nghiệp dự định sản xuất 2 loại sản phẩm A và B từ 3 loại nguyên liệu I, II, III . Để sản xuất một đơn vị sản phẩm A cần dùng 2 đơn vị nguyên liệu loại I , 1 đơn vị nguyên liệu loại III ; tiền lãi thu được là 3 đơn vị tiền. Để sản xuất 1 đơn vị sản phẩm B , cần dùng 1 đơn vị nguyên liệu loại I , 1 đơn vị nguyên liệu loại II ; tiền lãi thu được là 5 đơn vị tiền. Biết rằng lượng dự trữ từng loại nguyên liệu tối đa có trong kho lần lượt là 8, 4, 3 đơn vị. Hỏi xí nghiệp nên có kế hoạch sản xuất như thế nào để thu được tiền lãi lớn nhất mà không bị thiếu nguyên liệu.

Gọi x_1 là lượng sản phẩm A được sản xuất ($x_1 \geq 0$). Gọi x_2 là lượng sản phẩm B được sản xuất ($x_2 \geq 0$). Khi đó, ta cần giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$\max\{f(X) = 3x_1 + 5x_2\} \quad (3.44)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Thuật toán đơn hình sử dụng để giải bài toán dạng chính tắc. Do vậy, việc đầu tiên của chúng ta là đưa bài toán về dạng chính tắc.

$$\min\{\bar{f}(X) = -3x_1 - 5x_2\} \quad (3.46)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_5 = 3 \\ x_j \geq 0 \forall j = \overline{1, 5}. \end{cases} \quad (3.47)$$

Ta có ma trận hệ số

$$A = \begin{matrix} & (A_1) & (A_2) & (A_3) & (A_4) & (A_5) \\ \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \end{matrix} \cdot \quad (3.48)$$

Chọn hệ vec tơ cơ sở đơn vị $(A_3 A_4 A_5)$ liên kết với phương án cực biên xuất phát

$$X_0 = (0, 0, 0, 8, 4, 3).$$

Ta có bảng đơn hình.

Bảng	Tọa độ	Hệ số	Toạ độ	-3	-5	0	0	0
	A_i	c_i	x_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
(I)	A_3	0	8	2	1	1	0	0
	$\leftarrow A_4$	0	4	0	1	0	1	0
	A_5	0	3	1	0	0	0	1
			0	3	5 \uparrow	0	0	0
(II)	$\leftarrow A_3$	0	4	2	0	1	-1	0
	A_2	-5	4	0	1	0	1	0
	A_5	0	3	1	0	0	0	1
			-20	3 \uparrow	0	0	-5	0
(III)	A_1	-3	2	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
	A_2	-5	4	0	1	0	1	0
	A_5	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
			-26	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	0

Tại bảng (III) ta có $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j = \overline{1, 5}$. Do đó, bài toán dạng chính tắc (3.46) và (3.47) có phương án tối ưu là

$$X_2 = (2, 4, 0, 0, 1); \quad f_{\min} = \bar{f}(X_2) = -26.$$

Do vậy, bài toán gốc (3.44) và (3.45) có phương án tối ưu là

$$X^* = (2, 4); \quad f_{\max} = f(X^*) = 26.$$

Đến đây chúng ta có thể đưa ra dự báo cho mô hình sản xuất là xí nghiệp nên sản xuất 2 sản phẩm A và 4 sản phẩm B thì lợi nhuận thu được lớn nhất $f_{\max} = 26$ đơn vị tiền và khi đó từ phương án tối ưu của bài toán chính tắc chúng ta thấy nguyên liệu loại I và II được sử dụng hết, nguyên liệu loại III thừa 1 đơn vị.

Chú ý 3.1.4. Trong bảng đơn hình, nếu A_j trong cơ sở chúng ta luôn có $a_{jj} = 1, a_{ij} = 0, \forall i = \overline{1, m}, i \neq j$ và $\Delta_j = 0$.

Trong thuật toán trên chúng ta giả thiết rằng đã có một phương án cực biên X_0 liên kết với một hệ vecs cơ sở đơn vị. Để có được điều này chúng ta cần ma trận hệ số A chứa ma trận con đơn vị cấp m . Tuy nhiên rất nhiều bài toán không thỏa mãn điều này. Trong trường hợp đó, chúng ta thêm

các ẩn giả tạo $x_{n+i} \geq 0$ với hệ số $c_{n+i} = M > 0$ đủ lớn, biến đổi bài toán (3.28)(3.29), thành bài toán giả tạo (M):

$$\min\{f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + M \sum_{i=1}^n x_i\} \quad (3.49)$$

với điều kiện

$$\begin{cases} x_{n+i} + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.50)$$

Khi đó, ma trận hệ số của (3.50) là

$$A = \begin{matrix} & (A_1) & (A_2) & \dots & (A_n) & (A_{n+1}) & (A_{n+2}) & \dots & (A_{n+m}) \\ \begin{matrix} A = \\ \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right] \end{matrix} & , & \end{matrix} \quad m \times (n+m)$$

và ta có phương án cực biên

$$X_0 = (0, \dots, 0, x_{n+1}^0, x_{n+2}^0, \dots, x_{n+m}^0), \quad x_{n+i}^0 = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

với hệ véc tơ cơ sở là $(A_{n+1} A_{n+2} \dots A_{n+m})$ tạo thành ma trận đơn vị. Từ đó ta giải được bài toán (3.49)(3.50) bằng phương pháp đơn hình. Từ kết quả giải bài toán này ta có thể suy ra được kết quả đối với bài toán (3.28)(3.29) bởi mệnh đề sau

Mệnh đề 3.1.5 (Mối liên hệ giữa bài toán giả tạo và bài toán gốc). *Tồn tại số thực $M_0 > 0$ đủ lớn sao cho với mọi $M > M_0$,*

i) Nếu bài toán giả tạo (3.49)(3.50) không có phương án tối ưu thì bài toán gốc (3.28)(3.29) cũng không có phương án tối ưu.

ii) Nếu bài toán giả tạo (3.49)(3.50) có phương án tối ưu tại phương án tối ưu tồn tại ẩn giả tạo $x_{n+i} > 0$ thì tập phương án của bài toán(3.28)(3.29) bằng rỗng.

iii) Bài toán (3.28)(3.29) có phương án tối ưu X khi và chỉ khi bài toán giả tạo (3.49)(3.50) có phương án tối ưu $\bar{X} = (X, \theta)$.

Ở đây (X, θ) ký hiệu cho $n+m$ tọa độ, trong đó n tọa độ đầu là điểm X , m tọa độ cuối đều bằng 0.

Ví dụ 3.9. Một xưởng làm cửa sắt có những thanh thép dài 17 m, cần cắt thành 64 đoạn dài 7 mét, 84 đoạn dài 5 mét và 12 đoạn dài 9 mét. Có 5 mẫu cắt sau:

Mẫu 1: 2 đoạn 7 mét, thừa 3 mét.

Mẫu 2: 1 đoạn 7 mét và 1 đoạn 9 mét, thừa 1 mét.

Mẫu 3: 1 đoạn 7 mét và 2 đoạn 5 mét, không thừa.

Mẫu 4: 1 đoạn 9 mét và 1 đoạn 5 mét, thừa 3 mét.

Mẫu 5: 3 đoạn 5 mét, thừa 2 mét.

Hỏi xưởng làm cửa sắt nên chọn mẫu cắt như thế nào để có thép thừa ít nhất mà vẫn có đủ số lượng thanh thép cần dùng.

Giải. Gọi x_i là số lần chọn mẫu cắt i , ($x_i \geq 0$). Khi đó ta có bài toán: Tìm $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ sao cho

$$\min\{3x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5\} \quad (3.51)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 64 \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 & = 84 \\ x_2 + x_4 & = 12. \end{cases} \quad (3.52)$$

Bằng một phép biến đổi đơn giản hệ điều kiện trên tương đương với

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & = 32 \\ \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + x_5 & = 28 \\ x_2 + x_4 & = 12. \end{cases}$$

Ta có ma trận hệ số là

$$A = \begin{matrix} & (A_1) & (A_2) & (A_3) & (A_4) & (A_5) \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \cdot & & & \end{matrix} \quad 3 \times 5$$

Từ ma trận hệ số chúng ta chỉ mới có 2 véc tơ đơn vị

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó, chúng ta còn thiếu 1 véc tơ đơn vị để lập được một hệ véc tơ cơ sở đơn vị nên chúng ta thêm 1 ẩn giả tạo x_6 vào phương trình thứ 3 của hệ điều kiện ta được bài toán giả tạo

$$\min\{3x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + Mx_6\}$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & = 32 \\ \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + x_5 & = 28 \\ x_2 + x_4 + x_6 & = 12. \end{cases}$$

Ta có ma trận hệ số của bài toán giả tạo là

$$A = \begin{matrix} & (A_1) & (A_2) & (A_3) & (A_4) & (A_5) & (A_6) \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_5 \\ \leftarrow A_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & & & & \end{matrix} \quad 3 \times 6$$

Chọn hệ véc tơ cơ sở đơn vị $(A_1 A_5 A_6)$ liên kết với phương án cực biên xuất phát

$$X_0 = (32, 0, 0, 0, 0, 28, 12).$$

Ta có bảng đơn hình.

Bảng	Tọa độ A_i	Hệ số c_i	Tọa độ x_i	3	1	3	0	2
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
(I)	A_1	3	32	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	A_5	2	28	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
	$\leftarrow A_6$	M	12	0	1	0	1	0
			152	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{-7}{3}$	0
			12	0	1 \uparrow	0	1	0
(II)	A_1	3	6	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0
	$\leftarrow A_5$	2	28	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
	A_2	1	12	0	1	0	1	0
			146	0	0	$\frac{17}{6} \uparrow$	$\frac{-17}{6}$	0
(III)	A_1	3	5	1	0	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$
	A_3	0	42	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	A_2	1	12	0	1	0	1	0
			27	0	0	0	$\frac{-17}{4}$	$\frac{-17}{4}$

Tại bảng (III) ta có $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j = \overline{1, 5}$ và ẩn giả tạo không xuất hiện ở bảng cuối cùng. Do đó, bài toán (3.51) (3.52) có phương án tối ưu là

$$X_2 = (5, 12, 42, 0, 0); \quad f_{\min} = \bar{f}(X_2) = 27.$$

Đến đây chúng ta có thể đưa ra dự báo cho cơ sở sản xuất là nên sản sử dụng 5 lần chọn mẫu cát 1, 12 lần mẫu 2, 42 lần mẫu 3, không dùng mẫu 4 và 5 sẽ thu số thanh thép như mong muốn và số thép lãng phí ít nhất là $f_{\min} = 27m$.

Chú ý 3.1.6. Vì chúng ta cần có đủ m véc tơ đơn vị để tạo thành một hệ cơ sở đơn vị. Do đó nếu trong ma trận hệ số đã chứa k véc tơ đơn vị thì ta chỉ cần thêm $m - k$ ẩn giả tạo.

Ở bảng đầu tiên các véc tơ đơn vị ứng với ẩn giả tạo luôn ở trong cơ sở nên các $\Delta_{n+i} = 0$. Do đó ta không cần tính cột $n + i$. Nếu ở bảng cuối cùng có $\Delta_j \leq 0, \forall i = \overline{1, n}$ mà vẫn còn A_{n+i} trong hệ cơ sở thì bài toán gốc ban đầu không có phương án tối ưu (tập phương án bằng rỗng).

Nếu ở bảng cuối cùng, trong hệ cơ sở không chứa A_{n+i} thì bài toán gốc có phương án tối ưu được lấy ra từ bảng cuối cùng.

3.2 Phương pháp đơn hình đối ngẫu

3.2.1 Cặp bài toán đối ngẫu

3.2.2 Phương pháp đơn hình đối ngẫu

3.3 Bài tập chương 2

Bài tập 1. Một nhà máy sản xuất phân bón có thể sản xuất 2 loại sản phẩm: Phân Lân và Phân Kali. Nếu chỉ sản xuất một loại thì nhà máy chỉ sản xuất được 40 tấn phân lân hoặc 28 tấn phân Kali trong 1 giờ. Lợi nhuận thu được khi bán một tấn phân lân là 250 USD, một tấn phân Kali là 300 USD. Nhà máy làm việc 40 giờ trong tuần và thị trường tiêu thụ tối đa là 1200 tấn phân Lân và 812 tấn phân Kali trong một tuần. Hỏi nhà máy nên có kế hoạch sản xuất như thế nào để thu được lợi nhuận lớn nhất.

Bài tập 2. Một xưởng làm cửa sắt có những thanh thép dài 17 m, cần cắt thành 384 đoạn dài 7 mét, 84 đoạn dài 5 mét và 48 đoạn dài 9 mét. Có 5 mẫu cắt sau:

Mẫu 1: 2 đoạn 7 mét, thừa 3 mét.

Mẫu 2: 1 đoạn 7 mét và 1 đoạn 9 mét, thừa 1 mét.

Mẫu 3: 1 đoạn 7 mét và 2 đoạn 5 mét, không thừa.

Mẫu 4: 1 đoạn 9 mét và 1 đoạn 5 mét, thừa 3 mét.

Mẫu 5: 3 đoạn 5 mét, thừa 2 mét.

Hỏi xưởng làm cửa sắt nên chọn mẫu cắt như thế nào để có thép thừa ít nhất mà vẫn có đủ số lượng thanh thép cần dùng.

Bài tập 3. Một nhà đầu tư có 20 tỉ đồng muốn đầu tư vào 4 lĩnh vực:

Lĩnh vực đầu tư	Chứng khoán	Công trái	Gửi tiết kiệm	Bất động sản
Lãi suất trên năm	20%	12%	15%	18%

Ngoài ra để giảm thiểu rủi ro nhà đầu tư cho rằng không nên đầu tư vào chứng khoán vượt quá 30% tổng số vốn; đầu tư vào công trái và tiết kiệm ít nhất là 25% tổng số vốn; gửi tiết kiệm ít nhất 2 tỉ đồng. Hãy xác định kế hoạch phân bổ vốn đầu tư sao cho thu nhập hàng năm là lớn nhất.

Bài tập 4. Một cơ sở dự định sản xuất tối đa trong một ngày 450 ổ bánh mì dài và 500 ổ bánh mì tròn với điều kiện như sau

- Giá một ổ bánh mì dài làm từ 400 g bột là 3250 đồng, một ổ bánh mì tròn làm từ 250 g bột là 2200 đồng.
- Số lượng bột được cung cấp tối đa trong ngày là 225 kg, với giá mỗi kg là 3000 đồng.

- Lò nướng bánh mì cho phép nướng 75 ổ bánh mì dài hoặc 100 ổ bánh mì tròn trong 1 giờ nhưng không thể nướng 2 loại cùng một lúc. Lò nướng hoạt động tối đa 8 giờ trong ngày. Hỏi cơ sở bánh mì nên tổ chức sản xuất như thế nào để thu được tiền lời nhiều nhất.

Bài tập 5. Một xí nghiệp có thể sử dụng tối đa 510 giờ máy cán, 360 giờ máy tiện và 150 giờ máy mài để chế tạo 3 loại sản phẩm A, B và C. Để tạo ra một sản phẩm A cần 9 giờ máy cán, 5 giờ máy tiện 3 giờ máy mài; một đơn vị sản phẩm B cần 3 giờ máy cán, 4 giờ máy tiện; một đơn vị sản phẩm C cần 5 giờ máy cán, 3 giờ máy tiện, 2 giờ máy mài. Mỗi sản phẩm A trị giá 48 nghìn đồng, mỗi sản phẩm B trị giá 16 nghìn đồng và mỗi sản phẩm C trị giá 27 nghìn đồng. Hỏi xí nghiệp nên sản xuất thế nào để cho tổng tiền thu về nhiều nhất. Cho biết số giờ còn lại của các máy trong trường hợp tối ưu.

Bài tập 6. Nhằm mục đích giảm thiểu chi phí để đáp ứng nhu cầu về protein, viatimin và sắt với một khẩu phần thức ăn được hạn chế trên bởi táo, chuối, cà rốt, rau và trứng. Chi phí và giá trị dinh dưỡng có trong 5 loại thức ăn được cho ở bảng sau:

Thức ăn	Đơn vị(đv)	Protein g/đv	Vitamin g/đv	Sắt g/đv	Giá thành đồng/đv
Táo	quả	0,4	6	0,4	8
Chuối	quả	1,2	10	0,6	10
Rau	kg	0,6	3	0,4	3
Trứng	quả	12.2	0	2,6	15

Chế độ ăn uống hàng ngày đòi hỏi tối thiểu 70 mg protein, 50 mg Vitamin C, 12 mg sắt. Hãy cho biết nên tạo khẩu phần thức ăn như thế nào để đủ chất dinh dưỡng mà giá thành rẻ nhất.

Bài tập 7. Để đảm bảo cho vật nuôi phát triển bình thường người chăn nuôi phải cung cấp tối thiểu cho vật nuôi 60 đơn vị chất dinh dưỡng A, 84 đơn vị

chất dinh dưỡng B, 72 đơn vị chất dinh dưỡng C mỗi ngày. Người chăn nuôi có thể mua thức ăn cho vật nuôi từ 3 nguồn khác nhau. Lượng chất dinh dưỡng mỗi loại cũng như giá thành của một đơn vị thức ăn của mỗi nguồn thức ăn được cho ở bảng sau:

Thức ăn	A	B	C	Giá
Nguồn 1	3	7	3	10
Nguồn 2	2	2	6	4
Nguồn 3	5	3	4	7

Hỏi người chăn nuôi nên có kế hoạch chọn thức ăn như thế nào để chi phí rẻ nhất mà vẫn đảm bảo được chất dinh dưỡng cho vật nuôi.

Bài tập 8. Một nhà sản xuất sơn cần tạo ra một loại sản phẩm sơn nước. Để tạo ra được loại sơn này thì phải có 4 loại hoá chất A, B, C và D. Thành phần trong loại sơn này phải chứa ít nhất 5% hoá chất A, 3% hoá chất B, 26% hoá chất C và không quá 15% hoá chất D. Để có được điều này các nhà sản xuất phải kết hợp 3 loại khoáng sản thô. Thành phần hoá chất có trong một đơn vị khoáng sản thô và chi phí để mua một đơn vị khoáng sản thô được cho ở bảng sau:

Khoáng sản	Hoá chất				Giá
	A	B	C	D	
I	0	5	30	20	40
II	6	8	30	10	75
III	7	0	25	16	30

Hãy xây dựng kế hoạch sản xuất sơn sao cho giá thành rẻ nhất.

Bài tập 9. Đồng tiền xu được đúc chứa ít nhất 40% bạc và ít nhất 50% đồng tỉ lệ bạc và đồng có trong các loại hợp kim A, B, C và D cũng như giá từng loại hợp kim được cho trong bảng sau

Hợp kim	A	B	C	D
% Bạc	30	35	50	40
% Đồng	60	35	50	45
Giá (USD)	11	12	16	14

Hãy xây dựng kế hoạch đúc đồng cu từ các hợp kim sao cho tổng chi phí bé nhất.

Bài tập 10. Một phụ gia nguyên liệu phải có ít nhất 32% hoá chất A, ít nhất 15% và không quá 40% chất trở C. Để sản xuất phụ gia người ta sẽ điều chế các hoá chất từ 4 loại nguyên liệu W, X, Y và Z. Thành phần hoá chất có trong một đơn vị nguyên liệu và giá một của mỗi đơn vị nguyên liệu được cho trong bảng sau.

Nguyên liệu	W	X	Y	X
% Hoá chất A	45	25	28	36
% Hoá chất B	22	10	0	16
% Hoá chất C	20	42	44	27
Giá (USD/đv)	35	5	10	15

Hỏi nên sản xuất chất phụ gia như thế nào để chi phí rẻ nhất.

Bài tập 11. Một nhà máy sản xuất ba loại thịt: bò, lợn và cừu với số lượng sản xuất mỗi ngày là 480 tấn thịt bò, 400 tấn thịt lợn, 230 tấn thịt cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng các loại thịt có thể nấu chín để bán là 420 tấn trong giờ và 250 tấn ngoài giờ. Lợi nhuận thu được từ việc bán một tấn mỗi loại thịt được cho trong bảng sau

Loại thịt	Bò	Lợn	Cừu
Tươi	8	14	11
Nấu chín trong giờ	4	12	7
Nấu chín ngoài giờ	4	13	9

Hỏi nhà máy nên sản xuất như thế nào để thu được lợi nhuận cao nhất.

Bài tập 12. Một trại chăn nuôi dự định nuôi 3 loại bò: Bò thịt, bò cày và bò sữa. Số liệu điều tra được cho ở bảng sau với đơn vị tính nghìn đồng/con:

	Bò sữa	Bò cày	Bò thịt	Dự trữ
Vốn	123	167	162	7020
Chi phí chăn nuôi	18	15	15	800
Lãi	59	49	57	

Hỏi trại chăn nuôi nên có kế hoạch nuôi bò như thế nào để thu được tiền lãi nhiều nhất. Biết rằng số bò sữa không quá 18 con.

Bài tập 13. Một chủ nông trại sở hữu 100 mẫu đất dự định trồng 3 loại cây Cao su, Cà phê, Ca cao. Chi phí hạt giống số ngày công chăm sóc và lợi nhuận thu được trên một mẫu đất trồng được cho ở bảng sau

	Cao su	Cà phê	Ca cao
Chi phí giống	40\$	20\$	30\$
Nhân công	10 ngày	10 ngày	10 ngày
Lãi	300\$	100\$	200\$

Hỏi nông trại nên trồng mỗi loại bao nhiêu để loại nhuận thu được nhiều nhất. Biết rằng chủ nông trại có thể huy động tối đa 3200\$ và 160 ngày công.

Bài tập 14. Một hãng sản xuất đồ chơi trẻ em có thể sản xuất bốn loại xe khác nhau: xe thư, xe cầu, xe ủi và xe bồn. Để sản xuất ra mỗi loại xe trên cần sử dụng 3 loại máy: Máy đập, máy phun sơn và máy đóng gói. Mức tiêu hao thời gian (giờ) cho mỗi loại xe và lợi nhuận thu được cho ở bảng sau:

Mức tiêu hao thời gian và lợi nhuận	Xe thư	Xe cầu	Xe ủi	Xe bồn
Máy đập	2 giờ	2,5 giờ	2 giờ	2 giờ
Máy phun sơn	1 giờ	1,5 giờ	1 giờ	2 giờ
Máy đóng gói	0,5 giờ	0,5 giờ	1 giờ	1 giờ
Lợi nhuận	0,5\$	1\$	1,5\$	2\$

Công suất tối đa/ tuần của: Máy đập 4000 giờ, máy phun sơn 1800 giờ, máy đóng gói, máy đóng gói 1000 giờ. Hỏi cơ sở nên sản xuất như thế nào để thu được lợi nhuận lớn nhất.

Bài tập 15. Một công ty chuyên sản xuất 3 loại sản phẩm A, B, C. Trong đó nguyên liệu để sản xuất 3 loại sản phẩm trên được nhập từ 2 nguồn N_1 và N_2 . Chi phí cho mỗi đơn vị nguyên liệu nhập từ N_1 là 100 \$ và từ nguồn N_2 là 90 \$. Các loại sản phẩm sản xuất cần các đơn vị nguyên liệu của từng nguồn được cho bởi bảng sau:

Nguồn nguyên liệu	Loại sản phẩm		
	A	B	C
N_1	100	200	300
N_2	200	100	200

Biết rằng, trong thời gian tới cần sản xuất tối thiểu 20000 sản phẩm loại A; 18000 sản phẩm loại B; 15000 sản phẩm loại C. Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho chi phí công ti phải bỏ ra là nhỏ nhất mà vẫn đảm bảo về yêu cầu sản phẩm.

4

Một số mô hình tuyến tính đặc biệt

4.1 Bài toán vận tải

4.1.1 Bài toán vận tải cổ điển

Có m nhà phân phối một loại hàng. Lượng hàng có thể cung cấp ở nhà phân phối i , $i = \overline{1, m}$ là a_i . Cần phân phối loại hàng này đến n cửa hàng tiêu thụ. Cửa hàng thứ j , $j = \overline{1, n}$ cần lượng hàng là b_j . Cước phí vận chuyển 1 đơn vị hàng từ nhà phân phối i đến cửa hàng j là c_{ij} , $\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$. Hãy lập kế hoạch phân phối hàng sao cho tổng cước phí vận chuyển bé nhất sao cho các nhà phân phối phát hết hàng và các cửa hàng nhận đủ hàng.

Thiết lập mô hình:

Gọi x_{ij} là lượng hàng được vận chuyển từ nhà phân phối i ($i = \overline{1, m}$) đến cửa hàng j ($j = \overline{1, n}$) ($x_{ij} \geq 0$). Khi đó,

- Tổng cước phí vận chuyển là

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

- Lượng mà nhà phân phối i phát đi là

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, m}.$$

- Lượng mà cửa hàng j nhận được là

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, n}.$$

Vậy ta có bài toán thể hiện kế hoạch phân phối hàng là

$$\min\{f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}\} \quad (4.1)$$

với điều kiện

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, \quad \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (4.2)$$

Để thuận tiện cho việc tính toán người ta có thể biểu diễn bài toán

4.1.2 Tính chất của bài toán vận tải

Định lý 4.1.1. *Bài toán vận tải có phương án tối ưu khi và chỉ khi cân bằng thu phát, nghĩa là*

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{i=1}^m b_i.$$

4.2 Bài toán sản xuất đồng bộ

4.2.1 Bài toán

Có m máy công cụ, tham gia sản xuất một loại sản phẩm gồm n chi tiết khác nhau. Số máy mỗi loại tham gia quá trình được giả thiết là 1 chiếc, số chi tiết được cấu thành sản phẩm được chia theo tỉ lệ 1 : 1 (do vậy có thể coi số chi tiết mỗi loại cấu thành sản phẩm là 1). Năng suất máy thứ i sản xuất chi tiết thứ j là s_{ij} (số đơn vị chi tiết/ đơn vị thời gian) $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Hãy bố trí thời gian để các máy sản xuất các chi tiết, sao cho số sản phẩm đủ bộ (đồng bộ) được nhiều nhất.

Thiết lập mô hình:

Gọi x_{ij} là phần thời gian trong một đơn vị thời gian kế hoạch của máy i sản xuất chi tiết j ($x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

+) Tổng thời gian máy i thực hiện sản xuất là $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$.

+) Số chi tiết j được sản xuất là

$$f_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

+) Số sản phẩm đủ bộ sẽ là

$$f = \min\{f_j : j = \overline{1, n}\} = \min\left\{\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} : j = \overline{1, n}\right\}.$$

Bài toán đặt ra là: Tìm $X = (x_{ij}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ sao cho

$$f(X) = \max f = \max\left\{\min \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij}\right\}$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, & i = \overline{1, m} \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Chú ý rằng từ điều kiện

$$f = \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} : j = \overline{1, n} \right\}.$$

suy ra,

$$f \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} : j = \overline{1, n}.$$

Hay

$$-\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} + f \leq 0 \quad j = \overline{1, n}.$$

Do vậy bài toán được viết lại là: Tìm $X = (x_{ij}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ và f sao cho

$$\max f \quad (4.3)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, & i = \overline{1, m} \\ -\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} + f \leq 0 & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Bài toán (4.3)(4.4) là bài toán quy hoạch tuyến tính có thể giải bằng phương pháp đơn hình. Ta có ma trận hệ số của hệ điều kiện (4.4) là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ -a_{11} & 0 & \dots & 0 & -a_{21} & 0 & \dots & 0 & \dots & -a_{m1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -a_{12} & \dots & 0 & 0 & -a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 & -a_{m2} & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{1n} & 0 & 0 & \dots & -a_{2n} & \dots & 0 & 0 & \dots & -a_{mn} & 1 \end{pmatrix}$$

Trong thực tế số ẩn của bài toán này khá lớn nên việc tính toán trên bảng đơn hình sẽ gặp khó khăn. Để giải bài toán này người ta vận dụng lý thuyết đối ngẫu và tính chất đặc biệt của bài toán.

Để thuận tiện trong các lập luận, không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả thiết rằng với mỗi i , mỗi j đều tồn tại $a_{ij} > 0$ (mỗi chi tiết j phải được sản xuất ít nhất một máy và mỗi máy i phải sản xuất ít nhất một chi tiết).

Bài toán đối ngẫu

Bài toán đối ngẫu của bài toán sản xuất đồng bộ (4.3)(4.4) là:
Tìm các bộ số $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n$ sao cho

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^m u_i \right\} \quad (4.5)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} u_i - a_{ij}v_j \geq 0, & i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n v_j \geq 1, \\ u_i \geq 0, & i = \overline{1, m}, \quad v_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Các cặp ràng buộc đối ngẫu là

$$x_{ij} \geq 0 \leftrightarrow u_i - a_{ij}v_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

$$f \geq 0 \leftrightarrow \sum_{j=1}^n v_j \geq 1$$

$$-\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} + f \leq 0 \leftrightarrow v_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Để thuận tiện cho việc tính toán trong việc giải bài toán chúng ta có thể biểu diễn thông tin bài toán (4.3)(4.4) và (4.5)(4.6) dưới dạng bảng sau

4.2.2 Tính chất của bài toán sản xuất đồng bộ

Định lý 4.2.1. *Giá trị f trong bài toán sản xuất đồng bộ luôn dương.*

Chứng minh. Theo giả thiết $a_{ij} > 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, đồng thời mỗi sản phẩm i ắt phải được sản xuất bởi ít nhất một máy j nên với mỗi i , tồn tại j để $x_{ij} > 0$, do vậy từ

$$f = \min f_j = \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}, j = 1, 2, \dots, n \right\},$$

cho thấy $f > 0$. □

Định lý 4.2.2. *Bài toán sản xuất đồng bộ luôn có phương án tối ưu.*

Chứng minh. Để chứng minh định lý ta chứng minh tập phương án của bài toán khác rỗng và hàm mục tiêu bị chặn trên tập phương án. Thật vậy, lấy $X = (x_{ij})$ với $x_{ij} = \frac{1}{n}$. Chúng ta kiểm tra thấy X là một phương án của bài toán.

Mặt khác, $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$, $i = \overline{1, m}$ và $x_{ij} \geq 0$ nên $0 \leq x_{ij} \leq 1$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} f &= \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}, j = 1, 2, \dots, n \right\} \\ &\leq \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{ij}, j = 1, 2, \dots, n \right\} = L \end{aligned}$$

Do đó hàm mục tiêu bị chặn trên tập phương án khác rỗng. Vậy bài toán có phương án tối ưu. □

Định lý 4.2.3. *Giả sử A là ma trận hệ số của hệ điều kiện (4.4). Khi đó $\text{rank}(A) = m + n$.*

Chứng minh. □

4.3 Bài toán quyết định tối ưu

Trong thực tế, chúng ta luôn phải lựa chọn một phương án nào đó để đưa ra quyết định cho hành vi của mình. Lúc này, chúng ta thường xem xét cái được và cái mất dựa trên các yếu tố thuận lợi và khó khăn của từng hoàn cảnh thực tế. Xét cho cùng, lúc này xuất hiện một quan hệ tay đôi giữa người đưa ra quyết định và đối thủ. Nếu quyết định đúng thì chủ thể sẽ thành công (thắng cuộc), nếu quyết định sai thì sẽ thất bại và lợi ích sẽ thuộc về đối thủ

cách tranh. Kết quả của người đưa ra quyết định phụ thuộc vào quyết định của đối thủ cạnh tranh. Cuộc đấu trí giữa chủ thể và đối thủ được xét đến như một trò chơi 2 đấu thủ. Chẳng hạn như trong các trò chơi cờ tướng, cờ vua, song đề tử tù, thiết lập kế hoạch đầu tư, ... Sau đây chúng ta xét đến một số trò chơi

Ví dụ 4.1 (Trò chơi sấp ngửa). Có 2 đấu thủ P và Q cùng chơi, mỗi người tung một đồng xu 2 mặt sấp (S) và ngửa (N) cùng lúc bằng một hiệu lệnh nào đó. Nếu cả 2 đồng tiền đều xuất hiện mặt sấp thì (P) thắng (Q) nếu 2 đồng tiền đều xuất hiện mặt ngửa thì (Q) thắng (P) ((P) thua (Q)). Nếu có một mặt sấp và một mặt ngửa thì hòa. Nếu (P) thắng (Q) thì (P) nhận được 1 đồng. (P) thua (Q) thì (P) nhận được -1 đồng. Nếu (P) và (Q) hòa nhau tương thì (P) nhận được 0 đồng. Khi đó trò chơi giữa (P) và (Q) được thể hiện bởi bản sau

	P	
Q	S	N
S	1; -1	0; 0
N	0; 0	-1; 1

Lúc này ta có ma trận

$$A_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A_P được gọi là ma trận thắng (hay ma trận thu hoạch) của (P); Ma trận A_Q được gọi là ma trận thắng (hay ma trận thu hoạch) của (Q). Rõ ràng tỷ lệ thắng thua của trò chơi giữa (P) và (Q) được thể bởi ma trận A. Do vậy trò chơi này còn được gọi là trò chơi ma trận.

Ví dụ 4.2 (Song đề tử tù). Hai kẻ bị tình nghi là tội phạm bị cảnh sát bắt. Cảnh sát không có đủ chứng cứ để kết án họ, và đã cách ly họ. Cảnh sát gặp từng người một và làm cùng tho thuận: nếu một người thú tội mà người kia im lặng, người im lặng sẽ bị phạt 10 năm tù và người thú tội sẽ được thả tự do. Nếu cả hai đều im lặng, cảnh sát chỉ phạt được mỗi tù nhân 6 tháng tù vì một tội nhỏ khác. Nếu cả hai đều thú tội, mỗi người sẽ bị phạt 2 năm. Trò chi có thể được tóm tắt như sau:

	A im lặng	A thú tội
B im lặng	Cả hai 6 tháng	B bị 10 năm, A được tự do
B thú tội	A bị 10 năm, B được tự do	Cả 2 bị 2 năm

Giả sử cả hai tù nhân đều ích kỷ và đều muốn làm giảm thiểu thời gian tù tội của mình. Mỗi tù nhân có 2 lựa chọn hợp tác với kẻ đồng lõa và giữ im

lặng; hoặc phản bội và thú tội. Kết quả của mỗi sự lựa chọn đều phụ thuộc vào quyết định của người kia. Tuy nhiên không người nào biết sự lựa chọn của người kia. Ngay cả khi họ được gặp nhau họ vẫn có thể không tin tưởng nhau.

Nếu cả hai người này đều tin tưởng người kia là im lặng thì lựa chọn tối ưu của họ ta thú tội. Khi đó hã sẽ được thả tự do trong khi người kia bị tù 10 năm. Ngược lại nếu hã tin rằng người kia sẽ thú tội thì lựa chọn tối ưu của hã là thú tội vì khi đó cả hai sẽ bị tù 2 năm nếu không nó sẽ bị tù 10 năm nếu như im lặng. Tuy nhiên, nếu cả hai hợp tác được với nhau để giữ im lặng thì mỗi người chỉ bị 6 tháng.

Vì thế ta thấy mỗi người đều nên thú tội bất kể người kia lựa chọn như thế nào mỗi tù nhân đều được giảm tội nếu thú tội. Nhưng không may cho cả hai, nếu biết im lặng thì cả hai cùng bị tù 6 tháng.

Vậy nếu lý luận tốt cho cả 2 người thì tốt nhất cả hai đều im lặng bởi vì khi đó tổng thời gian tù cả 2 người phải chịu là 1 năm trong khi nếu có 1 người thú tội thì tổng thời gian tù của cả 2 người tối thiểu là 2 năm.

Quy tắc thưởng phạt được cho bởi bảng sau

	Q im lặng	Q thú tội
P im lặng	-0,5; -0,5	-10; 0
P thú tội	0; -10	-2; -2

Ma trận thắng của (P) và (Q) lần lượt là

$$A_P = \begin{bmatrix} -0,5 & -10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad A_Q = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 4.3 (Trò chơi One-Two-Three). Trò chơi giữa (P) và (Q), mỗi người giơ tay ra hiệu "Giấy", "Búa", "Kéo" theo quy tắc "Giấy thắng Búa", "Búa thắng Kéo", "Kéo thắng Giấy". Quy tắc thưởng phạt của trò chơi được cho bởi công thức.

	Giấy	Búa	Kéo
Giấy	0;0	1; -1	-1; 1
Búa	-1;1	0; 0	1; -1
Kéo	1; -1	-1; 1	0; 0

Ma trận thắng của (P) và (Q) lần lượt là

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy trong các trò chơi này xuất hiện quan hệ tay đôi giữa người chơi và đối thủ. Lợi ích của người chơi phụ thuộc vào quyết định của đối thủ. Người chơi cần phải lựa chọn quyết định tối ưu cho mình trong mọi lựa chọn của đối thủ. Đó chính là bài toán quyết định tối ưu trong lý thuyết trò chơi và được áp dụng vào các mô hình thực tế

Một trò chơi 2 đấu thủ được quy định bởi các quy định bởi các ma trận thắng của A_P và A_Q được gọi là *bài toán trò chơi ma trận*.

4.3.1 Bài toán trò chơi ma trận tổng bằng không

Trong mục này chúng ta xét trò chơi ma trận hai đối thủ có tổng bằng không tức là lợi nhuận của người chơi (P) dựa trên thiệt hại của người chơi (Q).

Định nghĩa 4.3.1. Cho một ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ với $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Một trò chơi hai đối thủ sao cho ma trận A là ma trận thắng của người chơi (P) và là ma trận trả tiền của đối thủ (Q) được gọi là trò chơi ma trận hai đối thủ. Trong đó, m là số chiến lược đơn của người chơi (P) và n là số chiến lược đơn của đối thủ (Q).

Định nghĩa 4.3.2. +) Với mỗi $i = \overline{1, m}$, một véc tơ đơn vị

$$X_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ chữ số } 0}, 1, 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^m$$

được gọi là chiến lược đơn **i** của người chơi (P).

+) Với mỗi $j = \overline{1, n}$, một véc tơ đơn vị

$$Y_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1 \text{ chữ số } 0}, 1, 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^n$$

được gọi là chiến lược đơn **j** của người chơi (Q).

Chú ý 4.3.3. Người chơi (P) có m chiến lược đơn, người chơi (Q) có n chiến lược đơn.

Định nghĩa 4.3.4. +) Mỗi véc tơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ với $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ được gọi là chiến lược hỗn hợp của người chơi (P). Trong đó x_i là xác suất để người chơi (P) chọn phương án **i**.

+) Mỗi véc tơ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ với $y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n y_j = 1$ được gọi là chiến lược hỗn hợp của người chơi (Q). Trong đó y_j là xác suất để người chơi (Q) chọn phương án **j**.

Định nghĩa 4.3.5. Xét trò chơi ma trận hai đấu thủ (P) và (Q) với ma trận thắng của (P) là $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Giả sử $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ và $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ lần lượt là chiến lược hỗn hợp của (P) và (Q). Khi đó

$$\mathbb{E}(X, Y) = XAY^T = \sum_{i=1}^m x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right) \quad (4.7)$$

được gọi là hàm thu hoạch (kỳ vọng thắng) của (P).

Chú ý 4.3.6. +) Nếu $\mathbb{E}(X, Y) > 0$ thì (P) có thắng (Q); nếu $\mathbb{E}(X, Y) < 0$ thì (P) có thua (Q); nếu $\mathbb{E}(X, Y) = 0$ thì (P) và (Q) hòa nhau.

+) $\mathbb{E}(X_i, Y_j) = a_{ij}$. Do đó a_{ij} là giá trị lợi nhuận mà (P) nhận được khi (P) chọn chiến lược đơn i và đối thủ chọn chiến lược đơn j .

Chúng ta có thể xem quyết định đầu tư của một nhà đầu tư là trò chơi 2 đấu thủ giữa nhà đầu tư và biến động của thị trường ta có ví dụ sau:

Ví dụ 4.4. Một nhà đầu tư có thể lựa chọn đầu tư vào cổ phiếu A, B, C . Sau khi phân tích biến động của thị trường người ta dự báo là sẽ xảy ra 4 tình huống của thị trường là (I); (II); (III); (IV). Hiệu quả đầu tư mang lại (đơn vị: triệu đồng) khi nhà đầu tư chi ra 100 triệu vào từng cổ phiếu ứng với từng tình huống của thị trường được cho ở bảng sau.

Phương án	Hiệu quả			
	I	II	III	IV
A	16	8	7	0
B	-7	20	6	15
C	9	10	-12	5
Tình huống	I	II	III	IV

+) Ý nghĩa kinh tế của số "-12" trong bảng số là: Nếu nhà đầu tư chỉ chọn phương án C để đầu tư (tức là người chơi chọn chiến lược đơn $X_3 = (0, 0, 1)$) và khi đó thị trường xuất hiện tình huống (III) (đối thủ chọn chiến lược đơn $Y_3 = (0, 0, 1, 0)$) thì nhà đầu tư sẽ bị lỗ 12 triệu đồng khi đầu tư 100 triệu.

+) Giả sử nhà đầu tư đưa 100 triệu của mình đầu tư vào cổ phiếu A là 30 triệu, 50 triệu đầu tư cho cổ phiếu B còn lại đầu tư cho cổ phiếu C . Các tình huống của thị trường có khả năng xuất hiện như nhau. Khi đó,

- Chiến lược hỗn hợp của nhà đầu tư là: $X = (0, 3; 0, 5; 0, 2)$
- Chiến lược hỗn hợp của thị trường (đối thủ) là $Y = (0, 25; 0, 25; 0, 25; 0, 25)$.

- Kỳ vọng thắng của nhà đầu tư là

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X, Y) &= XAY^T \\ &= (0, 3; 0, 5; 0, 2) \begin{pmatrix} 16 & 8 & 7 & 0 \\ -7 & 20 & 6 & 15 \\ 9 & 10 & -12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} \\ &= 7,175.\end{aligned}$$

4.3.2 Điểm yên ngựa và chiến lược tối ưu

Xét trò chơi ma trận hai đối thủ (P) và (Q) với ma trận thắng của (P) là $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Nếu người chơi chọn chiến lược đơn \mathbf{i} (tức là $X_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$) khi đó người chơi sẽ quan tâm xem mình được lợi nhuận tối thiểu là bao nhiêu. Trong trường hợp đó nếu đối thủ chọn chiến lược hỗn hợp là $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ thì kỳ vọng thắng của (P) là

$$\mathbb{E}(X_i, Y) = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j.$$

Giả sử $\min_{j=1, n} a_{ij} = a_{il}$. Khi đó

$$\mathbb{E}(X_i, Y) = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \geq \sum_{j=1}^n a_{il}y_j = a_{il} \sum_{j=1}^n y_j = a_{il}.$$

Do đó, nếu người chơi chọn chiến lược đơn \mathbf{i} thì lợi nhuận tối thiểu người chơi sẽ nhận được là $\min_{j=1, n} a_{ij}$. Rõ ràng, với cách tư duy đó người chơi (P) sẽ lựa chọn chiến lược đơn \mathbf{i} sao cho *lợi nhuận tối thiểu là lớn nhất* tức là chọn chiến lược đơn \mathbf{i} sao cho

$$\min_{j=1, n} a_{ij} = \max_{k=1, m} \min_{j=1, n} a_{kj}.$$

Do vậy, người ta nói người chơi (P) chọn chiến lược theo nguyên lý max min.

Đối với đối thủ (Q), khi có thông tin về ma trận thắng của (P), nếu chọn chiến lược đơn \mathbf{j} và người chơi chọn chiến lược hỗn hợp $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ thì tổn thất mà (Q) phải chịu là

$$\mathbb{E}(X, Y_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i.$$

Đặt $\max_{i=1,m} a_{ij} = a_{kj}$. Khi đó

$$\mathbb{E}(X, Y_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq \sum_{i=1}^m a_{il} x_i = a_{kj} \sum_{j=1}^n x_j = a_{kj}.$$

Do đó, nếu đối thủ (Q) chọn chiến lược đơn \mathbf{j} thì tổn thất tối đa mà (Q) phải trả là $\max_{i=1,m} a_{ij}$. Rõ ràng, với cách tư duy đó (Q) sẽ lựa chọn chiến lược đơn \mathbf{j} sao cho *tổn thất tối đa là bé nhất* tức là chọn chiến lược đơn \mathbf{j} sao cho

$$\max_{i=1,m} a_{ij} = \min_{l=1,n} \max_{i=1,m} a_{il}.$$

Do vậy, ta nói đối thủ (Q) chọn chiến lược theo nguyên lý min max.

Định nghĩa 4.3.7. Nếu trò chơi ma trận hai đối thủ (P) và (Q) với ma trận thắng $A = (a_{ij})_{m \times n}$ thỏa mãn

$$\max_{i=1,m} \min_{j=1,n} a_{ij} = \min_{j=1,n} \max_{i=1,m} a_{ij} = a_{lk} = \nu \quad (4.8)$$

thì ta nói trò chơi ma trận có *điểm yên ngựa* và giá của điểm yên ngựa là $a_{lk} = \nu$.

Chú ý 4.3.8. Nếu bài toán có điểm yên ngựa với giá của điểm yên ngựa là $\nu = a_{lk}$ thì

+) Nếu (P) chọn chiến lược đơn \mathbf{l} thì (P) sẽ thu được lợi nhuận tối thiểu là ν . Khi đó nếu (Q) chọn một chiến lược đơn nào đó khác \mathbf{k} thì sẽ có thể thiệt hại tối đa một lượng lớn hơn hoặc bằng ν và chỉ khi (Q) chọn chiến lược đơn \mathbf{k} thì (Q) mới đảm bảo được rằng thiệt hại tối đa là ν . Khi đó, \mathbf{k} là chiến lược đơn tối ưu của (Q).

+) Nếu (Q) chọn chiến lược đơn \mathbf{k} thì (Q) sẽ thiệt hại tối đa là ν . Khi đó nếu (P) chọn một chiến lược đơn nào đó khác \mathbf{l} thì sẽ có thể thu được lợi nhuận tối thiểu một lượng bé thua hoặc bằng ν và chỉ khi (P) chọn chiến lược đơn \mathbf{l} thì (P) mới đảm bảo được rằng lợi nhuận tối thiểu là ν . Khi đó, \mathbf{l} là chiến lược đơn tối ưu của (P).

Ví dụ 4.5. Xét trò chơi ma trận hai đối thủ (P) và (Q) với ma trận với ma trận thắng của (P) là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 13 \\ 4 & 15 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

ta có thể biểu diễn lên bảng sau

	(I)	(II)	(III)	(IV)	min	max
A	4	2	1	13	1	13
B	4	15	5	2	2	15
C	6	7	7	6	6	7
max	6	15	12	13		
min	4	2	1	2		

Từ bảng trên chúng ta thấy

$$\max_{i=1,3} \min_{j=1,4} a_{ij} = \min_{j=1,4} \max_{i=1,3} a_{ij} = a_{31} = 6$$

Vậy bài toán có điểm yên ngựa với giá của điểm yên ngựa là $\nu = 6$. Chiến lược đơn tối ưu của (P) là $X_3 = (0, 0, 1)$ và của (Q) là $Y_1 = (1, 0, 0, 0)$. Từ bảng trên chúng ta thấy

Đối với người chơi (P) nếu

- Chọn chiến lược đơn **1** thì lợi nhuận tối thiểu là 1 và tối đa có thể là 13;
- Chọn chiến lược đơn **2** thì lợi nhuận tối thiểu là 2 và tối đa có thể là 15;
- Chọn chiến lược đơn **3** thì lợi nhuận tối thiểu là 6 và tối đa có thể là 7.

Mặc dù chọn các phương án khác có thể người chơi có cơ hội có được lợi nhuận cao hơn 7. Tuy vậy người chơi vẫn chọn chiến lược đơn **3** để đảm bảo lợi nhuận tối thiểu là lớn nhất.

Đối với đối thủ (Q) nếu

- Chọn chiến lược đơn **1** thì thiệt hại tối thiểu là 4 và tối đa có thể là 6;
- Chọn chiến lược đơn **2** thì thiệt hại tối thiểu là 2 và tối đa có thể là 15;
- Chọn chiến lược đơn **3** thì thiệt hại tối thiểu là 1 và tối đa có thể là 12.
- Chọn chiến lược đơn **4** thì thiệt hại tối thiểu là 2 và tối đa có thể là 13.

Mặc dù chọn các phương án khác có thể người chơi có cơ hội có được thiệt hại thấp hơn 4. Tuy vậy (Q) vẫn chọn chiến lược đơn **1** để đảm bảo thiệt hại tối đa là bé nhất.

Định nghĩa 4.3.9. Nghiệm của trò chơi ma trận hai đấu thủ là bộ ba (\bar{X}, \bar{Y}, ν) , trong đó \bar{X} là chiến lược hỗn hợp của người chơi (P); \bar{Y} là chiến lược hỗn hợp của người chơi (Q) và ν là giá của trò chơi thỏa mãn các điều kiện sau:

- 1) $\mathbb{E}(\bar{X}, \bar{Y}) = \nu$
- 2) $\mathbb{E}(\bar{X}, \mathbf{j}) \geq \nu$ với mọi chiến lược đơn \mathbf{j} của (Q) ;
- 3) $\mathbb{E}(\mathbf{i}, \bar{Y}) \leq \nu$ với mọi chiến lược đơn \mathbf{i} của (P) ;

Chú ý 4.3.10. Nếu (P) chọn chiến lược tối ưu \bar{X} thì lợi nhuận tối thiểu là ν . Nếu (Q) chọn chiến lược tối ưu \bar{Y} thì cho dù (P) chọn phương án nào đi nữa thì thiệt hại tối đa không quá ν .

Định lý 4.3.11 (Định lý minimax). Mọi trò chơi ma trận có phần tử dương bao giờ cũng tổng tại nghiệm. Tức là chúng ta có đẳng thức sau

$$\max_X \min_Y \mathbb{E}(X, Y) = \min_Y \max_X \mathbb{E}(X, Y) = \nu.$$

Chú ý 4.3.12. +) Nếu (\bar{X}, \bar{Y}, ν) là nghiệm của trò chơi ma trận. Khi đó với mọi cặp chiến lược (X, Y) ta luôn có

$$\mathbb{E}(X, \bar{Y}) \leq \mathbb{E}(\bar{X}, \bar{Y}) = \nu \leq \mathbb{E}(\bar{X}, Y).$$

+) Ta có

$$(x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} p & \dots & p \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p & \dots & p \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} m \\ \sum_{i=1}^m x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ \sum_{j=1}^n y_j \end{pmatrix} = p.$$

Do đó với ma trận thắng $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Đặt $A_p = (a_{ij} + p)_{m \times n}$. Khi đó

$$\mathbb{E}_p(X, Y) = X A_p Y^T = X A Y^T + p = \mathbb{E}(X, Y) + p.$$

Do vậy, nghiệm của bài trò chơi ma trận với ma trận thắng A_p là $(\bar{X}, \bar{Y}, \nu_p)$ khi và chỉ khi nghiệm của bài trò chơi ma trận với ma trận thắng A là $(\bar{X}, \bar{Y}, \nu_p - p)$. Từ đó suy ra: Nếu ma trận thắng $A = (a_{ij})$ có phần tử âm thì có thể thay nó bằng ma trận $A_p = (a_{ij} + p)$ với $p = 1 - \min\{a_{ij} : a_{ij} < 0\}$. Do vậy chúng ta luôn đưa về được trò chơi ma trận với ma trận thắng chỉ chứa phần tử dương.

4.3.3 Mô tả bài toán trò chơi bởi bài toán quy hoạch

Xét bài toán trò chơi ma trận 2 đấu thủ (P) và (Q) với ma trận thắng của (P) là $A = (a_{ij})$. Theo Định nghĩa 4.3.9. Người chơi (P) tìm chiến lược tối

hàm mục tiêu được một lượng càng lớn càng tốt. Do vậy ta chọn A_k vào cơ sở mà ứng với nó $\Delta_k > 0$ và

$$\lambda_{0k} = \max\{\lambda_{0j} \mid \Delta_j > 0\}; \text{ với } \lambda_{0j} = \min\left\{\frac{x^{(0)_i}}{a_{ij}} \mid a_{ij} > 0\right\}.$$

Vì khi đó ta có

$$f(Y_1) = f(Y_0) - \lambda_{0k}\Delta_k.$$

4) Khi $a_{ij} > 0 \forall i, j$ thì cặp bài toán (4.11) (4.12) và (4.15) (4.16) luôn có tập phương án khác rỗng. Thật vậy

$$a_{lk} = \max\{a_{ij} : \forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}; \quad a_{pq} = \min\{a_{ij} : \forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}.$$

Khi đó

$$X' = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{p-1 \text{ số } 0}, \frac{1}{a_{pq}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$$

là một phương án của bài toán (4.11) (4.12) và

$$X' = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{k-1 \text{ số } 0}, \frac{1}{a_{lk}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

là một phương án của bài toán (4.15) (4.16). Do vậy, áp dụng định lý định lý đối ngẫu suy ra (4.11) (4.12) và (4.15) (4.16) có phương án tối ưu. Ngoài ra, $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ không phải là phương án của bài toán (4.11) (4.12) nên $\min\{x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m\} > 0$ suy ra tồn tại giá của trò chơi ν sao cho

$$\nu = \frac{1}{\min\{x'_1 + x'_2 + \dots + x'_m\}} > 0.$$

Nhận xét này một lần nữa chỉ ra tính đúng của Định lý 4.3.11.

4.3.4 Thuật toán tìm chiến lược tối ưu của trò chơi

Để tìm chiến lược tối ưu cho người chơi và đối thủ chúng ta thực hiện các bước sau:

Bước 1 Đưa bài toán trò chơi về bài toán có ma trận thắng của (P) có các phần tử dương. Nếu ma trận thắng $A = (a_{ij})_{m \times n}$ tồn tại $a_{ij} < 0$. Đặt $\alpha = -\min\{a_{ij} \mid a_{ij} < 0\}$. Khi đó xét bài toán trò chơi với ma trận thắng $A_\alpha = (a_{ij} + \alpha)_{m \times n}$.

Bước 2 Viết bài toán quy hoạch tuyến tính cho chiến lược của người chơi (P) và đối thủ (Q) với ma trận thắng A_α .

Bước 3 Giải bài toán của đối thủ (Q) hoặc người chơi (P) ta có được phương án tối ưu $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \in \mathbb{R}^m$ và $Y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \in \mathbb{R}^n$ của cặp bài toán (4.11) (4.12) và (4.15) (4.16).

Bước 4 Tính giá của trò chơi $\nu = \frac{1}{y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n}$, chiến lược tối ưu $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ với $x_i = \nu x'_i \forall i = \overline{1, m}$ của người chơi (P) và chiến lược tối ưu $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ với $y_j = \nu y'_j \forall j = \overline{1, n}$ của đối thủ (Q).

Ví dụ 4.6. Trong Ví dụ 4.4 chúng ta xem nhà đầu tư là người chơi (P) và thị trường là đối thủ (Q) với ma trận thắng của (P) là

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 7 & 0 \\ -7 & 20 & 6 & 15 \\ 9 & 10 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Ta xét bài toán trò chơi ma trận với ma trận thắng là

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 21 & 20 & 13 \\ 6 & 33 & 19 & 28 \\ 22 & 23 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

Bài toán quy hoạch của người chơi (P) là

$$\min\{x'_1 + x'_2 + x'_3\} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} 29x'_1 + 6x'_2 + 22x'_3 \geq 1 \\ 21x'_1 + 33x'_2 + 19x'_3 \geq 1 \\ 20x'_1 + 19x'_2 + x'_3 \geq 1 \\ 13x'_1 + 28x'_2 + 18x'_3 \geq 1 \\ x'_1, x'_2, x'_3 \geq 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Bài toán quy hoạch của đối thủ (Q) là

$$\max\{y'_1 + y'_2 + y'_3 + y'_4\} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} 29y'_1 + 21y'_2 + 20y'_3 + 13y'_4 \leq 1 \\ 6y'_1 + 33y'_2 + 19y'_3 + 28y'_4 \leq 1 \\ 22y'_1 + 23y'_2 + y'_3 + 18y'_4 \leq 1 \\ y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 \geq 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Bây giờ chúng ta giải bài toán (4.19)(4.20).

Dạng chính tắc của bài toán (4.19)(4.20) là

$$\min\{-y'_1 - y'_2 - y'_3 - y'_4\} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} 29y'_1 + 21y'_2 + 20y'_3 + 13y'_4 + y'_5 & = 1 \\ 6y'_1 + 33y'_2 + 19y'_3 + 28y'_4 & + y'_6 = 1 \\ 22y'_1 + 23y'_2 + y'_3 + 18y'_4 & + y'_7 = 1 \\ y'_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1, 7}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Ta có ma trận hệ số của (4.22) là

$$A = \begin{bmatrix} (A_1) & (A_2) & (A_3) & (A_4) & (A_5) & (A_6) & (A_7) \\ 29 & 21 & 20 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 33 & 19 & 28 & 0 & 1 & 0 \\ 22 & 23 & 1 & 18 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chọn hệ véc tơ cơ sở $A_5 A_6 A_7$ liên kết với phương án cực biên

$$X_0 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1),$$

ta có bảng đơn hình sau:

Bảng	Cơ sở	Hệ số	Toạ độ	-1	-1	-	-1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
I	A_5	3	192	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	A_6	2	28	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0
	A_7	M	48	0	1	0	1	0	0	1
		α_i	632	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{3}$	0	0
		β_i	48	0	1 \uparrow	0	1	0	0	0
II	A_1	3	168	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	\times
	$\Leftarrow A_6$	2	28	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	\times
	A_2	1	48	0	1	0	1	0	0	\times
			608	0	0	$\frac{17}{6}$ \uparrow	0	$-\frac{7}{3}$	0	\times
III	A_1	3	147	1	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	\times
	A_3	0	42	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	\times
	A_2	1	48	0	1	0	1	0	0	\times
			489	0	0	0	0	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{17}{4}$	\times

5

Mô hình cân đối liên ngành

6

Mô hình phục vụ công cộng

7

Mô hình lưu trữ

Tài liệu tham khảo

- [1] Trần Xuân Sinh, *Toán kinh tế*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội, 2008.
- [2] Trần Xuân Sinh, *Quy hoạch tuyến tính*, Nhà xuất bản Đại học sư phạm, 2003.
- [3] Thêm tài liệu của ĐH Kinh tế quốc dân và Tài liệu nước ngoài.